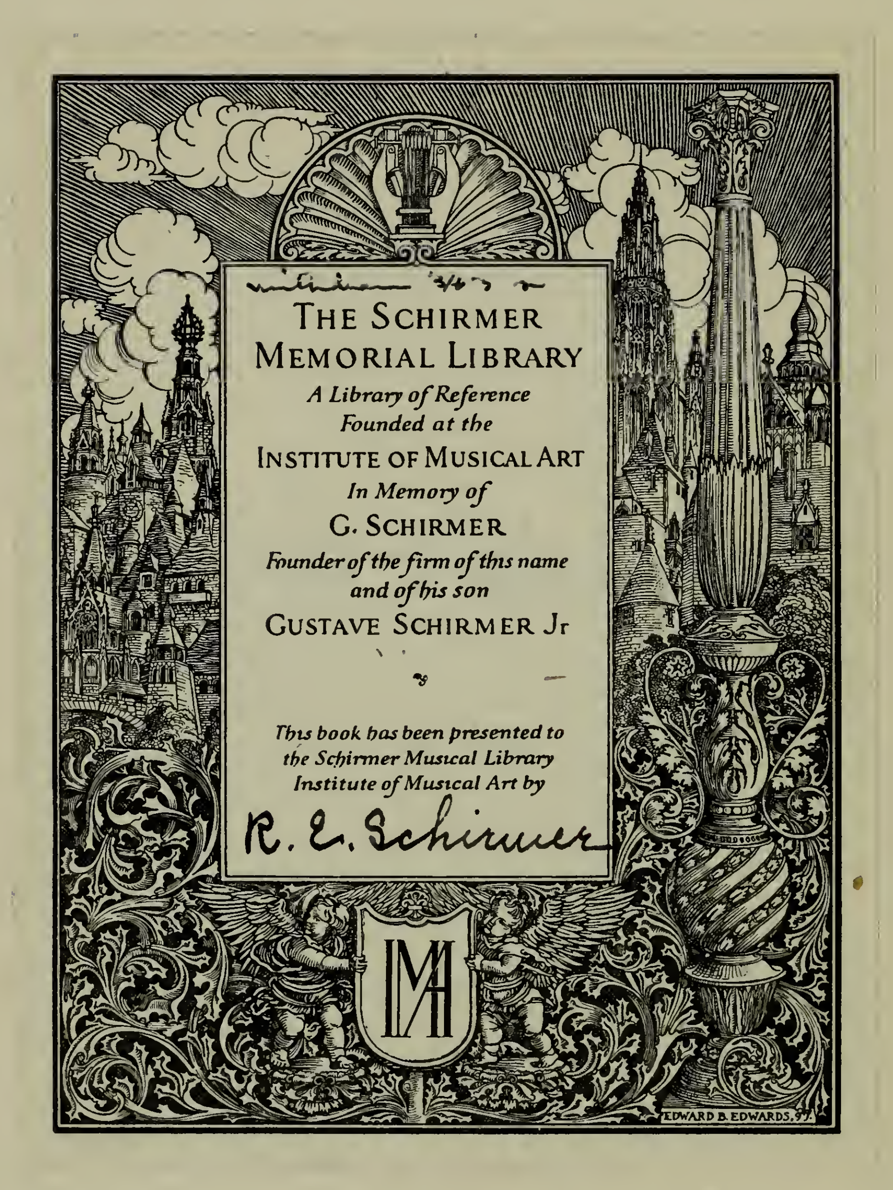

THE SCHIRMER
MEMORIAL LIBRARY
A Library of Reference
Founded at the
INSTITUTE OF MUSICAL ART
In Memory of
G. SCHIRMER
Founder of the firm of this name
and of his son
GUSTAVE SCHIRMER Jr
This book has been presented to
the Schirmer Musical Library
Institute of Musical Art by
R. E. Schirmer
EDWARD B. EDWARDS. 97.

35¢

Dr. phil. Alfred Jonquière,

Grundriss der musikalischen Akustik.

Grundriss

der

musikalischen Akustik.

Ein Leitfaden

für Musiker und Kunstfreunde

von

Dr. phil. Alfred Jonquière.

Mit 63 Text-Abbildungen,
1 Tafel und zahlreichen Notenbeispielen.

Leipzig.
Th. Grieben's Verlag (L. Fernau).
1898.

Vorwort.

Die vorliegende Schrift soll ein Versuch sein, die wichtigsten Errungenschaften der neueren akustischen Forschung, soweit sie mit der Musik in innerem Zusammenhange stehen, allen denjenigen Kunstjüngern und Kunstfreunden vor Augen zu führen, welche sich für die akustischen Grundlagen der Musik interessiren und den ernsten Willen haben, einen Einblick in das Errungene und einen Ausblick auf das noch zu Erringende zu gewinnen.

Die Akustik ist ein Gebiet, das sich schwer scharf abgrenzen lässt. Es ist umgeben von mehreren ausgedehnten Wissensgebieten, von deren Erzeugnissen es abhängt und deren Einfluss überall mehr oder weniger deutlich zu verspüren ist. Physik, Musik, Mathematik, Physiologie, Psychologie liefern Beiträge zum Aufbau der Akustik. Je nachdem der gewählte Standpunkt sich mehr dem einen oder dem andern dieser Gebiete nähert, werden sich die Umrisse der Akustik anders gestalten.

Ein Leitfaden der „musikalischen Akustik" wird vorwiegend alle diejenigen akustischen Erscheinungen zu berücksichtigen haben, welche für die Musik von Interesse sind. Nicht jeder Schall ist auch Musik. Die musikalische Akustik ist also einerseits ein engeres Gebiet als die Akustik überhaupt; andrerseits aber sind ihre Grenzen nach Seite der Musik hin weiter ausgedehnt, als diejenigen der allgemeinen Akustik.

Töne sind die Bausteine der Musik; das hervortretendste Merkmal eines Tones ist aber dessen Höhe. Es mag deshalb gerechtfertigt sein, mit einem Abschnitte zu beginnen, der von der Tonhöhe und Allem, was damit zusammenhängt, handelt. Die in diesem Abschnitte vorauszusetzenden Kenntnisse sind im Wesentlichen ganz elementar und übersteigen zunächst nicht das Maass dessen, was in jeder Mittelschule gelehrt wird. Die Nummern 1—37 enthalten eine stufenweise ausführliche Auseinandersetzung und Entwicklung des reinen Tonsystems, der verschiedenen darauf basirenden Stimmungsprinzipien, der musikalischen Temperatur u. s. w. Alles Subjektive

wurde dabei so weit als möglich in den Hintergrund gedrängt. Nur einige durch kleineren Druck sich auszeichnende Nummern enthalten Betrachtungen, die sich zwar zwanglos an das Vorhergehende anschliessen, aber doch etwas abseits von der zusammenhängenden Darstellung führen und da und dort subjektives Gepräge aufweisen. Vielleicht sind diese Einschaltungen, als eine Art von Ruhepausen, manchem Leser erwünscht, wenn auch möglicherweise die da und dort eingestreuten Bemerkungen subjektiven Charakters seiner eigenen Ansicht nicht genau entsprechen sollten. — Die Darlegung des reinen Tonsystems und der musikalischen Temperatur ist so gehalten, dass bei stufenweisem Fortschreiten auch ein an derartige Betrachtungen nicht gewöhnter Leser kaum irgendwo auf nennenswerthe Schwierigkeiten stossen dürfte. Eine gewisse Breite und Ausführlichkeit der Darstellung schien mir durch die Rücksichtnahme auf Diejenigen geboten, welche sich in den Gegenstand erst einleben müssen. Wer das Tempo des Fortschreitens zu langsam finden sollte und rascher vorwärts zu kommen wünscht, dem wird es das ausführliche Inhaltsverzeichniss ermöglichen, das seinem Geschmacke am besten zusagende Tempo sich selbst zurecht zu legen und je nach Bedürfniss vorzugreifen oder, wenn nöthig, allenfalls Uebergangenes, was ihm zum Verständniss des Weiteren fehlen sollte, nachzuholen. — Es wurde zunächst versucht, mit den allerelementarsten Hülfsmitteln so weit als möglich vorzudringen. Erst in N. 35 wurde bei Anlass der Einführung des sog. Oktavenmaasses der blosse Begriff eines Logarithmus als bekannt vorausgesetzt und gestützt auf diesen Begriff das Oktavenmaass von Quinte und grosser Terz abgeleitet. Wer diesen Betrachtungen nicht zu folgen vermöchte, wird nur die auf pag. 75 gegebenen Werthe für grosse Terz und Quinte auf Treu und Glauben anzunehmen haben und wird von da an auf keine Schwierigkeiten mehr stossen. Unter Anwendung des Oktavenmaasses gestalten sich alle Betrachtungen über reine Stimmung und Temperatur überraschend einfach. Ein mit der Handhabung dieses Maasses Vertrauter wird sich im Gebiete der reinen Stimmung und aller damit zusammenhängender Fragen gewissermaassen mit der Leichtigkeit und Geschwindigkeit eines Radfahrers bewegen, während der Fussgänger weit mühsamer und unter grösserer Ermüdung zum Ziele gelangt. Ich mochte das Hülfsmittel des Oktavenmaasses nicht ganz entbehren, ihm aber doch andrerseits keine so grosse Wichtigkeit beimessen, dass der damit nicht Vertraute sich dadurch abschrecken liesse. Deshalb sind manche Punkte doppelt behandelt, einmal nur mit den elementarsten Hülfsmitteln, ein zweites Mal in N. 35 und 36 unter Anwendung des Oktavenmaasses. Der kundige Leser mag

diese Weitschweifigkeit entschuldigen; er wird sich leicht darüber hinwegsetzen und seinen eigenen Weg finden; für den Neuling auf diesem Gebiete mag es dagegen nichts schaden, wenn er den Gegenstand von verschiedenen Seiten und in verschiedener Beleuchtung sieht. — Einige Einschaltungen, welche arithmetische Kenntnisse verlangen, die über die vier bürgerlichen Spezies hinausgehen, sind am Beginn und am Schluss durch ein † gekennzeichnet. Sie können übergangen werden, wenn der Leser den darin abgeleiteten Resultaten Glauben schenken will.

Der zweite kleingedruckte Theil des ersten Abschnittes (N. 38—54) enthält Betrachtungen für denjenigen Leser, der sich mit den erlangten theoretischen Kenntnissen nicht begnügt und den sich aufdrängenden praktischen Fragen etwas näher treten will. Die Theorie der verschiedenen Abstimmungsprinzipien an und für sich ist freilich ausserordentlich einfach; die sich daran anschliessenden musiktheoretischen Fragen dagegen sind sehr schwieriger Natur. Hier beginnt das Gebiet des individuellen Geschmackes. Ich persönlich bekenne mich als Anhänger einer gemischten Intonation, ungefähr in dem Sinne, wie es Joachim Steiner in seinem im Texte mehrmals erwähnten Buch auseinandergesetzt hat. Gestützt auf eigene Beobachtungen und in Uebereinstimmung mit Steiner bin ich der Ueberzeugung, dass Melodie und Harmonie theoretisch schärfer auseinanderzuhalten sind, als dies in der Regel geschieht, und dass die rein melodische Intonation eine andere ist als die rein harmonische. Die gleichschwebende 12stufige Temperatur erscheint von diesem Standpunkt aus nicht als Nothbehelf für ein wegen praktisch-technischer Schwierigkeiten nicht zu erreichendes aber zu erstrebendes Ideal, sondern vielmehr als prinzipiell gut zu heissender Kompromiss zwischen Melodie und Harmonie. Ein Kompromiss wird stets seine Mängel haben, er kann aber doch prinzipielle Anerkennung finden als bestmögliche Lösung eines in völliger Strenge und Allgemeinheit theoretisch unlösbaren Problems.*) Damit soll nicht ausgesprochen sein, dass in Spezialfällen nicht andere befriedigendere Lösungen möglich seien; es soll nur gesagt sein, dass eine bessere allgemein anwendbare praktische Lösung kaum denkbar ist. — Ich hielt es nicht für angebracht, meinen eigenen Standpunkt gleich zu Beginn überall hervortreten zu

*) Es sei z. B. an das berühmte Problem der Quadratur des Kreises erinnert, dessen Lösbarkeit im strengen Sinne der Geometer durch die Arbeiten von Lindemann, Weierstrass u. A. als unmöglich erwiesen ist, während es andrerseits Näherungsmethoden gibt, die das Problem mit mehr als nur ausreichender Genauigkeit, theoretisch aber nicht in absolut vollkommener Weise lösen.

lassen. Der Leser muss erst die verschiedenen Stimmungsprinzipien vorurtheilsfrei kennen lernen und sollte sich womöglich ein eigenes Urtheil bilden, bevor er sich von fremder Kritik beeinflussen lässt. Immerhin musste ich schon früh da und dort auf den bestehenden Gegensatz zwischen Melodie und Harmonie hinweisen. — Die Nummern 38—44 bringen eine gedrängte historische Darstellung der Entwicklung unseres Tonsystems mit spezieller Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Fragen. Sie mag diese und jene Punkte in helleres Licht setzen, als es ohne Kenntniss des historischen Entwicklungsganges möglich wäre. Hieran schliesst sich unmittelbar eine Besprechung einiger reingestimmter Tasteninstrumente aus neuerer Zeit an (N. 45—49). Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine eingehendere Prüfung der verschiedenen Abstimmungsprinzipien und eine genauere Auseinandersetzung und Begründung früher angedeuteter oder ausgesprochener Ansichten. Ich war dabei bemüht, auch diejenigen Leser, welchen kein reingestimmtes Harmonium zu Versuchen zur Verfügung steht, zu eigenen Beobachtungen und Versuchen auf der Violine anzuleiten. Es lag mir nicht daran, irgend einen theoretischen Standpunkt zu verfechten, sondern auf Grund eigener Prüfung sowohl an einem reingestimmten Harmonium als auf der Violine mir eine eigene Meinung zu bilden. Mögen Andere eine andere Meinung haben; jede Ansicht hat ihre Berechtigung, sobald sie sich auf praktische Versuche gründet und der Ausdruck eigener von theoretischer Voreingenommenheit freier Ueberzeugung ist.

Der zweite Abschnitt über Klangfarbe und musikalische Instrumente ist im Wesentlichen unabhängig vom ersten. Wer sich für die im ersten Abschnitte abgehandelten Stimmungs- und Intonationsfragen nicht interessirt, dem steht es frei, nachdem er sich mit den ersten elementarsten Kenntnissen über die Schwingungsverhältnisse musikalischer Intervalle vertraut gemacht hat, direkt zum zweiten Abschnitt überzugehen. Hier mussten aber naturgemäss Betrachtungen aus der Physik zu Hülfe genommen werden. Die physikalischen Untersuchungsmethoden sind soweit gekennzeichnet, als es nöthig ist, um zu verstehen, wie die Resultate gewonnen werden konnten. Zwischen die Betrachtungen über Klänge gespannter Saiten und diejenigen über Orgelpfeifen wurden die nothwendigsten Auseinandersetzungen über die Gesetze der Wellenbewegung eingeschaltet, soweit es ohne Anwendung mathematischer Hülfsmittel möglich ist. Ohne jeglichen Begriff von der Wellenlehre wird die Theorie der Orgelpfeifen, wie überhaupt aller musikalischen Instrumente, immer unklar und dunkel bleiben; es genügt jedoch wenig dazu, um dieses Dunkel wenigstens einigermaassen zu erhellen. Wer sich die Mühe nimmt, sich mit den

einfachsten Grundsätzen der Wellenlehre vertraut zu machen, wird durch die klarere Einsicht in die Wirkungsweise der musikalischen Instrumente reichlich belohnt. — Die „Lehre von den Tonempfindungen“ von Helmholtz bildet das Fundament, auf welchem alle Schriften, die von der Klangfarbe handeln, ruhen müssen. Wer eingehendere Studien über das Wesen der Klangfarbe machen will, wird immer zu dem berühmten Werke von Helmholtz greifen müssen. — Die Theorie der wichtigeren Gruppen musikalischer Instrumente wurde so weit gebracht, als die wenigen vorausgesetzten physikalischen Kenntnisse es ermöglichten. Wer weitere Einzelheiten kennen zu lernen wünscht und zugleich über physikalische Kenntnisse verfügt, durch welche seine Urtheilskraft geschärft ist, der wird aus dem Studium des anziehend geschriebenen zweibändigen Werkes von Zellner („Vorträge über Akustik“, Wien, Hartleben 1892) grossen Nutzen ziehen. Es sind im Texte überhaupt zahlreiche Schriften angeführt, deren Studium Jedem, der tiefer in den betreffenden Gegenstand eindringen will, angelegentlich zu empfehlen ist. Eine Schrift von so geringem Umfange wie die vorliegende kann nicht Anspruch darauf erheben, als Ersatz für das Studium von Spezialschriften zu dienen; sie soll nur ein Leitfaden für Denjenigen sein, der sich in dem ganzen umfangreichen Gebiete orientiren will und dabei einer Leitung bedarf. Der aufmerksame Leser wird zwischen den Zeilen viele Fragezeichen bemerken. Viele Probleme sind noch zu lösen; je tiefer man in einen Gegenstand eindringt, um so mehr offene Fragen wird man finden.

Der dritte Abschnitt behandelt in gedrängter Kürze das menschliche Gehörorgan, die Helmholtz'sche Theorie des Hörens, die Erscheinungen der Interferenz und der Schwebungen und die hervorragendsten Theorien der Consonanz und Dissonanz. Hier treten wir in das schwierigste Kapitel der Akustik ein, an dessen Ausgestaltung die hervorragendsten Akustiker arbeiten. Wer die Schwierigkeiten der Forschung auf diesem Gebiete kennt, der wird die Summe von Geist und Scharfsinn, welche den Arbeiten der Forscher zu Grunde liegt, bewundernd anerkennen, selbst dann, wenn nicht alle Theorien sich als unbedingt lebensfähig erweisen. Das Streben nach Wahrheit bietet häufig einen ebensogrossen intellektuellen Genuss dar als die Erkenntniss der Wahrheit selbst. Wer an Stelle des Niedergerissenen nicht wesentlich Besseres aufzubauen im Stande ist, dessen Kritik wird stets maassvoll bleiben müssen, wenn ihm auch das Recht zur Kritik nicht abgesprochen werden darf. Die neueste Stumpf'sche Theorie der Consonanz und Dissonanz, welche von den Thatsachen der Tonverschmelzung ausgeht, wird voraussichtlich den Ausgangs-

punkt der weiteren Entwicklung der akustischen Musiktheorie bilden. Mit einer Skizzirung der Grundzüge dieser Theorie schliesst der dritte Abschnitt ab. —

Unter den Musikfreunden, welche sich für akustische Probleme interessiren, wird sich eine gewisse Zahl von solchen finden, welche, ohne Mathematiker von Fach zu sein, doch eine gute mathematische Bildung genossen haben. Ich denke dabei an alle Diejenigen, welche bei ihrem Berufsstudium die Mathematik als Nebenfach betrieben und dabei mit den Elementen der Differential- und Integralrechnung bekannt wurden, also z. B. an Ingenieure, Architekten, Techniker u. s. w. Für diese ist der kleine mathematische Anhang bestimmt. Um die Probleme der mathematischen Akustik in möglichster Allgemeinheit und Strenge direkt von vorn anzugreifen, dazu gehören freilich umfassende mathematische Kenntnisse, welche man nur vom Berufs-Mathematiker verlangen darf. Wer jedoch auch nur mit den Elementen der sog. höheren Rechnung vertraut ist, dessen Kenntnisse werden hinreichen, um von den grundlegenden akustischen Problemen einen Begriff zu bekommen, der grosse intellektuelle Befriedigung gewährt. Die analytischen Ausdrücke für fortschreitende und stehende Wellen sind auf Grund der erwähnten Vorkenntnisse sehr leicht zu entwickeln. Das sog. Problem der schwingenden Saite, welches einen durch nichts zu ersetzenden Einblick in die fundamentalsten akustischen Erscheinungen gewährt, ist unter N. 93 in einer Form dargestellt, die, wie ich glaube, auch einem Nicht-Mathematiker verständlich und zugänglich sein wird, wenn er nur in den ersten Elementen der Differential- und Integralrechnung sattelfest ist und seine Kenntnisse richtig anzuwenden versteht.

Herrn Prof. Dr. Max Planck in Berlin bin ich zu besonderem Danke verpflichtet für die Ueberlassung des Eitz'schen Harmoniums zu Versuchszwecken sowie für mehrere Litteratur-Nachweise.

Indem ich diese Schrift der Oeffentlichkeit übergebe, bin ich mir dessen bewusst, dass Vieles lückenhaft ist und das Ziel, das mir vor Augen schwebte, nur annähernd erreicht ist. Bei einem Buche, das sich an einen so verschieden gearteten Leserkreis wendet, ist es sehr schwer, beinahe unmöglich, die Anforderungen jeder Richtung zu befriedigen. Doch hoffe ich, dass das Buch Manchem, der nach Erkenntniss strebt, ein willkommener Führer sein werde. Die Winke Berufener, welche die Schwierigkeiten der zu lösenden Aufgabe kennen und auf einer höheren Warte stehen, werde ich stets mit Dank annehmen.

Berlin, im August 1898. **Der Verfasser.**

Inhalts-Verzeichniss.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von der Klangfarbe und die musikalischen Instrumente.

Dritter Abschnitt.

Die Wahrnehmung des Klanges. Interferenz, Schwebungen und Combinationstöne. Consonanz und Dissonanz.

Anhang.

Ergänzungen zur Theorie der Wellenbewegung.



Druckfehler.

S. 24 Zeile 14 von oben lies Dreiklänge statt Durklänge.

S. 45 Zeile 6 von unten lies: $\frac{531\,441}{524\,288} = 1 + \frac{7153}{524\,288} = \ldots$



Einleitendes.

Jeder Mensch, der mit normalem Gehörorgan begabt und physisch und geistig normal entwickelt ist, weiss im Allgemeinen scharf zu unterscheiden zwischen einem Geräusch, einem Knall, überhaupt einer der unendlich verschiedenen Arten des Schalles, wie sie die Aussenwelt darbietet, — und einem Klang, d. h. einem musikalischen Ton in dem Sinne, in welchem man diesen Begriff in der musikalischen Welt allgemein aufzufassen pflegt. Dass ein Unterschied zwischen einer Schallempfindung im Allgemeinen und der Empfindung eines musikalischen Tones besteht, dass jene einen allgemeinen, diese einen ganz speziellen Fall von Gehörempfindung darstellt, darüber wird Jeder im Klaren sein, der für Musik in irgend welcher Form empfänglich ist. Worin jedoch dieser Unterschied besteht, welche charakteristischen Eigenthümlichkeiten den musikalischen Ton vor allen andern Arten des Schalles auszeichnen, das vermag nur die Physik klarzulegen.

Jeder Schallempfindung liegt als äussere Ursache eine Erschütterung eines elastischen Körpers zu Grunde, die durch Vermittlung der uns umgebenden, ebenfalls elastischen Luft zu unserem Gehörorgan gelangt*).

Wird z. B. mit einem Hammer auf ein Stück Eisenblech geschlagen, so werden die Eisentheile in Erschütterung versetzt, sie werden aus ihrer Gleichgewichtslage getrieben und gerathen

*) In ganz speziellen Fällen kann es vorkommen, dass sich die Erschütterung direkt, ohne Vermittlung der umgebenden Luft, dem Gehörorgan mittheilt. Schliesst man z. B. den Gehörgang ab, so dass man das Ticken einer in die Nähe des Ohres gebrachten Taschenuhr nicht hört, so wird das Ticken wieder sofort deutlich hörbar, wenn man die Uhr irgendwo an den Knochen in der Umgebung des Ohres anlegt. Die Fortpflanzung des Schalles geschieht dann durch Knochenleitung.

in eine schwingende Bewegung, welche sich der angrenzenden Luft mittheilt und sich durch diese auf das Gehörorgan überträgt. Dass die Luft hierbei eine wesentliche Rolle spielt, kann man daraus schliessen, dass in verdünnter Luft die Stärke des Schalles merklich schwächer wird, um so schwächer je weiter die Verdünnung fortgeschritten ist. Jene schwingende Bewegung ist nun freilich durchaus keine einfache und es ist sogar sehr schwer, sich ein klares Bild davon zu machen. Das ist aber auch für unsere Zwecke, wenigstens in der Regel, durchaus nicht nöthig. Es genügt, darauf hingewiesen zu haben, dass eine Erschütterung, eine schwingende Bewegung, die äussere Ursache der Schallempfindung ist.

Der augenfälligste Beweis dieser Thatsache liegt wohl darin, dass Erschütterungen der Luft, die von einem heftigen Knalle begleitet sind, zuweilen so stark sind, dass sie Fensterscheiben zum Platzen bringen. Den höchsten Grad von zerstörender Wirkung üben bekanntlich Explosionen aus, und diese sind auch von der grössten Schallwirkung begleitet.

Nehmen wir nun aber einen Klang, einen musikalischen Ton. Auch ihm liegt eine Erschütterung, eine schwingende Bewegung zu Grunde. Diese Bewegung ist aber eine durchaus gesetzmässige, geregelte, sog. periodische, d. h. innerhalb sehr kleiner Zeitabschnitte wiederholt sich genau dieselbe Bewegung. Man kann vermöge gewisser Hülfsmittel regelmässige, hin- und hergehende Bewegungen des tonerregenden Körpers unterscheiden, sog. Schwingungen, deren in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde, regelmässig eine ganz bestimmte Zahl ausgeführt werden.

Die Schwingungen einer Stimmgabel z. B. können dem Auge deutlich sichtbar gemacht werden, indem man an einer ihrer Zinken (senkrecht zur Ebene beider Zinken) einen Schreibstift befestigt, die Stimmgabel in Schwingungen versetzt und gleichzeitig die Gabel über eine berusste Unterlage wegschiebt, so dass der Stift die Schwingungen der Gabel auf der Unterlage einzeichnet. Man erhält dann eine Wellenlinie, welche es ermöglicht, die in einer gegebenen Zeit vollführten Schwingungen direkt mit dem Auge abzulesen und zu zählen.

Unter einer Schwingung verstehen wir eine einmalige hin- und hergehende Bewegung. Die Zahl der Schwingungen, welche innerhalb einer Sekunde ausgeführt werden, heisst die Schwingungszahl.

Die Erfahrung lehrt, dass die sog. Tonhöhe nur von der Schwingungszahl abhängt. Zwei Töne empfinden wir als gleich hoch, sobald die ihnen zukommende Schwingungszahl die nämliche ist. Dabei ist es durchaus gleichgültig, auf welche Weise diese beiden Töne hervorgebracht wurden. Wir sind gewiss im Stande, einen von einer Flöte hervorgebrachten Ton von dem Tone einer Violine oder eines Klaviers zu unterscheiden; wir empfinden aber doch diese verschiedenartigen Töne, die wesentlich verschiedenen Klangcharakter, verschiedene Klangfarbe zeigen, als gleich hoch, wenn ihre Schwingungszahlen (beim Klavier und bei der Violine die Zahl der Schwingungen der angeschlagenen, resp. gestrichenen Saite, bei der Flöte diejenige der im Flötenrohr eingeschlossenen Luftsäule) genau dieselben sind.

Tonhöhe und Klangfarbe sind die hervorragendsten Merkmale eines musikalischen Tones.

Stellt man sich auf den physikalisch-musikalischen Standpunkt, so kann man die nur von der Schwingungszahl abhängige Tonhöhe als eine quantitative Eigenthümlichkeit des Tones auffassen, während die Klangfarbe, durch welche sich zwei gleich hohe, aber von verschiedenen Instrumenten hervorgebrachte Töne von einander unterscheiden, ein qualitatives Merkmal ist*).

Fügen wir noch ein drittes Merkmal, dasjenige der Tonstärke hinzu, so haben wir alle charakteristischen Eigenthümlichkeiten des musikalischen Tones erschöpft.

Wir werden im Nachfolgenden in erster Linie von der Tonhöhe sprechen und einen Rundgang im Gebiete der sog. reinen Stimmung unternehmen, der den Leser befähigen soll, sich selbständig darin zu orientiren und sich ein Urtheil über die dieses Gebiet betreffenden Fragen zu bilden. In zweiter Linie werden wir uns mit der Analyse des musikalischen Tones, mit der Lehre von der Klangfarbe, und den wichtigsten hierher gehörenden physikalischen Erscheinungen überhaupt, in möglichster Kürze befassen.

---

*) Wenn wir hier die Tonhöhe als ein quantitatives Merkmal des Tones hinstellen, so weichen wir allerdings von der Auffassungsweise der Psychologen ab. Da wir jedoch hier mehr den musikalischen und physikalischen Standpunkt einnehmen, als den psychologischen, so mag es gerechtfertigt sein, wenn wir die Terminologie von Pythagoras, Ptolemäus u. a. derjenigen der aristotelischen Philosophen vorziehen.

Erster Abschnitt.

Das reine Tonsystem und die musikalische Temperatur.

1. Die absolute Tonhöhe. Das Gebiet der hörbaren und der musikalisch verwendbaren Töne. — Jedem musikalischen Tone kommt eine ganz bestimmte Schwingungszahl zu, durch welche seine Höhe vollkommen bestimmt ist. Die durch die Schwingungszahl fixirte Höhe heisst die absolute Tonhöhe.

Wenn eine periodische schwingende Bewegung (s. Einleitung) vom Ohr als Ton empfunden werden soll, so dürfen die Schwingungen weder allzu langsam noch allzu rasch erfolgen. Die Schwingungszahl muss innerhalb gewisser, allerdings sehr weiter Grenzen liegen.

Die äussersten Grenzen für ein normales Gehörorgan sind nach der einen Seite hin 16, nach der andern 12500 Schwingungen in der Sekunde (nach Untersuchungen von Preyer und von Turnbull). Erfahrungsgemäss sind aber in der Musik nur solche Töne zu gebrauchen, deren Schwingungszahlen ungefähr zwischen 30 und 4000 liegen. Schwingende Bewegungen unter 30 Schwingungen pro Sekunde machen auf das Ohr kaum mehr den Eindruck eines musikalischen Tones; Töne von über 4000 Schwingungen pro Sekunde klingen spitz und scharf und können sogar einen stechenden Schmerz im Gehörorgan hervorrufen.

Für musikalisch brauchbare Töne bleibt also das weite Gebiet zwischen 30 und 4000 Schwingungen.

2. Nothwendigkeit eines sprungweisen Fortschreitens in messbaren Schritten. Annahme eines Ausgangspunktes: der Kammerton $\bar{a}$. — Würde man dieses Tongebiet durchlaufen, etwa indem man einen Ton von 30 Schwingungen all-

mählich höher werden, in die höchsten Tonregionen von circa 4000 Schwingungen emporsteigen und wieder zurücksinken liesse, so würde dies eine Wirkung hervorbringen, welche durchaus nicht als eine „musikalische“ bezeichnet zu werden verdiente, trotzdem jedes einzelne Stadium des veränderlichen Tones an und für sich die Bezeichnung als „musikalischer Ton“ vollkommen verdient. Man hätte vielmehr eine Wirkung, welche zu vergleichen wäre dem Pfeifen eines anschwellenden und wieder abnehmenden Windes.

Jede, wenn auch noch so primitive Musik, verlangt nicht ein allmähliches, sondern ein sprungweises Fortschreiten von einem Tone zu irgend einem andern. Jedes derartige Fortschreiten hat aber zwei Dinge zur Voraussetzung:

Einmal muss man einen Ausgangspunkt annehmen, von welchem aus man fortschreitet, und zweitens muss man sich genau Rechenschaft geben können über die Grösse des Schrittes, den man ausführt.

Erstes Erforderniss ist es also, in dem weiten Tongebiete zwischen 30 und 4000 Schwingungen wenigstens einen Stützpunkt anzunehmen, und von diesem aus, nach irgend einem Gesetze, andere Stützpunkte zu gewinnen.

Im Mittelalter bezeichnete man den Ausgangspunkt, auf welchen man alle andern Töne bezog, mit *a*, als dem ersten Buchstaben des Alphabets*). Diesem Gebrauche ist man seither insofern treu geblieben, als man den in der Musik als „eingestrichenes *a*“ oder $\bar{a}$ benannten Ton als den „Kammerton“ bezeichnet und ihn als massgebend für die Stimmung betrachtet.

Die absolute Tonhöhe dieses Ausgangspunktes $\bar{a}$ hat im Laufe der Zeit erhebliche Schwankungen durchgemacht. Von der Wiener Stimmton-Konferenz im Jahre 1885 wurde die schon früher unter dem Namen „Pariser Stimmung“ bekannte Stimmung als einheitliche Norm vorgeschlagen und zum Beschluss erhoben. Das $\bar{a}$ wurde zu 435 sog. Doppelschwingungen oder

*) Von *a* ausgehend bildete man die Reihe der Töne *a, b, c, d, e, f, g* in der Bedeutung, die wir diesen Buchstaben auch heute noch beilegen. Man unterschied jedoch ein „*b* rotundum“, das man mit ♭ bezeichnete und das unserem *b* entspricht, und ein „*b* quadratum“, das mit unserem *h* übereinstimmt und mit ♮ bezeichnet wurde. Aus dieser letzten Form hat sich allmählich das ♮, d. h. das „*h*“ entwickelt. Siehe übrigens weiter unten.

870 einfachen Schwingungen fixirt (eine „Doppelschwingung“ besteht in einer einmaligen hin- und hergehenden Bewegung, wie wir es in der Einleitung festgesetzt haben; eine einfache Schwingung besteht nur in einer einmaligen hin- oder hergehenden Bewegung. Die Franzosen pflegen meist nach einfachen Schwingungen zu zählen. Wir werden jedoch im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, unter einer Schwingung stets eine Doppelschwingung vertehen). Diese von der Wiener Konferenz vorgeschlagene Normalstimmung hat seither in der musikalischen Welt eine sehr weite, aber leider nicht allgemeine Verbreitung gefunden (z. B. nicht in England). —

Während als Ausgangspunkt der Stimmung durchweg der Kammerton $\bar{a}$ festgehalten wird, pflegt man in der Musik zum Ausgangspunkt der gebräuchlichsten sog. Durtonleiter einen Ton zu machen, den man als $\bar{c}$ bezeichnet und der um eine sog. grosse Sexte tiefer liegt als der Kammerton. Wir stützen uns hier auf den aus der Musik geläufigen Begriff der grossen Sexte, ohne ihn genau zu definiren. Es genügt uns vorläufig festzustellen, dass dieses $\bar{c}$ 261 Schwingungen macht, wenn dem $\bar{a}$ 435 Schwingungen zukommen. Die Definition der grossen Sexte und der Beweis der letzten Behauptung wird sich im Folgenden bald und leicht ergeben.

Wir nehmen also als Markstein in dem weiten Gebiete der musikalisch brauchbaren Töne das *c* von 261 Schwingungen an, nennen dieses, dem musikalischen Sprachgebrauch gemäss, das „eingestrichene *c*“ und bezeichnen es mit „$\bar{c}$“.

3. Eintheilung des Tongebietes in Unterabtheilungen durch das Intervall der Oktave. Charakteristisches Schwingungsverhältniss der Oktave zum Grundton. — Von diesem Ausgangspunkt aus theilen wir das ganze Tongebiet, nach oben und nach unten fortschreitend, in Oktaven ein und gewinnen dadurch neue Stützpunkte.

Die Oktave ist (nächst dem Einklang) das einfachste musikalische Intervall. Sie ist das Grundintervall aller Musiksysteme, und findet sich in der Musik aller Zeiten und aller Völker.

Von $\bar{c}$ aus nach oben in Oktaven fortschreitend, gewinnen wir das zweigestrichene „$\bar{\bar{c}}$“, das dreigestrichene „$\bar{\bar{\bar{c}}}$“, das viergestrichene „$\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$“ u. s. f. Von $\bar{c}$ um eine Oktave abwärts schreitend gelangen wir zum sog. „kleinen“ *c*, von da wieder um eine Oktave abwärts schreitend, zum „grossen“ *C*, noch-

mals um dasselbe Intervall abwärts gehend nach dem Contra „$\underline{C}$“, weiter nach dem „Subcontra“ „$\underline{\underline{C}}$“ u. s. f. Dieselbe Bezeichnung überträgt man jeweilen auf alle zwischen den eben gewonnenen Stützpunkten liegenden Töne, in der Weise dass man die zwischen $\bar{\bar{\bar{c}}}$ und $\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$ liegenden Töne als „dreigestrichene“, die zwischen $\bar{\bar{c}}$ und $\bar{\bar{\bar{c}}}$ liegenden als „zweigestrichene“, diejenigen zwischen c und $\bar{c}$ als „kleine“, zwischen C und c als „grosse“, zwischen $\underline{C}$ und C als Contratöne u. s. w. bezeichnet. Die Bezeichnung, welche irgend eines der angegebenen c trägt, ist massgebend für alle Töne, welche zwischen diesem c und dem um eine Oktave höheren c liegen.

Wir haben zunächst den Begriff der „Oktave“ als aus der Musik bekannt vorausgesetzt. Der nächste Schritt ist nun offenbar, zu fragen, in welchem Zusammenhange das Intervall einer Oktave mit der absoluten Tonhöhe, d. h. mit der Schwingungszahl steht. Wir müssen uns über die Grösse eines Oktavenschrittes nicht nur im musikalischen, sondern auch im physikalischen Sinne Rechenschaft geben können. Denn nur dann gelangen wir zu einer völlig klaren, einwurfsfreien Definition des Oktavenbegriffs.

Die Erfahrung, der physikalische Versuch*), lehrt, dass zwischen den Schwingungszahlen eines Tones und seiner nächst höheren Oktave ein äusserst einfacher, klar zu übersehender Zusammenhang besteht. Gehen wir von irgend einem Tone als Grundton um eine Oktave nach oben, so ist die Schwingungszahl dieses um eine Oktave höher liegenden Tones genau doppelt so gross, als die Schwingungszahl des Grundtones.

Gehen wir also z. B. von unserem Ausgangspunkte, dem $\bar{c}$ von 261 Schwingungen um eine Oktave nach oben, so gelangen wir nach dem zweigestrichenen $\bar{\bar{c}}$, und zwar wird diesem $\bar{\bar{c}}$ eine Zahl von 2 . 261 oder 522 Schwingungen entsprechen. Ganz ebenso wird die Schwingungszahl des dreigestrichenen $\bar{\bar{\bar{c}}}$ doppelt so gross sein, als die Schwingungszahl des zweigestrichenen $\bar{\bar{c}}$, d. h. es werden dem $\bar{\bar{\bar{c}}}$ 2 . 2 . 261 oder 1044 Schwingungen in der Sekunde entsprechen. Genau in derselben Weise ergibt sich das $\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$ zu 2 . 2 . 2 . 261 oder 2088 und das $\bar{\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}}$ zu 2 . 2 . 2 . 2 . 261 oder 4176 Schwingungen u. s. f.

Schreiten wir von unserem Ausgangspunkte, dem einge-

*) Ueber die experimentelle Messung von Schwingungszahlen siehe unten unter 9.

strichenen $\bar{c}$, in Oktaven abwärts, so gelangen wir zunächst zu dem „kleinen“ *c*. Das eingestrichene $\bar{c}$ muss als nächst höhere Oktave des kleinen *c* doppelt so viel Schwingungen haben als letzteres, d. h. dem $\bar{c}$ von 261 Schwingungen muss ein kleines *c* von $\frac{1}{2} \cdot 261$ oder $130_{,5}$ Schwingungen entsprechen. Das um eine Oktave tiefere grosse *C* muss wieder halb so viel Schwingungen haben als das kleine *c*, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 261$ oder $65_{,25}$. Dem Contra $\underline{C}$ kommen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 261$ oder $32_{,625}$ Schwingungen zu u. s. f.

Die absoluten Tonhöhen aller dieser verschiedenen *c* sind also die folgenden:

Contra	$\underline{C}$	$(\frac{1}{2})^3 \cdot 261$	oder	$32_{,625}$	Schwingungen
Grosses	C	$(\frac{1}{2})^2 \cdot 261$	„	$65_{,25}$	„
Kleines	c	$(\frac{1}{2}) \cdot 261$	„	$130_{,5}$	„
Eingestr.	$\bar{c}$	261	„	261	„
Zweigestr.	$\bar{\bar{c}}$	$2 \cdot 261$	„	522	„
Dreigestr.	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	$2^2 \cdot 261$	„	1044	„
Viergestr.	$\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$	$2^3 \cdot 261$	„	2088	„
Fünfgestr.	$\bar{\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}}$	$2^4 \cdot 261$	„	4176	„

Die Zahlen der rechten Vertikalreihe sind die absoluten Tonhöhen der betreffenden Töne. Die Zahlen der linken Vertikalreihe lassen stets die Beziehung zum Ausgangspunkte, dem $\bar{c}$, klar erkennen und sollen überhaupt dazu dienen, den Zusammenhang der einzelnen *c* unter sich übersichtlich zur Darstellung zu bringen.

4. Nicht die Differenz der Schwingungszahlen, sondern ihr Verhältniss ist charakteristisch für das musikalische Intervall zweier Töne. — Es soll hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die Schwingungszahlen obiger, jeweilen um eine Oktave von einander entfernter Töne durchaus nicht in gewöhnlichem arithmetischen Sinne gleich weit von einander abstehen. Das Intervall zwischen *c* und *C* z. B. ist, ganz ebenso wie das Intervall zwischen $\bar{\bar{\bar{c}}}$ und $\bar{\bar{c}}$, gleich einer Oktave, dabei ist aber die Differenz der Schwingungszahlen von $\bar{\bar{\bar{c}}}$ und $\bar{\bar{c}}$ gleich 522, dagegen die Differenz der Schwingungszahlen von *c* und *C* nur gleich $65_{,25}$, trotzdem in beiden Fällen das musikalische Intervall genau das nämliche ist. Gleich ist dagegen das Verhältniss (der Quotient) der Schwingungszahlen, nämlich $\bar{\bar{\bar{c}}} : \bar{\bar{c}} = 1044 : 522 = \mathbf{2}$, und $c : C = 130_{,5} : 65_{,52} = \mathbf{2}$.

Daraus ergibt sich, wenigstens zunächst in Bezug auf das Inter-

vall einer Oktave, der fundamentale Schluss, dass das Ohr zwei Intervalle dann als gleich empfindet, wenn das Verhältniss der Schwingungszahlen der beiden das Intervall begrenzenden Töne in beiden Intervallen das nämliche ist. Auf die Differenz der Schwingungszahlen kommt es hierbei nicht an.

Ueberhaupt gilt für alle musikalischen Intervalle der aus der Erfahrung abgeleitete Satz, dass das Ohr das Intervall zweier Töne nicht nach der Differenz ihrer Schwingungszahlen, sondern nach ihrem Verhältniss beurtheilt. Dieses Verhältniss ist für das betreffende Intervall charakteristisch und kommt nur diesem und keinem andern zu. — Mit der Schätzung und Messung musikalischer Intervalle verhält es sich genau so wie mit der vergleichenden Messung von Längen und Strecken. Wenn wir hören, dass ein Thurm um 50 m höher sei als ein anderer, so können wir uns von dem Grössenverhältniss der beiden Thürme durchaus kein Bild machen, wohl aber wenn wir sagen, der eine Thurm sei zweimal oder anderthalbmal so gross als der andere. Wenn ferner eine Stadt von unserem Wohnort um 1000 Kilometer entfernt ist, eine andere dagegen um 1005, so wird die Differenz von 5 Kilometern uns im Vergleich zu der Entfernung von 1000 Kilometern als so klein erscheinen, dass wir geneigt und berechtigt sein werden zu sagen, die zwei Städte seien gleich weit von uns entfernt. Ist dagegen eine Stadt um 5, die andere um 10 Kilometer von uns entfernt, so spielt die Differenz von 5 Kilometern in diesem Falle eine weit bedeutendere Rolle; jetzt sind die beiden Städte nicht mehr nahezu gleich weit von uns entfernt, sondern die eine ist doppelt so weit als die andere. — Ganz ebenso verhält es sich im Gebiete der Töne. Zwei Töne von 3000 und 3010 Schwingungen in der Sekunde sind so nahezu gleich hoch, dass nur ein geübtes Ohr bei ausdrücklich darauf gerichteter Aufmerksamkeit die beiden Töne von einander unterscheiden wird. Haben wir dagegen zwei Töne von 80 und 90 Schwingungen, so ist ihr musikalisches Intervall trotz der gleichen Differenz von 10 Schwingungen so gross, dass Jedermann die Töne ohne Weiteres als wesentlich von einander verschieden empfinden wird. (Ueber die von einigen Psychologen [Lorenz, Wundt u. a.] aufgestellte und verfochtene Theorie der arithmetischen Schätzung von Tondistanzen, siehe z. B. die Schrift von Gustav Engel: Die Bedeutung der Zahlenverhältnisse für die Tonempfindung. Dresden 1892.)

5. Relative und absolute Tonhöhe oder Schwingungszahl. Uebergang von der einen zur andern. — Ob eine Oktave in den tiefsten oder in den höchsten Regionen des Tongebietes liegt,

stets ist das Verhältniss der Schwingungszahl des höheren zu derjenigen des tieferen Tones, oder wie man sich in der Musik ausdrückt, das Verhältniss der Oktave zum Grundton gleich demjenigen von 2 zu 1. Aus irgend einem Grundton erhält man stets seine nächst höhere Oktave, indem man die Schwingungszahl des Grundtons mit 2 multiplizirt. Die Zahl 2 ist also für das Intervall einer Oktave charakteristisch, sie stellt die *relative Tonhöhe* oder die *relative Schwingungszahl* der Oktave dar — relativ, nämlich in Bezug auf den Grundton, der durch die Zahl 1 repräsentirt wird.

Die Zahlen 1 und 2, neben einander gestellt, bedeuten für uns nichts anderes, als Grundton und Oktave.

Wir werden im Folgenden weit mehr mit relativen als mit absoluten Tonhöhen oder Schwingungszahlen zu thun haben. Ein musikalisches Intervall ist an und für sich ein relativer Begriff, indem stets der höhere Ton auf den tieferen als Grundton bezogen wird. Deshalb geben auch die relativen Tonhöhen und Schwingungszahlen ein weit klareres Bild von der Grösse eines Intervalls als die absoluten. Es ist sehr leicht, von der relativen Tonhöhe oder der relativen Schwingungszahl zur absoluten überzugehen und umgekehrt. Haben wir irgend ein Oktavenintervall, Grundton: Oktave $= 1 : 2$ und wissen wir, dass als Grundton z. B. der Kammerton, das $\bar{a}$ von 435 Schwingungen gemeint ist, so haben wir die relativen Höhen von Grundton und Oktave (1 und 2) nur mit dieser Zahl 435 zu multipliziren, um zu den absoluten Tonhöhen, nämlich $\bar{a} = 435$ und $\bar{\bar{a}} = 870$ zu gelangen. — Genau dasselbe gilt für alle Intervalle, die wir noch kennen lernen werden. Von der relativen Tonhöhe gelangt man stets zur absoluten, indem man die relativen Höhen mit der Schwingungszahl des Grundtons, auf die sich diese relativen Höhen beziehen, multiplizirt.

Umgekehrt wird man die relative Höhe oder die relative Schwingungszahl irgend eines Tones in Bezug auf irgend einen Grundton finden, indem man die Schwingungszahl des ersteren durch die des letzteren dividirt. So erhalten wir z. B. für die relative Höhe des Kammertons $\bar{a}$ in Bezug auf $\bar{c}$ das Verhältniss $435 : 261 = 5 : 3$*), also den einfachen Bruch $\frac{5}{3}$.

*) Für den des Rechnens weniger gewohnten Leser sei bemerkt, dass die Zurückführung derartiger Brüche auf ihre einfachste Form in der Weise geschehen kann, dass man die Division wirklich ausführt und den entstehenden Decimalbruch nachher in einen gemeinen Bruch verwandelt, also z. B. $435 : 261 = 1{,}666\ldots = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Diese Bemerkung soll auch für das Folgende gelten.

Die relative Höhe oder die relative Schwingungszahl irgend eines Tones in Bezug auf einen andern, den Grundton, gibt stets an, mit welcher Zahl man die Schwingungszahl des Grundtons zu multipliziren hat, um diejenige des gegebenen Tones zu erhalten. Z. B. erhält man aus dem Grundton $\bar{c}$ von 261 Schwingungen den Kammerton $\bar{a}$ von 435 Schwingungen durch Multiplikation von 261 mit der relativen Schwingungszahl $\frac{5}{3}$.

6. Absolutes und relatives Tongehör. Digression über die Frage der Charakteristik der Tonarten. — Die Fähigkeit des menschlichen Ohres, einen Ton in Bezug auf seine absolute Tonhöhe zu beurtheilen, nennt man das absolute Tongehör. Bis zu einem gewissen Grade kommt diese Fähigkeit jedem musikalisch gebildeten Ohre zu. Die höchste Stufe dieser Fähigkeit, die darin besteht, irgend einem Tone, an dessen Entstehung man unbetheiligt ist, den richtigen Platz im Tongebiete anzuweisen, ihn (in Bezug auf eine gegebene Stimmung) richtig zu benennen, oder noch besser, einen Ton von vorgeschriebener absoluter Höhe frei zu intoniren, findet sich verhältnissmässig selten. Mit dem Namen „absolutes Tongehör“ pflegt man in der Regel nur die eben charakterisirte höchste Stufe der genannten Fähigkeit zu bezeichnen. Das absolute Tongehör findet sich selbst bei hochgebildeten, feinfühligen Musikern nicht immer sehr entwickelt vor. Es wäre zum mindesten sehr gewagt, aus dem Vorhandensein oder dem Mangel des absoluten Tongehörs einen Schluss in Bezug auf die musikalische Beanlagung eines Menschen zu ziehen.

Das relative Tongehör, die Fähigkeit, die relative Höhe eines Tones in Bezug auf einen andern, d. h. das musikalische Intervall zweier Töne, richtig zu beurtheilen, ist dagegen allgemein verbreitet und kommt jedem musikalisch gebildeten Ohre zu.

Nach den persönlichen Erfahrungen des Verfassers findet sich das absolute Tongehör bei Geigern, überhaupt bei Spielern von Streichinstrumenten, weit häufiger als z. B. bei Klavierspielern. Der Geiger gewöhnt sich bei Zeiten daran, seine 4 Saiten einzustimmen und zwar häufig unabhängig vom Klavier oder von der Stimmgabel. Der Klang der 4 sog. leeren Saiten prägt sich dem Ohre immer wieder ein, er unterscheidet sich im Klangcharakter von demjenigen der sog. gegriffenen Töne. Im Anfange vielleicht bewusst, später unbewusst, dienen die 4 leeren Saiten als Stützpunkte zur Beurtheilung der absoluten Tonhöhe. Wenn ein Geiger einen andern spielen

hört, so wird er, auch ohne ihn zu sehen, keinen Augenblick darüber im Zweifel sein, welche Töne der Spieler seinem Instrumente entlockt.

Die Beurtheilung der absoluten Tonhöhen, die dem Geiger zunächst nur in Bezug auf die Geige geläufig ist, wird nun auch auf Töne übertragen werden, die auf irgend eine andere Weise als mit Hülfe der Geige hervorgebracht wurden.

Der Geiger abstrahirt allmählich vom speciellen Geigenton und gelangt so verhältnissmässig leicht zur Beurtheilung der absoluten Höhe irgend eines Tones. — Diese Ansicht findet eine Stütze in der Beobachtung, dass ein Geiger sofort unsicherer in seinem Urtheil wird, wenn er einen Ton nach seiner absoluten Höhe zu beurtheilen hat, der ausserhalb des Umfanges seines Instruments liegt. Er wird in diesem Falle meist den gehörten Ton durch Oktavenschritte in das ihm geläufige Gebiet verlegen und so auf Umwegen zu einem sichern Urtheil gelangen.

Einen Geiger stört es meist ungemein, wenn er in die Lage kommt, mit Begleitung eines Klaviers zu spielen, dessen Stimmung wesentlich höher oder tiefer ist als die Stimmung, an die er selbst gewöhnt ist. Freilich erhält dadurch das Instrument, das eben an einen ganz bestimmten Grad von Spannung gewöhnt ist, einen etwas anderen Klangcharakter; aber dies würde doch wohl kaum genügen, um das Gefühl des Unbehagens zu erklären, das den Geiger beschleicht, wenn er die Normalstimmung seiner Geige einem höher oder tiefer gestimmten Klavier zu Liebe aufgeben muss. An den relativen Verhältnissen wird ja nichts geändert; er hat in tiefer Stimmung ganz ebenso zu greifen wie in hoher. Sein Ohr ist eben auf absolute Tonhöhen geschult und deshalb ist es für ihn mindestens befremdend, wenn er ein ihm wohlbekanntes Tonstück plötzlich in einer andern Tonlage zu spielen hat. Mit der Zeit freilich, wenn man oft in die Lage kommt, die Stimmung seiner Geige bald höher, bald tiefer gestimmten Instrumenten anzupassen, gewinnt man in dieser Richtung eine gewisse Elastizität. Aber das führt naturgemäss zu einer gewissen Abstumpfung des absoluten Tongehörs. Diese Erscheinung konnte der Verfasser an sich selbst beobachten; von anderer Seite wurden ihm völlig übereinstimmende Beobachtungen in dieser Richtung mitgetheilt.

Hierher gehört nach der Meinung des Verfassers auch die Frage, ob den verschiedenen in der Musik gebräuchlichen Tonarten auch verschiedener Charakter beizumessen sei. Diese Frage wird von der einen Seite entschieden bejaht, von der andern Seite ebenso energisch verneint. Es erscheint als sehr wahrscheinlich, dass bei dieser Frage

die absolute Tonhöhe und das absolute Tongefühl wesentlich in Betracht kommen. Innerhalb derselben Tonart kann eine Melodie verschiedene Wirkung hervorbringen, je nachdem sie eine Oktave höher oder tiefer gespielt wird. Das Intervall einer Oktave ist so gross, dass auch bei mangelhaft entwickeltem absoluten Tongefühl der Unterschied in der Wirkung auffallend ist. Liegen 2 Tonarten, wie z. B. *c*-dur und *g*-dur um eine Quinte resp. Quarte aus einander, so ist der Unterschied in der absoluten Tonhöhe immer noch gross genug, um eine verschiedene Wirkung der beiden Tonarten zu erklären. Je näher die Grundtöne der zu vergleichenden Tonarten bei einander liegen, um so feiner muss das absolute Tongehör ausgebildet sein, um eine verschiedene Wirkung der beiden Tonarten zu ermöglichen. Für Denjenigen, der sich bei der Beurtheilung absoluter Tonhöhen um halbe oder ganze Töne irren kann, wird es gewiss gleichgültig sein, ob ein Stück aus *es*-dur oder aus *e*-dur geht. Hierbei wird freilich stillschweigend vorausgesetzt, dass die Töne der *es*-dur-Tonleiter sich nicht etwa durch ihre Klangfarbe von denjenigen der *e*-dur-Tonleiter unterscheiden. Beim Gesang und bei gleichschwebend gestimmten Orgeln wird ein Unterschied der Klangfarbe zwischen *e* und *es*, *h* und *b*, *a* und *as* in der Regel nicht zu konstatiren sein. Beim Klavier z. B. werden dagegen *es*, *b*, *as* auf den schwarzen Obertasten erzeugt und diese geben (wahrscheinlich vermöge der etwas geringeren Länge des zugehörigen Hebelarmes und der damit zusammenhängenden Abweichung im Anschlag) einen etwas andern Klangcharakter als die weissen Untertasten *e*, *h*, *a*. Jene (*es*, *b*, *as*) kommen in *es*-dur, diese (*e*, *h*, *a*) in *e*-dur vor. Umgekehrt kommen in *es*-dur die Untertasten *f*, *g*, *c*, *d*, in *e*-dur dagegen die Obertasten *fis*, *gis*, *cis*, *dis* vor. Die Vertheilung der Ober- und Untertasten auf die einzelnen Stufen der Tonleiter ist eine andere bei *es*-dur als bei *e*-dur. Daraus kann beim Klavier ein verschiedener Charakter von *es*-dur und *e*-dur entspringen. Auch bei der Violine kann Aehnliches in Betracht kommen wegen des verschiedenen Klangcharakters der leeren Saiten und der gegriffenen Töne, sowie wegen des Unterschiedes im Klange von stark verkürzten und wenig verkürzten Saiten (s. Helmholtz, Lehre von d. Tonempfindungen S. 503). Kommen dagegen Unterschiede in der Klangfarbe nicht in Betracht, so halten wir unsere obige Behauptung aufrecht, dass für den nur mit relativem Tongehör Begabten ein Unterschied zwischen *es*-dur und *e*-dur nicht existirt. — Damit scheint nun freilich die Thatsache im Widerspruch zu stehen, dass man sich kaum einen grösseren Gegensatz denken kann als denjenigen zwischen dem *es*-dur- und dem *e*-dur-Dreiklange, wenn man diese Dreiklänge

unmittelbar neben einander hört. Die Tonarten *e*-dur und *es*-dur haben keinen Ton mit einander gemein, sie sind im musikalischen Sinne so wenig mit einander verwandt als möglich. Lässt man dem *e*-dur-Dreiklange unmittelbar den *es*-dur-Dreiklang folgen, so berührt uns dieser natürlich ganz anders als jener. Wir haben *e*-dur noch im Ohr und der *es*-dur-Dreiklang muss jenen gewissermassen erst aus dem Gehirn verdrängen und die Erinnerung an denselben auslöschen. Es ist mit diesem schroffen Uebergang eine gewisse psychische Arbeit verbunden. Deshalb wird uns nach dem *e*-dur-Dreiklange der mit ihm nahe verwandte *a*-dur-Dreiklang viel angenehmer und weniger überraschend berühren als der *es*-dur-Dreiklang, trotzdem *a* und *e*, was die absolute Tonhöhe anbetrifft, weiter aus einander liegen als *es* und *e*.

Wenn jedoch *es*-dur auf *e*-dur folgt, nachdem die Erinnerung an *e*-dur längst ausgelöscht ist, so wird gewiss nur Derjenige, der mit absolutem Tongefühl begabt ist, einen Unterschied zwischen *es*-dur und *e*-dur erkennen.

So lächerlich es ist, jeder Tonart einen ganz scharf ausgeprägten Charakter zuzuschreiben, wie dies von verschiedenen Autoren geschieht, z. B. in der Tonart *a*-dur Liebe, Frühlingswonne etc., dagegen in *as*-dur etwa bittern Ernst des Lebens zu erkennen, so falsch ist es, alle Tonarten durchaus als gleichbedeutend zu betrachten. Für Einen, der nur über relatives Tongehör verfügt, mag letzteres bis zu einem gewissen Grade zutreffen; für Denjenigen, dessen absolutes Tongehör sehr ausgebildet ist, ist es dagegen durchaus nicht gleichgültig, welche Tonarten auf ihn einwirken. — Der für diese Frage sich interessirende Leser sei auf das Buch von Hennig: Die Charakteristik der Tonarten (Berlin, Dümmler, 1897) verwiesen.

7. Eintheilung der Oktave in Unterabtheilungen. Die Quinte und ihre Umkehrung, die Quarte. Wir haben bisher das Tongebiet nur in Oktaven eingetheilt. Der nächste Schritt führt uns dazu, die Oktave in Unterabtheilungen zu theilen, dadurch gelangen wir zu den in der Musik gebräuchlichen Intervallen, die kleiner als eine Oktave sind. Jedes neue Intervall, das wir einführen, soll gleich durch seine aus der Erfahrung abgeleitete relative Tonhöhe oder die relative Schwingungszahl charakterisirt und streng definirt werden.

Die erste, nächstliegende Unterabtheilung, auf die wir stossen, ist die Quinte. Nehmen wir wieder die eingestrichene Oktave $\bar{c}$ — $\bar{\bar{c}}$, so ist $\bar{g}$ derjenige Ton, der als Quinte von $\bar{c}$ bezeichnet

wird. Wir haben durch die Einführung dieses neuen Tones gleichzeitig 2 neue Intervalle gewonnen, nämlich das Intervall zwischen $\bar{c}$ und $\bar{g}$, die Quinte, und das Intervall zwischen $\bar{g}$ und dem nächst höheren $\bar{\bar{c}}$, die sog. Quarte. Quinte und Quarte ergänzen sich gegenseitig zur Oktave. Man bezeichnet in der Musik die Quarte bekanntlich als „Umkehrung" der Quinte, und umgekehrt die Quinte als Umkehrung der Quarte.

Um ein Mass für diese beiden Intervalle zu gewinnen und diese nicht bloss durch ihren Namen, sondern durch ihr Wesen zu definiren, müssen wir uns wieder direkt an die Natur wenden, auf deren Befragung mit Hülfe des physikalischen Versuchs wir stets in letzter Linie angewiesen sind.

Wenn das $\bar{c}$ durch 261 Schwingungen in der Sekunde hervorgebracht wird, so entsprechen der Quinte $\bar{g}$, wie der Versuch zeigt, $391{,}5$ Schwingungen. Wir haben also für die

Töne	$\bar{c}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$
die Schwingungszahlen	261	$391{,}5$	522.

Hieraus können wir nach dem, was wir oben über die relative Tonhöhe bemerkten, unmittelbar die Verhältnisse ablesen, welche für die Intervalle der Quinte und Quarte charakteristisch sind. Wir finden für

die Quinte $\bar{c} - \bar{g}$ das Verhältniss $391{,}5 : 261 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$

die Quarte $\bar{g} - \bar{\bar{c}}$ „ „ $522 : 391{,}5 = 1{,}333\ldots = \frac{4}{3}$.

Wir haben oben schon bemerkt, dass bei der Messung eines Intervalls stets der höhere Ton auf den tieferen als Grundton bezogen wird und das Verhältniss der Schwingungszahl des höheren zu derjenigen des tieferen charakteristisch ist für das betreffende Intervall.

Wenn wir früher das Intervall einer Oktave durch die Zahl 2 darstellten, so sind wir nun berechtigt,

die Quinte durch den Bruch $\frac{3}{2}$ und
die Quarte „ „ „ $\frac{4}{3}$ darzustellen.

Das bedeutet in Worten: Um von irgend einem Tone zur nächst höheren Quinte zu gelangen, haben wir seine Schwingungszahl mit $\frac{3}{2}$ zu multipliziren. Um dagegen von einem Tone zur nächst höheren Quarte zu kommen, haben wir eine Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ auszuführen. Hierbei ist es völlig gleichgültig, in welcher Region des Tongebietes man diese Schritte ausführt. Haben wir als Grundton z. B. einen Ton von 600 Schwingungen, so kommen dessen Quarte 800, der Quinte 900 und der Oktave 1200 Schwingungen zu.

Dass die Quinte und Quarte sich zur Oktave ergänzen, ergibt sich aus den relativen Tonhöhen oder den relativen Schwingungszahlen durch die Beziehung $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$*). Setzen wir nämlich den Grundton gleich 1, so ist die Schwingungszahl der Quinte gleich $\frac{3}{2}$; gehen wir von der Quinte noch um eine Quarte nach oben, so entspricht das einer Multiplikation mit $\frac{4}{3}$. Durch diesen Schritt müssen wir zur Oktave des Grundtons, also zu 2 gelangen, und in der That ist $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$. Umgekehrt könnten wir, wenn wir nur die relativen Schwingungszahlen für die Oktave und die Quinte, d. h. 2 und $\frac{3}{2}$, kennen würden, daraus die relative Schwingungszahl für die Quarte, als der „Umkehrung" der Quinte, ableiten; diese muss nämlich gleich $2 : \frac{3}{2}$ sein, d. h. gleich $\frac{4}{3}$, wie oben direkt aus den absoluten Tonhöhen geschlossen wurde. Die Quarte von *c* wird in der Musik bekanntlich mit *f* bezeichnet.

Stellen wir die innerhalb einer Oktave liegenden Töne, die wir bisher gewonnen haben, nebst ihren absoluten und relativen Schwingungszahlen zusammen, so haben wir

Grundton	Quarte	Quinte	Oktave
$\bar{c}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$
261	348	391,5	522
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2

Die relativen Schwingungszahlen 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, 2 bleiben dieselben, von welchem Grundton man auch ausgehen mag. Nur die absoluten Schwingungszahlen sind natürlich von der Wahl des Grundtons abhängig.

8. Die natürliche grosse Terz und ihre Umkehrung, die kleine Sexte. — Gehen wir in der Eintheilung der Oktave wieder um einen Schritt weiter, indem wir das Intervall einführen, das man als „grosse Terz" zu bezeichnen pflegt. Um die relative Schwingungszahl für dieses Intervall zu finden, müssen wir uns noch einmal an den direkten physikalischen Versuch halten.

---

*) Derjenige Leser, der sich im Rechnen mit Brüchen nicht ganz heimisch fühlt, sei hier daran erinnert, dass 2 Brüche mit einander multiplizirt werden, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt und das Produkt der Zähler durch dasjenige der Nenner dividirt, z. B.: $\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{21}{8}$. Soll dagegen ein Bruch durch einen andern dividirt werden, so wird ersterer mit dem umgekehrten Divisorbruch multiplizirt, also z. B. $\frac{7}{4} : \frac{3}{2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.

Die grosse Terz von $\bar{c}$ bezeichnet man mit $\bar{e}$. Durch die Einführung dieses Tones gewinnen wir in der Oktave $\bar{c}$ — $\bar{\bar{c}}$ zwei neue Abschnitte, nämlich das Intervall $\bar{c}$ — $\bar{e}$, die grosse Terz, und das Intervall $\bar{e}$ — $\bar{\bar{c}}$, die sog. kleine Sexte.

Der Versuch ergibt für $\bar{e}$ die Schwingungszahl 326,25. Für die grosse Terz $\bar{c}$ — $\bar{e}$ findet man also die relative Schwingungszahl 326,25 : 261 = 5 : 4*), d. h. $\frac{5}{4}$, und für die kleine Sexte $\bar{e}$ — $\bar{\bar{c}}$ die relative Schwingungszahl 522 : 326,25 = 8 : 5*), d. h. $\frac{8}{5}$.

Von irgend einem Grundton ausgehend, gelangen wir also zu dessen grosser Terz dadurch, dass wir seine Schwingungszahl mit $\frac{5}{4}$ multipliziren, dagegen zu seiner kleinen Sexte durch Multiplikation mit $\frac{8}{5}$.

Da grosse Terz und kleine Sexte sich zur Oktave ergänzen, so muss natürlich auch hier $\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = 2$ sein und man könnte, ähnlich wie oben, aus Oktave und grosser Terz die relative Schwingungszahl der kleinen Sexte durch Division ableiten.

Die kleine Sexte von *c* wird in der Musik bekanntlich mit *as* bezeichnet.

9. Die experimentelle Messung von absoluten und relativen Schwingungszahlen mit Hülfe der Sirene. — Wie die Schwingungszahl eines Tones mit Hülfe einer Stimmgabel bestimmt werden kann, wurde in der Einleitung kurz angedeutet. In der Regel bedient man sich zur Bestimmung von Schwingungszahlen sog. „Sirenen". Die einfachste Form der Sirene besteht in einer kreisrunden, um ihren Mittelpunkt drehbaren Scheibe. Diese ist durchlöchert und zwar sind die Löcher in concentrischen Kreisen um den Mittelpunkt so angebracht, dass je zwei benachbarte Löcher desselben Kreises gleich weit von einander abstehen. Der innerste Kreis hat z. B. 8 Löcher, der nächste 10, der nächstfolgende 12 und der äusserste 16 Löcher. Wird nun ein Luftstrom gegen ein Loch der innersten Löcherreihe geblasen und die Scheibe in rasche Drehung versetzt, so wird der Luftstrom stets unterbrochen, sobald er nicht auf ein Loch, sondern auf einen Zwischenraum zwischen zwei Löchern stösst. Dies geschieht während einer Umdrehung der Scheibe offenbar 8 mal, es entstehen in Folge dessen 8 Schwingungen, und wenn die Scheibe z. B. 10 Umdrehungen in der Sekunde macht, 80 Schwingungen pro Sekunde. Die andern Löcherreihen würden unter denselben Bedingungen offenbar Töne

*) Siehe die Anmerkung auf S. 10.

von resp. 100, 120 und 160 Schwingungen geben. Es ergibt sich bei der praktischen Ausführung dieses Versuchs, dass die von den einzelnen Löcherreihen gelieferten Töne, wenn wir von der innersten Reihe bis zur äussersten fortschreiten, in dem Verhältniss von Grundton: gr. Terz: Quinte: Oktave stehen. Wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe sich verändert, so ändert sich zwar die absolute Höhe der einzelnen Töne, aber die Intervalle der von den einzelnen Löcherreihen gelieferten Töne bleiben dieselben, man hat stets einen reinen Dur-Dreiklang, allerdings mit wechselndem Grundton, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe sich verändert. Die absolute Schwingungszahl des Tones einer bestimmten Löcherreihe ist offenbar gleich der Zahl der Löcher dieser Reihe multiplizirt mit der Zahl der Umdrehungen pro Sekunde. Bei den zu genaueren Messungen verwandten Sirenen wird die Zahl der Umdrehungen durch ein Uhrwerk notirt. Auf diese Weise ergibt sich also die absolute Schwingungszahl. Die relativen Schwingungszahlen der Intervalle des Dur-Dreiklanges sind dagegen ganz unabhängig von der Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe, sie verhalten sich einfach wie die Zahlen der Löcher der einzelnen Löcherreihen, also wie 8 : 10 : 12 : 16 oder 4 : 5 : 6 : 8 oder $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} : 2$.

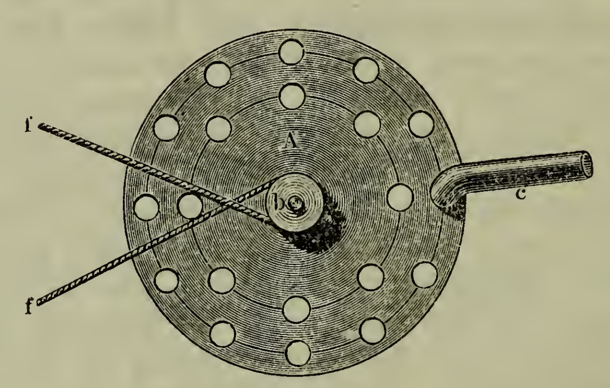


Fig. 1.

Die beistehende Figur stellt die allereinfachste Form einer Seebeck'schen Sirene mit 2 Löcherreihen dar. Die innere Reihe hat 8, die äussere 12 Löcher, es entspricht dies dem Verhältniss von Grundton zu Quinte. A ist die rotirende Scheibe, b die Axe derselben, c ein Röhrchen, durch welches ein Luftstrom gegen die äussere Löcherreihe geblasen wird, und f f ein Schnurlauf, mittels dessen die Scheibe in rasche Umdrehung versetzt wird.

10. Die kleine Terz und ihre Umkehrung, die grosse Sexte. — Von den sogenannten consonanten Intervallen inner-

halb des Gebietes einer Oktave fehlen uns noch zwei, nämlich die kleine Terz und deren „Umkehrung", die grosse Sexte. Die relativen Schwingungszahlen, durch welche diese Intervalle charakterisirt werden, könnten wir ebenfalls direkt aus dem Versuch ableiten. Indessen ist dies durchaus nicht nöthig; wir können die Intervalle der kleinen Terz und der grossen Sexte sehr leicht aus den Intervallen ableiten, die wir schon kennen und genau definirt haben.

Durch den Ton $\bar{e}$ wird nämlich das Quintenintervall $\bar{c}$ — $\bar{g}$ in 2 Intervalle, $\bar{c}$ — $\bar{e}$ und $\bar{e}$ — $\bar{g}$ getheilt; $\bar{c}$ — $\bar{e}$ ist die grosse, $\bar{e}$ — $\bar{g}$ dagegen eine kleine Terz. Die grosse und die kleine Terz ergänzen sich also zur Quinte. Das Intervall der kleinen Terz ergibt sich demnach aus dem Verhältniss der Quinte zu der grossen Terz:

$$\bar{g} : \bar{e} = \tfrac{3}{2} : \tfrac{5}{4} = \tfrac{6}{5}.$$

Die kleine Terz wird also durch die relative Schwingungszahl $\frac{6}{5}$ dargestellt. Dass die grosse Terz durch die kleine zur Quinte ergänzt wird, wird durch die Beziehung $\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$ zur Darstellung gebracht.

Die grosse Sexte endlich ergibt sich aus der Oktave und der kleinen Terz durch Division, da die grosse Sexte die kleine Terz zur Oktave ergänzt, d. h. die sog. „Umkehrung" der kleinen Terz ist. Wir finden also für die grosse Sexte das Verhältniss $2 : \frac{6}{5} = 10 : 6 = \frac{5}{3}$. Umgekehrt muss natürlich $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$ sein.

Ueberblicken wir die bisher gewonnenen Resultate und stellen wir die Intervalle nebst den sie charakterisirenden Zahlenverhältnissen oder relativen Schwingungszahlen zusammen, so haben wir die folgende Uebersicht:

Grundton	1
Oktave	2
Quinte	$\frac{3}{2}$
Quarte	$\frac{4}{3}$
Grosse Sexte	$\frac{5}{3}$
Grosse Terz	$\frac{5}{4}$
Kleine Terz	$\frac{6}{5}$
Kleine Sexte	$\frac{8}{5}$

Bei aufmerksamer Betrachtung dieser Uebersicht fällt es auf, dass (abgesehen von der kleinen Sexte, die als wenigst consonirendes Intervall gilt) alle obigen Intervalle durch die 6 ersten ganzen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 und ihre gegenseitigen Verhältnisse charakterisirt sind und

dass das Intervall um so wohlklingender ist, je einfacher die Zahlen sind, die dasselbe bestimmen. Es ist dies eine höchst merkwürdige Thatsache, welche schon den Philosophen des Alterthums wohl bekannt war und ihnen sowohl als manchen Philosophen des Mittelalters und der neueren Zeit Stoff zu mancherlei philosophischen Betrachtungen bot.

11. Beziehung zwischen den Schwingungszahlen und den Saitenlängen. Pythagoras und die Spekulationen der pythagoräischen Schule über den Zusammenhang zwischen den 6 ersten ganzen Zahlen und den consonirenden Intervallen. Die sog. Harmonie der Sphären. Der Leibniz'sche Ausspruch über die Musik. — Die Auffindung der einfachen Zahlenverhältnisse für die musikalischen Intervalle wird Pythagoras (circa 580—500 v. Chr.) zugeschrieben; indessen sprach man damals noch nicht von Schwingungszahlen im heutigen Sinne, sondern von Saitenlängen, die in einer sehr einfachen Beziehung zu den Schwingungszahlen stehen. Wird nämlich eine Saite, die einen bestimmten Grundton gibt, auf die Hälfte ($\frac{1}{2}$) ihrer Länge reduzirt, so lässt sie die nächst höhere Oktave (2) des Grundtons erklingen. Reduzirt man die ursprüngliche Saitenlänge auf $\frac{2}{3}$, so erhält man die Quinte ($\frac{3}{2}$) des Grundtons; bei einer Reduktion auf $\frac{3}{4}$ die Quarte ($\frac{4}{3}$), auf $\frac{4}{5}$ die grosse Terz ($\frac{5}{4}$), auf $\frac{5}{6}$ die kleine Terz ($\frac{6}{5}$) und auf $\frac{3}{5}$ die grosse Sexte ($\frac{5}{3}$) u. s. f. Ein Geiger kann diesen Versuch sehr leicht an seinem Instrumente vornehmen. Setzt er den Finger der Reihe nach auf Punkte der Saite, die um $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$ der ganzen Saitenlänge vom Sattel entfernt sind, so dass jeweilen nur der übrige, zwischen dem aufgesetzten Finger und dem Steg liegende Theil der Saite, also respektive $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ der Saitenlänge, zur Schwingung kommt, so erhält er entsprechend die Oktave, die Quinte, die Quarte, gr. Terz, kl. Terz und gr. Sexte desjenigen Tones, den die sog. leere Saite gibt. Hierbei wird freilich vollkommen gleichmässige Dicke der Saite vorausgesetzt. Jeder Violinspieler weiss, dass er bei ungleichmässiger Beschaffenheit der Saiten von den gewohnten Verhältnissen etwas abweichen, d. h. anders greifen muss, als er gewöhnt ist. — An diese einfachen Zahlenverhältnisse knüpften die Philosophen der pythagoräischen Schule allerlei phantastische Spekulationen. Sie nahmen an, dass die Abstände der sog. „Wandelsterne“ (der 5 damals bekannten Planeten: Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, wozu sie noch Sonne und Mond zählten) von einem grossen „Centralfeuer“ den einfachen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, und dass durch die Bewegung dieser Wan-

delsterne um ihr gemeinsames Centrum Töne entstehen, die mit einander consonirende Intervalle bilden. Auf diese Weise sollte eine „Harmonie der Sphären“ entstehen, eine Sphärenmusik, welche der Sterbliche nicht zu hören vermag, entweder weil sein Ohr nicht fein genug ist oder weil er an diesen Klang gewöhnt ist.

Von Aussprüchen neuerer Philosophen über den Zusammenhang der consonanten Intervalle mit den 6 ersten ganzen Zahlen sei hier folgender von Leibniz (1646—1716) erwähnt. Leibniz sagt (Epist. ad divers. T. I pag. 154): „Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi ..... Errant qui nihil in anima fieri putant, cujus ipsa non sit conscia. Anima igitur, etsi se numerare non sentiat, sentit tamen hujus numerationis insensibilis effectum, seu voluptatem in consonantiis, molestiam in dissonantiis inde resultantem.“ (Die Musik ist für die Seele eine verborgene arithmetische Uebungsaufgabe, wobei die Seele zählt ohne es selbst zu wissen ..... Es irren diejenigen, welche glauben, es könne in der Seele nichts vorgehen, dessen sie sich selbst nicht bewusst sei. Obschon die Seele es nicht bemerkt, dass sie zählt, so fühlt sie somit dennoch die Wirkung dieser unbewussten Zählung, d. h. bei den Consonanzen das Vergnügen, bei den Dissonanzen das Missfallen, das daraus hervorgeht.) — Legt man in diesem Leibniz'schen Ausspruche den Nachdruck auf das „exercitium arithmeticae“, das „Rechenexempel“, so kann man es den Musikern nicht verargen, wenn sie diesen Standpunkt nicht theilen. Wenn es sogar den poetischen Sinn Goethe's verletzte, den allbelebenden Sonnenstrahl durch das Prisma in seine Bestandtheile zerlegt zu sehen, so kann man es dem Komponisten und dem Künstler nicht übelnehmen, wenn ihm der Leibniz'sche Standpunkt gar zu nüchtern und trocken erscheint. Die Musik als Kunst ist gewiss ebensowenig ein reines Rechenexempel, als die Architektur in höherem Sinne eine rein geometrische Uebungsaufgabe ist. Das rein Aesthetische der Kunst darf nicht übersehen werden. Aber wie sich auch der prachtvollste Bau aus Bausteinen zusammensetzt, die nach genau bestimmten geometrischen Verhältnissen behauen und zusammengefügt sind, so baut sich auch die wundervollste Musik aus Tönen auf, die in ihren gegenseitigen Verhältnissen ganz bestimmte, mehr oder weniger einfache arithmetische Gesetze erkennen lassen. Und wie der Architekt von der Beschaffenheit des Materials, aus dem er sein Gebäude aufführt, genaue Kenntniss haben muss, so ist es eines gebildeten Musikers mindestens würdig, sich Klarheit zu verschaffen über das Material, das ihm zur Darstellung seiner Kunstformen dient, d. h. über die Eigen-

schaften und Gesetze des musikalischen Tones und der Verbindung von Tönen. — In wesentlich anderem Lichte erscheint der Leibniz'sche Ausspruch, wenn man nicht von der Musik schlechthin, sondern von dem rein elementaren Wohllaut oder Missklang einzelner Intervalle und Akkorde spricht, und dabei den Nachdruck auf das „nescientis se numerare animi", d. h. auf die der Seele unbewusste Einwirkung der Zahl legt. Der in dieser Weise aufgefasste Leibniz'sche Standpunkt hat auch heute noch seine Berechtigung; die später zu besprechende Helmholtz'sche Theorie der Consonanz und Dissonanz stimmt in ihren Resultaten wenigstens im Grossen und Ganzen damit überein; und wenn sie auch nicht überall so weit reicht, wie die Leibniz'sche Theorie, so ist andererseits nicht zu vergessen, dass letztere selbst wieder einer psychologischen oder physiologischen Begründung bedarf.

12. Bildung der natürlich-harmonischen Durtonleiter mit Hülfe der 3 reinen Dreiklänge der Tonika, der Dominante und der Unter-Dominante. — Wir sind nun im Stande, mit leichter Mühe diejenigen Tonleitern aufzubauen, die sich auf harmonische Grundsätze stützen und die von der modernen Musiktheorie als Grundlagen unseres heutigen Musiksystems aufgefasst werden. Wir entwickeln diese Tonleitern rein objektiv und behalten uns eine kritische Besprechung derselben und eine Vergleichung zwischen der Theorie und der künstlerischen Praxis für später vor.

Zum harmonischen Aufbau der sog. natürlichen Dur- und Moll-Tonleitern bedürfen wir nur der Intervalle der Oktave, der Quinte und der grossen Terz.

Gehen wir von $\bar{c}$ als Grundton aus und nehmen wir dessen grosse Terz und Quinte, so haben wir den Dreiklang

$$\begin{matrix} \bar{c} & \bar{e} & \bar{g} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2}, \end{matrix}$$

der in der Musik bekanntlich als Dur-Dreiklang bezeichnet wird. Diesen Akkord betrachtet man als den Grund-Akkord der Tonart *c*-dur. Vom Standpunkt dieser Tonart aus nennt man *c* den Grundton oder die Tonika, und der Dur-Dreiklang *c e g* heisst der „Tonika-Dreiklang von *c*-dur".

Von der Tonika $\bar{c}$ gehen wir nun einerseits um eine Quinte aufwärts nach $\bar{g}$, andererseits um eine Quinte abwärts nach *f*. Man nennt $\bar{g}$ die Ober-Dominante oder kurzweg die Dominante von $\bar{c}$; *f* dagegen ist die Unter-Dominante.

Wir können nun sowohl über der Ober-Dominante als über

der Unter-Dominante einen Dur-Dreiklang aufbauen; dadurch gelangen wir zu den beiden Dreiklängen $\bar{g}\ \bar{h}\ \bar{\bar{d}}$ und $f\ a\ \bar{c}$, von denen der erste Dominant-Dreiklang, der zweite Unterdominant-Dreiklang heisst. Die relativen Schwingungszahlen, welche den einzelnen Tönen dieser Dreiklänge zukommen, sind nun sehr leicht zu finden. Von der Dominante $\bar{g} = \frac{3}{2}$ gelangen wir zu deren grosser Terz $\bar{h}$ durch Multiplikation mit $\frac{5}{4}$, also $\bar{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, dagegen zu deren Quinte $\bar{\bar{d}}$ durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, also $\bar{\bar{d}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$. Dieses $\bar{\bar{d}}$ liegt schon ausserhalb der eingestrichenen Oktave, von deren Grundton $\bar{c}$ wir ausgegangen sind. Durch einen Oktavenschritt abwärts kann dieses $\bar{\bar{d}} = \frac{9}{4}$ in die eingestrichene Oktave, nach $\bar{d}$, verlegt werden. Diesem Oktavenschritt abwärts entspricht aber eine Division durch 2, wir erhalten somit: $\bar{d} = \frac{9}{8}$.

Die Unterdominante f erhielten wir durch einen Quintenschritt von $\bar{c}$ aus abwärts; diesem Schritte entspricht eine Division durch $\frac{3}{2}$. Es ist somit $f = 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$.

Aus f erhalten wir a als grosse Terz von f durch Multiplikation mit $\frac{5}{4}$, also $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$, und $\bar{c}$ als Quinte von f durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, also $\bar{c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

Dadurch, dass wir den Unterdominant-Dreiklang $f\ a\ \bar{c}$ um eine Oktave nach oben verlegen, was einer Multiplikation mit 2 entspricht, erlangen wir, dass f und a in die eingestrichene Oktave, nach $\bar{f}$ und $\bar{a}$ zu liegen kommen, während $\bar{c}$ sich in $\bar{\bar{c}}$ verwandelt. Es wird dann also $\bar{f} = \frac{4}{3}$, $\bar{a} = \frac{5}{3}$ und $\bar{\bar{c}} = 2$.

Hiermit haben wir alle Tonstufen der (sog. diatonischen) Dur-Tonleiter gewonnen. Ordnen wir dieselben nach ihrer Höhe, so erhalten wir die folgende Uebersicht:

$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{e}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{a}$	$\bar{h}$	$\bar{\bar{c}}$
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2.

Wir nennen diese Tonleiter — zum Unterschied von andern nach einem andern Prinzip aufgebauten Leitern — die natürlich-harmonische *c*-Durtonleiter.

Die eben gewonnenen Zahlenverhältnisse für die Stufen der Durtonleiter sind, da sie ja relative Schwingungszahlen sind, nicht nur gültig für die spezielle Tonleiter $\bar{c}$-dur. Hätten wir irgend einen andern Ton als $\bar{c}$ zum Ausgangspunkt genommen, so wären wir genau zu denselben Zahlenverhältnissen gelangt. Diese sind charakteristisch für jede Durtonleiter.

Wir bemerken an dieser Stelle ferner, dass es uns in der Regel auf eine Versetzung irgend eines Tones um eine oder mehrere Oktaven nach oben oder nach unten nicht ankommt. Zwei Töne, die sich nur um eine oder mehrere Oktaven von einander unterscheiden, betrachten wir, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, als gleichbedeutend. In der Sprache der Musik drückt sich dies ja auch dadurch aus, dass zwei Töne, die sich nur durch eine oder mehrere Oktaven von einander unterscheiden, die gleiche Bezeichnung tragen, d. h. mit demselben Buchstaben benannt sind.

13. Einführung einer Darstellungsart, welche den harmonischen Zusammenhang zweier und mehrerer Töne direkt erkennen lässt. Schema für den reinen Dur-Dreiklang und für die mit Hülfe reiner Durklänge aufgebaute Durtonleiter. Die Quinte der 2. Stufe dieser Leiter ist um das Intervall $\frac{81}{80}$ zu klein. — Es stellt sich nun als äusserst zweckmässig und die Uebersicht wesentlich erleichternd heraus, bei den weitern Entwicklungen eine (rein äusserliche) Darstellungsart einzuführen, die ohne Rechnung es dem Auge ermöglicht, direkt zu erkennen, in welchem Zusammenhange die Töne zu einander stehen. Eine solche Darstellungsart wurde eingeführt von dem Japaner Shohé Tanaka*) und in ausgiebiger und fruchtbringender Weise angewandt u. A. von Karl Eitz**) in Eisleben. Sie besteht in Folgendem:

Töne, die um Quintenschritte von einander abstehen, werden in eine horizontale Reihe neben einander gestellt in der Weise, dass ein Schritt von links nach rechts stets einem Schritt um eine Quinte aufwärts entspricht. Von *c* ausgehend haben wir somit die Quintenreihe: *c g d a e h fis cis gis* u. s. f.

Einem Schritte von rechts nach links entspricht stets ein Schritt um eine Quinte abwärts, oder, da es uns ja auf Oktavenunterschiede nicht ankommt, um eine Quarte aufwärts. Verlängern wir obige Reihe nach links, indem wir von *c* aus in Quintenschritten abwärts schreiten, so erhalten wir folgende, nach beiden Richtungen hin unbegrenzte Quintenreihe:

. . . . *fes ces ges des as es b f c g d a e h fis cis gis* . . . .

Von den auf solche Weise gewonnenen Tönen sind nun die-

---

*) Shohé Tanaka, Studien im Gebiete der reinen Stimmung. Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1890.

**) Karl Eitz, das mathematisch reine Tonsystem. Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1891.

jenigen scharf zu sondern, welche auf andere Weise als durch Quinten- oder Quartenschritte gewonnen wurden.

Den Tonika-Dreiklang von *c*-dur z. B. stellen wir in der Weise dar, dass wir *e*, die natürliche grosse Terz von *c*, zwischen *c* und *g* in erhöhter Stellung hinschreiben, also: $\begin{smallmatrix} & e & \\ c & & g \end{smallmatrix}$

In derselben Weise werden wir überhaupt jeden Durdreiklang darstellen, also z. B. den Dominant-Dreiklang in *c*-dur durch das Symbol $\begin{smallmatrix} & h & \\ g & & d \end{smallmatrix}$ und den Unterdominant-Dreiklang durch das Symbol $\begin{smallmatrix} & a & \\ f & & c \end{smallmatrix}$. Die 3 Symbole $\begin{smallmatrix} & a & \\ f & & c \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & e & \\ c & & g \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & h & \\ g & & d \end{smallmatrix}$ stellen also, zusammen vereinigt, die Tonart *c*-dur dar. Drücken wir diese Vereinigung auch äusserlich aus, indem wir diese 3 Dreiklänge an einander ketten, so ist *c*-dur auf äusserst klare Weise durch folgende Zusammenstellung gekennzeichnet:

$$\begin{matrix} & a & & e & & h & \\ f & & c & & g & & d. \end{matrix}$$

Wir können aus dieser Darstellungsart folgende Schlüsse ziehen:

f c g d stellen gemäss ihrer Definition und entsprechend ihrer Stellung in derselben Horizontalreihe eine fortlaufende Quintenreihe dar, mit den 3 Quinten *f*—*c*, *c*—*g* und *g*—*d*. Aber auch die Töne der oberen Horinzontalreihe *a e h* müssen um reine Quinten von einander abstehen. Ist man schon geneigt, aus ihrer Stellung in derselben Horizontalreihe diesen Schluss zu ziehen, so ergibt es sich noch klarer aus der Ueberlegung, dass *f* und *c* eine reine Quinte bilden, und *a* und *e*, als gleichweit abstehend von *f*, resp. *c*, ebenfalls eine reine Quinte bilden müssen, ein Schluss, der ebenso auf das Verhältniss zwischen *e* und *h* anwendbar ist. Wollen wir uns aber auch mit dieser Ueberlegung nicht zufrieden geben, so können wir uns an die relativen Schwingungszahlen halten, die wir für die Töne der natürlich-harmonischen Durtonleiter fanden. Aus $e = \frac{5}{4}$ und demjenigen *a*, das wir als grosse Terz der Unterdominante $f = \frac{2}{3}$ ursprünglich gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$ fanden, ergibt sich für das Intervall *a*—*e* der Bruch $\frac{5}{4} : \frac{5}{6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, also in der That die reine Quinte, und ebenso zwischen $h = \frac{15}{8}$ und $e = \frac{5}{4}$ das Verhältniss $\frac{3}{2}$.

Dagegen fällt es auf, dass die Töne *d* und *a*, von denen man anzunehmen pflegt, dass sie eine reine Quinte mit einander

bilden, nicht in derselben Horizontalreihe liegen, sondern eine gegenseitige Lage haben, die durch das Symbol

$$\begin{matrix} a & . & . & \\ & . & . & . & d \end{matrix}$$

gekennzeichnet ist. Und in der That, wenn wir die beiden Töne *d* und *a* nehmen, die innerhalb der von *c* aufsteigenden Oktave liegen, so finden wir aus $a = \frac{5}{3}$ und $d = \frac{9}{8}$ das Verhältniss $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27}$, das kleiner ist als eine reine Quinte $\frac{3}{2}$; denn es ist $\frac{3}{2} : \frac{40}{27} = \frac{81}{80}$, d. h. die reine Quinte ist um das Intervall $\frac{81}{80}$ grösser als das Intervall *d—a*. Nennen wir gemäss der in der Musik üblichen Ausdrucksweise *d* die zweite und *a* die sechste Stufe von *c*-dur, so können wir also sagen: Die zweite und die sechste Stufe der natürlich-harmonischen Durtonleiter bilden mit einander keine reine Quinte, sondern ein Intervall, das um $\frac{81}{80}$ kleiner ist als eine solche.

Die oben für die *c*-dur-Tonleiter aufgestellte symbolische Art der Darstellung bewährt sich also auch dadurch, dass sie das Auge auf Eigenthümlichkeiten aufmerksam macht, die man sonst nur auf dem Wege der Rechnung finden könnte.

Wir haben in *c*-dur 5 reine Quinten, nämlich *c—g*, *g—d*, *f—c*, *a—e* und *e—h*. Wir finden reine Quinten auf der ersten, dritten, vierten, fünften und sechsten Stufe der Tonart, eine um das Intervall $\frac{81}{80}$ zu kleine Quinte auf der zweiten und eine sog. verminderte Quinte *h—f* auf der siebenten Stufe. —

14. Das Schema für den Moll-Dreiklang. Der Dreiklang der 2. Stufe der natürlich-harmonischen Durtonleiter ist kein reiner Moll-Dreiklang. Der Moll-Dreiklang als Spiegelbild des Dur-Dreiklanges. — Ueber die drei in der Durtonart vorkommenden Dur-Dreiklänge, die uns zum Aufbau der Tonleiter dienten, sind wir im Klaren. Wir erkennen aber nun auch aus der oben gegebenen bildlichen Darstellung von *c*-dur, welche Form den Moll-Dreiklängen zukommt und welche Moll-Dreiklänge in *c*-dur enthalten sind.

Jeder Moll-Dreiklang baut sich nach den Gesetzen der Musiktheorie bekanntlich aus einer natürlichen kleinen Terz und einer Quinte, vom Grundton aus gerechnet, auf.

Die kleine Terz haben wir schon im *c*-dur-Dreiklange als Intervall zwischen *e* und *g* vorgefunden. Der *c*-dur-Dreiklang wurde durch das Symbol

$$\begin{matrix} & e & \\ c & & g \end{matrix}$$

dargestellt. Die grosse Terz zwischen *c* und *e* erschien darin in der Form ${}_{c}{}^{e}$, die kleine Terz zwischen *e* und *g* dagegen in der Form ${}^{e}{}_{g}$. Diese beiden Formen unterscheiden sich äusserlich wesentlich von einander und sind charakteristisch für die Intervalle der grossen, resp. kleinen Terz, ebenso wie für das Intervall der Quinte die Nebeneinander-Stellung kennzeichnend war, wie *c g, g d, a e, e h* u. s. f. Da der Moll-Dreiklang sich, vom Grundton aus gerechnet, aus kleiner Terz und Quinte aufbaut, so kommt ihm also, wenn wir z. B. von *e* als Grundton ausgehen, die folgende Darstellung zu:

e   *h*

  g

denn ${}^{e}{}_{g}$ ist eine kleine Terz, *e h* eine Quinte und ${}_{g}{}^{h}$ eine grosse Terz, wie es beim Moll-Dreiklang sein muss.

In dem oben aufgestellten Schema für die *c*-dur-Tonleiter

  a   *e*   *h*

f   *c*   *g*   *d*

finden wir demnach 2 Moll-Dreiklänge vor, nämlich den eben aufgestellten

e   *h*

  g

als sog. Dreiklang der 3. Stufe, und den ebenso aufgebauten Moll-Dreiklang

a   *e*

  c

als Dreiklang der 6. Stufe von *c*-dur.

Man pflegt in der Regel in der Harmonielehre auch den auf der 2. Stufe von *c*-dur, d. h. auf *d* errichteten, aus den Tönen *d, f, a* bestehenden Dreiklang als Moll-Dreiklang aufzufassen und als Dreiklang der 2. Stufe zu bezeichnen.

Wir wissen aber nun, dass das *d* und *a* der natürlich-harmonischen *c*-dur-Tonleiter keine reine Quinte mit einander bilden und dass somit der sog. Dreiklang der 2. Stufe kein reiner Moll-Dreiklang im eigentlichen Sinne des Wortes ist. In unserem Schema zeigt dieser Dreiklang auch ein wesentlich anderes Bild, nämlich

  a   .   .

f   .   .   *d*,

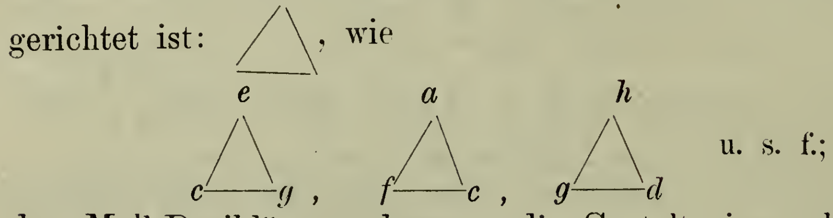
wobei diejenigen Töne des *c*-dur-Schemas, die nicht zum Akkord gehören, durch Punkte markirt sind.

Der sog. Dreiklang der 7. Stufe wird wegen der verminderten Quinte *h*—*f* als verminderter Dreiklang bezeichnet. Ihm kommt das folgende Bild zu:

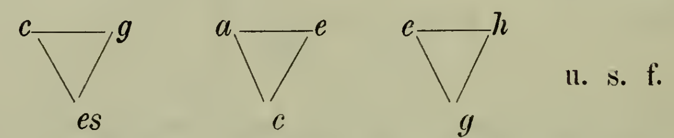
. . *h*

f . . *d*.

Nur den eigentlichen, gesetzmässigen oder, wie man sich ausdrücken könnte, regulären Dur- und Moll-Dreiklängen kommen also die einfachen, gefälligen Darstellungsformen zu, die wir oben kennen lernten. Den Dur-Dreiklängen entspricht immer die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Spitze nach oben gerichtet ist:



den Moll-Dreiklängen dagegen die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Spitze abwärts gerichtet ist: ▽, wie



Der Moll-Dreiklang erscheint bei dieser Art der Darstellung als Spiegelbild des Dur-Dreiklanges und umgekehrt.

15. Die Molltonleitern der Musiktheorie in den drei üblichen Formen: harmonisch, aufsteigend melodisch und absteigend melodisch. — Die Gesammtheit aller Durtonleitern und der durch sie dargestellten Tonarten fasst man unter der Bezeichnung „Dur-Geschlecht" zusammen. In diesem Sinne können wir sagen, dass die für die *c*-dur-Tonleiter und die Durtonleitern überhaupt aufgestellte Darstellungsform für das Dur-Geschlecht typisch ist. Die vorgetragenen Lehren geben uns nun aber auch das Mittel an die Hand, um die entsprechende bildliche Darstellung für das Moll-Geschlecht, d. h. den für die Gesammtheit aller Moll-Tonarten charakteristischen Typus zu finden.

Die Musiktheorie gibt die Molltonleitern, z. B. *c*-moll, in 3 verschiedenen Formen:

1. In der für die Harmoniebildung zweckmässigsten Form

als sog. harmonische Molltonleiter. Aehnlich wie die Durtonleitern, so lassen sich auch die Molltonleitern aus 3 Grund-Akkorden aufbauen, nur werden wir es bei den Molltonleitern statt mit Dur-Dreiklängen naturgemäss mehr mit Moll-Dreiklängen zu thun haben. In der Durtonleiter waren es die 3 Dreiklänge der Tonika, der Dominante und der Unter-Dominante, d. h. die Dreiklänge der 1., 5. und 4. Stufe, die wir zum Aufbau der Leiter verwendeten. Bei der Molltonleiter sind es dieselben Dreiklänge, die man braucht, nur mit dem Unterschiede, dass zunächst der Dreiklang der 1. Stufe, der Tonika-Dreiklang, als Grundpfeiler der Tonart, ein Moll-Dreiklang sein muss, nämlich $\begin{smallmatrix} c & & g \\ & es & \end{smallmatrix}$; ebenso ist der Dreiklang der Unter-Dominante, der 4. Stufe, ein Moll-Dreiklang: $\begin{smallmatrix} f & & c \\ & as & \end{smallmatrix}$. Was dagegen den Dominant-Dreiklang, den Dreiklang der 5. Stufe anbetrifft, so verlangt die Harmoniebildung hier statt eines Moll-Dreiklanges einen Dur-Dreiklang (siehe unter No. 16), nämlich $\begin{smallmatrix} & h & \\ g & & d \end{smallmatrix}$. Dieser Dreiklang ist den beiden Tonarten *c*-dur und *c*-moll gemeinsam. Die harmonische Molltonleiter baut sich also aus den 3 Dreiklängen $\begin{smallmatrix} f & & c \\ & as & \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} c & & g \\ & es & \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & h & \\ g & & d \end{smallmatrix}$ auf und wird demgemäss durch das Bild

$$\begin{matrix} & & & & & h & \\ f & & c & & g & & d \\ & as & & es & & & \end{matrix}$$

dargestellt. Ordnen wir die Töne nach ihrer Höhe, so erhalten wir die Stufenleiter

$$c,\ d,\ es,\ f,\ g,\ as,\ h,\ c.$$

Die relativen Schwingungszahlen der einzelnen Töne ergeben sich ganz ebenso wie bei der Durtonleiter, nur mit dem Unterschiede, dass bei den Moll-Dreiklängen die grosse Terz $\frac{5}{4}$ durch die kleine Terz $\frac{6}{5}$ zu ersetzen ist. Es ist also

für den Moll-Dreiklang $\begin{smallmatrix} c & & g \\ & es & \end{smallmatrix}$: $c = 1;\ es = \frac{6}{5};\ g = \frac{3}{2}$

" " " $\begin{smallmatrix} f & & c \\ & as & \end{smallmatrix}$: $f = \frac{2}{3};\ as = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{5};\ c = 1,$

oder, wenn wir *f*, *as* und *c* in die höhere Oktave verlegen: $f = \frac{4}{3},\ as = \frac{8}{5},\ c = 2.$

Für die 3 Töne des Dominant-Dreiklanges $g\overset{h}{\quad}d$ haben wir natürlich dieselben Schwingungszahlen, die wir schon oben fanden, nämlich

$$g = \tfrac{3}{2};\ h = \tfrac{15}{8};\ d = \tfrac{9}{8}.$$

Wir können also die harmonische Molltonleiter sammt den zugehörigen Schwingungszahlen hinschreiben *):

c	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*h*	*c*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

2. Die zweite von der Theorie gegebene Form der Molltonleiter ist die sogenannte aufsteigende „melodische" Molltonleiter. Wenn die eben entwickelte harmonische Molltonleiter gesungen oder gespielt wird, so berührt der Uebergang von *as* nach *h* (der sog. übermässige Sekundschritt), und umgekehrt von *h* nach *as*, befremdend, das Intervall *as*—*h* ist schwer zu treffen ($h : as = \frac{15}{8} : \frac{8}{5} = \frac{75}{64}$), weshalb bei der melodischen Stimmführung dieser Schritt im strengen Style verboten ist. Man nähert deshalb das *as* dem *h* dadurch, dass man es nach *a* erhöht. D. h. man verwandelt den Unterdominant-Dreiklang $f\underset{as}{\quad}c$ in den entsprechenden Dur-Dreiklang $f\overset{a}{\quad}c$. Das Symbol für die aufsteigende melodische Molltonleiter nimmt demnach die folgende Gestalt an:

$$\begin{matrix} & a & & h & \\ f & & c & & g & & d \\ & & & es & \end{matrix}$$

und die melodische aufsteigende Molltonleiter wird, wenn in der harmonischen $as = \frac{8}{5}$ durch $a = \frac{5}{3}$ ersetzt wird:

c	*d*	*es*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2.

3. Bei der dritten Form, in welcher die Molltonleiter nach der üblichen Theorie erscheint, bei der sog. absteigenden „melodischen" Molltonleiter, vermeidet man den übermässigen Sekundschritt *as*—*h* nicht durch Erhöhung des *as*, sondern durch Erniedrigung des *h* nach *b*. Man verwandelt also den Dur-Dreiklang $g\overset{h}{\quad}d$ in den entsprechenden Moll-Dreiklang $g\underset{b}{\quad}d$,

*) Der Leser wird wohl zu unterscheiden wissen, wo die Nebeneinander-Stellung der Tonbezeichnungen symbolische Bedeutung hat und Quintenverwandtschaft andeutet, und wo dies nicht der Fall ist. In zweifelhaften Fällen wird übrigens künftig durch Anwendung von Exponenten jede Zweideutigkeit beseitigt werden (siehe N. 19).

während der Moll-Dreiklang der harmonischen Tonleiter $\begin{matrix} f & & c \\ & as & \end{matrix}$ beibehalten wird. Daraus ergibt sich für die absteigende melodische Molltonleiter das Symbol:

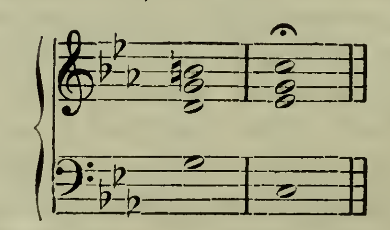
$$\begin{matrix} f & & c & & g & & d \\ & as & & es & & b & \end{matrix}\ .$$

Für den neu eingeführten Ton *b*, als kleine Terz ($\frac{6}{5}$) von *g*, ergibt sich die relative Schwingungszahl $b = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$. Da die absteigende melodische Molltonleiter, wie der Name sagt, nur in absteigender Richtung gebraucht wird, so schreiben wir auch die Tonleiter nebst zugehörigen Schwingungszahlen in absteigender Richtung hin:

$$\begin{matrix} c & b & as & g & f & es & d & c \\ 2 & \frac{9}{5} & \frac{8}{5} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{5} & \frac{9}{8} & 1. \end{matrix}$$

16. Der Leitton und das Prinzip der Tonalität. — Im Durgeschlecht spielt die sog. grosse Septime der Tonart, in *c*-dur speziell das *h* als grosse Septime der Tonika *c* eine ganz eigenthümliche Rolle. Wenn man irgend eine in *c*-dur gehende Melodie singt oder spielt, welche in aufsteigender Richtung nach *h* führt, so wird man, bei dem *h* angelangt, unwillkürlich das Bedürfniss empfinden, von *h* den kleinen Schritt nach dem unmittelbar daneben liegenden *c* als dem Grundton der Tonart zu machen. Das *h* leitet, ja drängt geradezu nach der Tonika *c* hin und wird aus diesem Grunde in der Harmonielehre als Leitton von *c*-dur bezeichnet. Der Leittonschritt *h*—*c* wird gemäss der entwickelten Theorie durch das Zahlenverhältniss $c : h = 2 : \frac{15}{8} = \frac{16}{15}$ charakterisirt, das man als grossen Halbton zu bezeichnen pflegt; er ist der kleinste Tonschritt, der in den nach harmonischem Prinzip konstruirten Tonleitern vorkommt. — Im Alterthum und während eines grossen Theiles des Mittelalters empfand man nicht oder nur in sehr geringem Masse das Bedürfniss, in der Tonleiter einem bestimmten Tone eine Art von Oberherrschaft zuzuerkennen, in der Tonart ein Centrum, eine Tonika anzunehmen, auf die man die einzelnen Töne der Leiter bezieht. Dieses Bedürfniss und das sog. „Prinzip der Tonalität“, das in der Anerkennung der Oberherrschaft der Tonika als des bindenden Mittelgliedes für alle Töne der Tonart besteht, hat sich nur sehr langsam und allmählich entwickelt und die Zeit dieser Entwicklung lässt sich schwer abgrenzen, da bei den verschiedenen Völkern der Entwicklungsprozess sich zu verschiedenen Zeiten abspielte, ja vielleicht zum Theil noch heute bei einzelnen sich abspielt. Bei der Musik der civilisirten Völker ist jedoch heutzutage das Prinzip

der Tonalität so feststehend und unbestritten, dass Derjenige, der in diesem Prinzip auferzogen wurde, Mühe hat sich auf einen andern Standpunkt zu stellen. — Mit der Entwicklung des Tonalität-Prinzips ist die Einführung des Leittons in innigem Zusammenhange. Trotzdem in vielen sog. Kirchentonarten des Mittelalters an Stelle der grossen Septime eine kleine stand, also ein Leitton zur Tonika fehlte, so fingen die Sänger doch schon früh an, die kleine Septime in die grosse zu verwandeln, um dadurch einen Leitton zu gewinnen. Diesem Bestreben vermochte auch ein Erlass des Papstes Johannes XXII. vom Jahre 1322 nicht Einhalt zu gebieten; man verzichtete einfach darauf, bei der Notirung die Erhöhung der kl. Septime anzuzeigen, hielt aber beim Gesange in aufsteigender Bewegung doch an der Erhöhung der Septime, d. h. am Leitton fest *). — Aus diesem Bedürfniss ist es herzuleiten, weshalb in der aufsteigenden „melodischen" Molltonleiter an *h* als dem Leitton festgehalten und der übermässige Sekundschritt durch Erhöhung des *as*, und nicht, wie bei der absteigenden, durch Erniedrigung des *h* vermieden wird. Bei absteigender Bewegung dagegen macht sich kein derartiges Bedürfniss geltend; das *b* und das *as* kann man bei absteigender Bewegung als Stufen der Tonleiter gelten lassen (wenn man von feineren später zu besprechenden Tonschattirungen absieht). — Der beim Aufbau der harmonischen Molltonleiter befremdende Umstand, dass an Stelle des Moll-Dreiklangs der 5. Stufe $g \; {}_{b} \; {}^{d}$ der entsprechende Dur-Dreiklang verwendet wird, nämlich $g \; {}^{h} \; d$, erklärt sich ebenfalls aus dem Bedürfniss nach dem Leitton *h*, der bei der Bildung des sog. authen-



tischen Schlusses als unentbehrlich erscheint.

17. Die sog. tonale Gruppe. Die Erweiterung derselben nach rechts und nach links zu drei parallel laufenden unbegrenzten Quintenreihen. Das syntonische Komma als Unterschied der gleichnamigen Töne zweier benachbarter Reihen. — Ueberblicken wir die für die Durtonleiter und für die 3 verschiedenen Arten der Molltonleiter ge-

*) Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. 4. Aufl. S. 465.

fundenen Bildformen, so erkennen wir, dass alle diese Formen gleichzeitig in der folgenden übersichtlichen und symmetrischen symbolischen Gestalt vereinigt sind:

a e h
f c g d
as es b

Diese Gruppe nennt Eitz: „die tonale Gruppe von *c*“ und die äussere Art der Darstellung das „Abbild“ der tonalen Gruppe.

Die Gruppe besteht aus 3 horizontalen Quinten-Reihen, der oberen *a e h*; der mittleren *f c g d*, und der unteren *as es b*. Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, jede dieser drei Quintenreihen sowohl nach rechts als nach links fortzusetzen, wobei man soweit gehen kann als man will. Dadurch erhalten wir die folgenden drei Reihen:

. . . . *b f c g d a e h fis cis gis dis* . . . .
. . . . *ges des as es b f c g d a e h fis* . . . .
. . . . *bb fes ces ges des as es b f c g d* . . . .

Bei aufmerksamer Betrachtung dieser drei Reihen fällt es auf, dass wir die Töne *b f c g d* in jeder der drei Reihen finden und zwar in derselben Reihenfolge, und es ist einleuchtend, dass wir noch mehr gemeinsame Töne finden würden, wenn wir jede der drei Reihen weit genug verlängern würden. Die gleichnamigen Töne zweier Reihen erscheinen nur gegen einander um eine bestimmte Strecke verschoben.

Es fragt sich nun: Sind die gleichnamigen Töne zweier verschiedener Reihen, abgesehen von etwaigen Oktavenunterschieden, gleich hoch? Wie verhält sich z. B. das *e* der ersten Reihe zu demjenigen der zweiten? Und wie dieses wiederum zu dem *e* der dritten Reihe?

Diese Frage ist durch eine leichte Rechnung rasch zu erledigen. Nehmen wir das *c* der mittleren Reihe als Ausgangspunkt, so bildet zunächst das *c* der obersten Reihe, gemäss Definition, zu *c* eine grosse Terz, also $e = \frac{5}{4}$ (wenn das *c* der mittleren Reihe $= 1$ ist). Von dem Ausgangspunkte *c* gelangen wir andererseits zu dem *e* der mittleren Reihe durch 4 Quintenschritte *c g d a e*. Demnach muss dieses $e = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = (\frac{3}{2})^4$, d. h. gleich $\frac{81}{16}$ werden. Versetzen wir aber dieses *e*, um es mit der grossen Terz von *c* zu vergleichen, um 2 Oktaven abwärts, was einer 2maligen Division durch 2 entspricht, so finden wir für das *e* der mittleren Reihe $e = \frac{81}{64}$. Dieses neue *e* nennt man die pythagoräische grosse Terz von *c*, während

das *e* der obersten Reihe, $e = \frac{5}{4}$, die natürliche grosse Terz von *c* genannt wird. Die pythagoräische grosse Terz ist grösser als die natürliche, und es ergibt sich durch Division der entsprechenden relativen Schwingungszahlen $\frac{81}{64}$ und $\frac{5}{4}$ das Verhältniss $\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$.

Das *e* der mittleren Reihe ist also um das Intervall $\frac{81}{80}$ höher als das *e* der obersten Reihe.

In genau demselben Verhältniss, in dem das *e* der mittleren zum *e* der obersten Reihe steht, steht natürlich auch das *a* der mittleren Reihe zum *a* der obersten Reihe, ebenso das *d* der mittleren zum *d* der obersten u. s. f. Wir können daher allgemein schliessen, dass die Töne der mittleren Reihe alle um das Intervall $\frac{81}{80}$ höher sind als die entsprechenden gleichnamigen Töne der obersten Reihe.

Wir können aber noch weiter verallgemeinern. Die oberste der drei Reihen steht zu der mittleren offenbar in genau derselben Beziehung wie die mittlere zur untersten. Durch eben dasselbe Bildungsgesetz, das uns bei der Ableitung der obersten Reihe aus der ursprünglich gegebenen mittleren massgebend war, lässt sich auch die mittlere Reihe aus der untersten entwickeln. Ebenso wie wir z. B. vom *c* der mittleren Reihe zum *c* der obersten Reihe durch einen grossen Terzenschritt aufwärts und 4 Quintenschritte abwärts gelangen, so führt uns auch ein grosser Terzenschritt aufwärts und 4 Quintenschritte abwärts vom *c* der untersten Reihe zum *c* der mittleren. Es müssen demnach auch die Töne der untersten Reihe um das Intervall $\frac{81}{80}$ höher stehen als die gleichnamigen Töne der mittleren, und somit auch um das Intervall $\frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} = (\frac{81}{80})^2$ höher als die gleichnamigen Töne der obersten Reihe.

Dieses häufig vorkommende, immer wiederkehrende Intervall $\frac{81}{80}$ heisst das „syntonische Komma“. Für jedes musikalisch gebildete Ohr ist das Intervall eines syntonischen Kommas ohne jede Schwierigkeit sehr deutlich zu erkennen, wenn man dem Ohre Gelegenheit bietet, es zu hören.

18. Darstellung des syntonischen Kommas auf der Violine. — Für den Geiger ist es ein Leichtes, sich von der Grösse eines syntonischen Kommas Rechenschaft abzulegen. Die 4 Saiten der Geige sind nach reinen Quinten gestimmt: *g d a e*. Nehmen wir an, diese 4 Töne seien z. B. der mittleren der oben aufgestellten Quintenreihen entnommen. Führen wir hier der Deutlichkeit wegen ausnahmsweise wieder die Bezeichnung der absoluten Tonhöhen ein, indem wir die Saiten der Geige mit g $\bar{d}$ $\bar{a}$ $\bar{e}$ bezeichnen.

Nachdem diese vollkommen rein eingestimmt sind, greife man mit dem 1. Finger auf der *d*-Saite das $\bar{e}$ als reine grosse Sexte zur leeren *g*-Saite und stimme diese Sexte ganz rein ein; endlich nehme man von diesem $\bar{e}$ die Oktave auf der *a*-Saite mit dem 4. Finger; also mit einem Wort: man spiele den folgenden Akkord vollkommen rein:



Dann wird das mit dem 4. Finger auf der *a*-Saite gegriffene $\bar{\bar{e}}$ nicht mit dem $\bar{\bar{e}}$ der leeren *e*-Saite, das neben dem obenstehenden Akkord durch ein *e* mit darüber stehender Null angedeutet wurde, übereinstimmen, sondern merklich tiefer sein. — Es ist nach Obigem leicht, sich vom Grunde dieser Abweichung und von deren Betrag Rechenschaft zu geben.

Das auf der *a*-Saite mit dem 4. Finger gegriffene $\bar{\bar{e}}$ gibt, um eine Oktave tiefer verlegt, das $\bar{e}$ der *d*-Saite, das mit der leeren *g*-Saite eine grosse Sexte bildet. Gehen wir noch um eine Oktave tiefer, so kommen wir zum kleinen *e*, das ausserhalb des Tonumfanges der Geige liegt und mit dem *g* der leeren Saite eine kleine Terz einschliesst. Dieses Verhältniss der kleinen Terz zwischen *e* und *g* wird, wie wir oben sahen, durch die Stellung $\begin{matrix} e & \\ & g \end{matrix}$ angedeutet. Die bildliche Darstellung aller hier in Betracht kommenden Töne ist also gegeben durch das Schema

$$\begin{matrix} e & & & \\ g & \bar{d} & \bar{a} & \bar{\bar{e}} \end{matrix}$$

d. h. das kleine *e* gehört in die obere Horizontalreihe, ist also nach der eben gewonnenen Einsicht (abgesehen von den nicht in Betracht kommenden Oktavenunterschieden) um ein Komma $\frac{81}{80}$ tiefer als das *e* der leeren *e*-Saite. Die Abweichung des auf der *a*-Saite mit dem 4. Finger gegriffenen $\bar{\bar{e}}$ vom leeren $\bar{\bar{e}}$ beträgt also ein syntonisches Komma, und zwar ist der gegriffene Ton um ein Komma tiefer als der leere. — Für denjenigen, der sich einmal mit dieser Betrachtungsweise vertraut gemacht hat, genügt ein einziger Blick auf das hier in Betracht kommende Schema, um ihm dasselbe zu sagen, was wir hier mit Worten sagen mussten. Die klare Einsicht in den eingeführten Schematismus ersetzt uns in vielen Fällen jede Rechnung.

19. Bezeichnung der Komma-Unterschiede durch Exponenten. Das harmonische Tonsystem oder harmonische

Tongewebe. — Es macht sich nun offenbar das Bedürfniss geltend, die gleichnamigen Töne der verschiedenen Horizontalreihen, die sich durch Komma-Unterschiede von einander unterscheiden, auch verschieden zu bezeichnen und durch die Art der Bezeichnung auch die Grösse des Unterschiedes anzudeuten. Es empfiehlt sich die von Eitz eingeführte Art der Bezeichnung, die in Folgendem besteht*):

Die Töne der Reihe, von welcher man ursprünglich ausging, bezeichnet man durch eine kleine Null, die man den betreffenden Buchstaben in der Art eines Exponenten beifügt:

$$\ldots\; as^{0} \quad es^{0} \quad b^{0} \quad f^{0} \quad c^{0} \quad g^{0} \quad d^{0} \quad a^{0} \quad e^{0} \quad h^{0} \quad fis^{0} \;\ldots$$

Töne, die um ein Komma tiefer stehen, als diese sog. „Null-Töne“, bezeichnet man durch den Exponenten —1, also

$$\ldots\; as^{-1} \quad es^{-1} \quad b^{-1} \quad f^{-1} \quad c^{-1} \quad g^{-1} \quad d^{-1} \quad a^{-1} \quad e^{-1} \quad h^{-1} \quad fis^{-1} \;\ldots$$

Töne, die um 2 Kommata tiefer stehen als die Null-Töne, würde man analog durch den Exponenten —2 bezeichnen:

$$\ldots\; as^{-2} \quad es^{-2} \quad b^{-2} \quad f^{-2} \quad c^{-2} \quad g^{-2} \quad d^{-2} \quad a^{-2} \quad e^{-2} \;\ldots$$

Umgekehrt müssen folgerichtig die Töne, welche um ein Komma höher stehen, als die Null-Töne oder die Töne der sog. „Null-Reihe“, durch den Exponenten + 1, solche, die um 2 Kommata höher stehen, durch + 2 bezeichnet werden u. s. f. Wir können von den Null-Tönen um eine beliebige Anzahl von Kommata höher steigen oder sinken und die auf diese Weise entstehenden Töne in consequenter Weise durch Zahlen bezeichnen, die dem betreffenden Buchstaben nach Art eines Exponenten **) beigefügt sind. Die Zahlen geben an, um wie viel Kommata der Ton vom entsprechenden Null-Tone abweicht, das + Zeichen bedeutet eine Abweichung nach oben, das — Zeichen eine Abweichung nach unten.

---

*) Helmholtz deutet die Erhöhung um ein Komma durch einen Strich über dem betreffenden Buchstaben an; $\bar{c}$ ist nach seiner Bezeichnungsweise um ein Komma höher als c, $\bar{\bar{c}}$ um ein Komma höher als $\bar{c}$; ferner $\underline{c}$ um ein Komma tiefer als c, $\underline{\underline{c}}$ um ein Komma tiefer als $\underline{c}$ u. s. f. Diese an und für sich zweckmässige Bezeichnungsart ist vielfach im Gebrauch; sie wurde hier nicht angewandt, um eine Verwechslung mit den Tönen der ein- und mehrgestrichenen Oktaven zu vermeiden.

**) Es ist selbstverständlich, dass die Exponenten hier nicht in mathematischem Sinne zu verstehen sind, sondern rein symbolische Bedeutung haben.

Die Töne der 3 Horizontalreihen, mit denen wir es bisher zu thun hatten, nehmen also offenbar die folgende Bezeichnung und gegenseitige Lage an:

$$\begin{matrix} \ldots & \overset{-1}{b} & \overset{-1}{f} & \overset{-1}{c} & \overset{-1}{g} & \overset{-1}{d} & \overset{-1}{a} & \overset{-1}{e} & \overset{-1}{h} & \overset{-1}{fis} & \overset{-1}{cis} & \overset{-1}{gis} & \overset{-1}{dis} & \ldots \\ \ldots & \overset{0}{ges} & \overset{0}{des} & \overset{0}{as} & \overset{0}{es} & \overset{0}{b} & \overset{0}{f} & \overset{0}{c} & \overset{0}{g} & \overset{0}{d} & \overset{0}{a} & \overset{0}{e} & \overset{0}{h} & \overset{0}{fis} \ldots \\ \ldots & \overset{+1}{bb} & \overset{+1}{fes} & \overset{+1}{ces} & \overset{+1}{ges} & \overset{+1}{des} & \overset{+1}{as} & \overset{+1}{es} & \overset{+1}{b} & \overset{+1}{f} & \overset{+1}{c} & \overset{+1}{g} & \overset{+1}{d} & \ldots \end{matrix}$$

Dur-Dreiklänge nehmen unter Benutzung dieser genaueren Art der Bezeichnung folgende Darstellungsform an:

$$\begin{matrix} & \overset{-1}{e} & & & \overset{-1}{h} & & & \overset{-1}{a} & \\ \overset{0}{c} & & \overset{0}{g}, & \overset{0}{g} & & \overset{0}{d}, & \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} \end{matrix} \text{ u. s. f.}$$

Moll-Dreiklänge dagegen die Gestalt:

$$\begin{matrix} \overset{0}{c} & & \overset{0}{g}, & \overset{0}{g} & & \overset{0}{d}, & \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} \\ & \overset{+1}{es} & & & \overset{+1}{b} & & & \overset{+1}{as} & \end{matrix} \text{ u. s. f.}$$

Da durch die gegenseitige Stellung der Buchstaben allein schon der Dreiklang gekennzeichnet ist, so ist die Anwendung der Exponenten nicht in allen Fällen nothwendig. Die Darstellungsform oder (nach der Bezeichnung von Eitz) die „Bildform“ eines Dur-Dreiklanges ist stets ∘∘∘, eines Moll-Dreiklanges dagegen stets ∘∘∘.

Sollen dagegen, wie es häufig vorkommt, zwei Dreiklänge von einander unterschieden werden, von denen der eine z. B. um ein Komma höher oder tiefer steht als der andere, so ist die genauere Bezeichnung durch Anwendung von Exponenten unentbehrlich.

Es ist nämlich nicht nur $\begin{matrix} & \overset{-1}{e} & \\ \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} \end{matrix}$ ein *c*-dur-Dreiklang, sondern auch $\begin{matrix} & \overset{0}{e} & \\ \overset{+1}{c} & & \overset{+1}{g} \end{matrix}$ und $\begin{matrix} & \overset{-2}{e} & \\ \overset{-1}{c} & & \overset{-1}{g} \end{matrix}$, und zwar steht

der Dur-Dreiklang $\overset{+1}{c}\ \overset{0}{e}\ \overset{+1}{g}$ um ein Komma höher, der Dur-Dreiklang $\overset{-1}{c}\ \overset{-2}{e}\ \overset{-1}{g}$ um ein Komma tiefer, als der ursprüngliche *c*-dur-Dreiklang.

Ebenso ist von den drei Moll-Dreiklängen

$$\overset{-1}{c}\ \overset{0}{es}\ \overset{-1}{g}, \quad \overset{0}{c}\ \overset{+1}{es}\ \overset{0}{g}, \quad \overset{+1}{c}\ \overset{+2}{es}\ \overset{+1}{g}$$

der erste der tiefste, der zweite um ein Komma höher als der erste und der dritte um ein Komma höher als der zweite. Wir brauchen nur an die oben festgesetzte Bedeutung der Exponenten zu erinnern. — Die genauere Bezeichnung durch Exponenten ist sehr oft da unentbehrlich, wo man auf die äussere bildliche Darstellung der Töne und ihrer gegenseitigen Lage verzichtet und die Tonbezeichnungen einfach neben einander hinschreibt, wie z. B. bei der Durtonleiter: $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{-1}{e}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{-1}{a}\ \overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$. —

Es ist klar, dass wir unter Einführung von Tönen, die um 2, 3, 4, 5, ... Kommata tiefer oder höher stehen als die Töne der Null-Reihe, die Zahl der Horizontalreihen sowohl nach oben als nach unten beliebig, bis ins Unbegrenzte, fortsetzen können. Dadurch erhalten wir ein die ganze Ebene überdeckendes Netz von Tönen, von dem nur ein kleines Stück hier zur Darstellung gebracht sei:

$$\ldots\ \overset{-4}{ais}\quad \overset{-4}{cis}\quad \overset{-4}{his}\quad \overset{-4}{fisis}\quad \overset{-4}{cisis}\quad \overset{-4}{gisis}\quad \overset{-4}{disis}\quad \overset{-4}{aisis}\quad \overset{-4}{eisis}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{-3}{cis}\quad \overset{-3}{gis}\quad \overset{-3}{dis}\quad \overset{-3}{ais}\quad \overset{-3}{eis}\quad \overset{-3}{his}\quad \overset{-3}{fisis}\quad \overset{-3}{cisis}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{-2}{a}\quad \overset{-2}{e}\quad \overset{-2}{h}\quad \overset{-2}{fis}\quad \overset{-2}{cis}\quad \overset{-2}{gis}\quad \overset{-2}{dis}\quad \overset{-2}{ais}\quad \overset{-2}{eis}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{-1}{c}\quad \overset{-1}{g}\quad \overset{-1}{d}\quad \overset{-1}{a}\quad \overset{-1}{e}\quad \overset{-1}{h}\quad \overset{-1}{fis}\quad \overset{-1}{cis}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}\quad \overset{0}{g}\quad \overset{0}{d}\quad \overset{0}{a}\quad \overset{0}{e}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{+1}{ces}\quad \overset{+1}{ges}\quad \overset{+1}{des}\quad \overset{+1}{as}\quad \overset{+1}{es}\quad \overset{+1}{b}\quad \overset{+1}{f}\quad \overset{+1}{c}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{+2}{asas}\quad \overset{+2}{eses}\quad \overset{+2}{bb}\quad \overset{+2}{fes}\quad \overset{+2}{ces}\quad \overset{+2}{ges}\quad \overset{+2}{des}\quad \overset{+2}{as}\quad \overset{+2}{es}\ \ldots$$

$$\ldots\ \overset{+3}{ceses}\quad \overset{+3}{geses}\quad \overset{+3}{deses}\quad \overset{+3}{asas}\quad \overset{+3}{eses}\quad \overset{+3}{bb}\quad \overset{+3}{fes}\quad \overset{+3}{ces}\ \ldots$$

Dieses Netz von Tönen denkt man sich nach allen Richtungen hin ins Unbegrenzte fortgesetzt. Man gibt ihm den Namen „harmonisches Tonsystem" oder auch „harmonisches Tongewebe". Das Bildungsgesetz dieses Systems bedarf wohl nach den vorstehenden Ausführungen keiner Erläuterung mehr.

20. Die unmittelbare Umgebung eines Tones im harmonischen Tongewebe enthält alle Töne, welche mit diesem Tone consonirende Intervalle bilden. Bildformen dieser und einiger dissonirender Intervalle. — Von Interesse ist es, die allernächste Umgebung irgend eines Tones des harmonischen Tongewebes zu betrachten. Nehmen wir als Ausgangspunkt z. B. wieder $\overset{0}{c}$ und betrachten wir die Gruppe

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{-1}{a} & & \overset{-1}{e} & \\ \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} \\ & \overset{+1}{as} & & \overset{+1}{es} & \end{array}$$

oder, unter Weglassung der hier nicht unbedingt nothwendigen Exponenten, die Gruppe

$$\begin{array}{ccccc} & a & & e & \\ f & & c & & g \\ & as & & es & \end{array}$$

Bei aufmerksamer Betrachtung erkennen wir, dass die Umgebung von c gerade alle diejenigen Töne enthält, die mit c ein consonirendes Intervall bilden. Nehmen wir an, alle Töne der Umgebung von c liegen in der von c aus aufwärts gehenden Oktave, so gibt uns

$c \longrightarrow g$ die Quinte, $f \longleftarrow c$ die Quarte

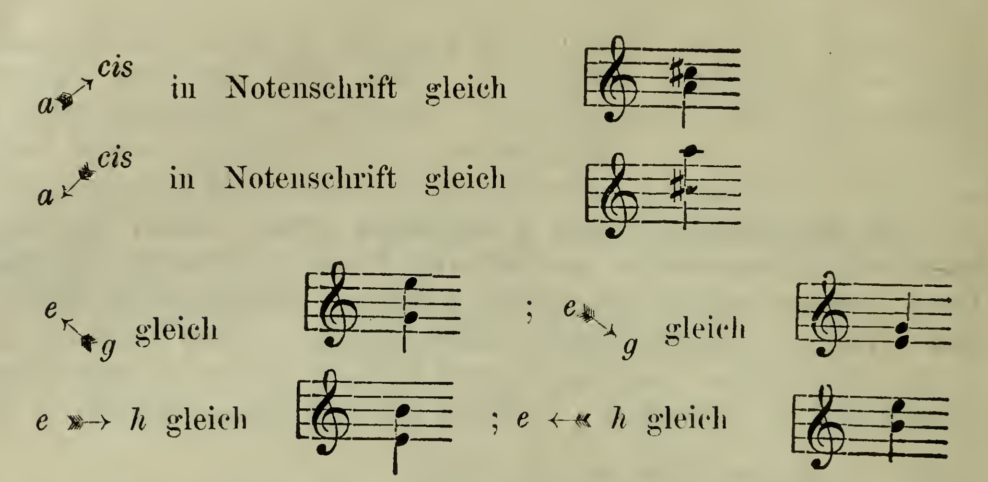
$c \nearrow e$ die grosse Terz, $as \swarrow c$ die kleine Sexte

$a \nwarrow c$ die grosse Sexte, $c \searrow es$ die kleine Terz

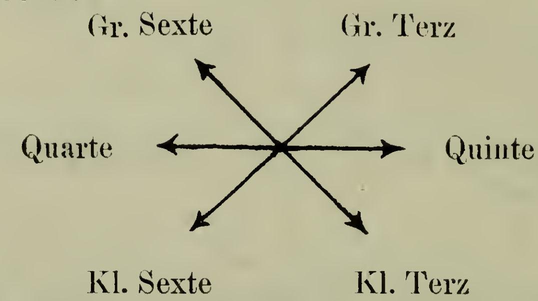
von c, oder in Notenschrift:



Die Richtung des Pfeiles ist charakteristisch für die Art des Intervalls. Durch Umkehrung der Pfeilrichtung verwandelt sich die Quinte in die Quarte, die grosse Terz in die kleine Sexte, die grosse Sexte in die kleine Terz, und umgekehrt. Einer direkten Umkehrung der Pfeilrichtung entspricht auch eine Umkehrung des Intervalls im Sinne der Musik. Hierbei nimmt man in der Regel den Ton, von welchem der Pfeil ausgeht, als den tieferen an. So ist z. B.



u. s. w. Alles Gesagte lässt sich übersichtlich zusammenfassen in dem einfachen Schema



Terzen- und Sextenschritte führen also stets in eine andere Horizontalreihe des harmonischen Tongewebes, und zwar grosse Intervalle nach oben, kleine nach unten; Terzen nach rechts, Sexten nach links. Nur Quinten- und Quartenschritte haben die Eigenschaft, nicht aus der betreffenden Horizontalreihe hinauszuführen.

Diejenigen Töne, welche mit dem Grundton ein dissonirendes Intervall bilden, sind im harmonischen Tongewebe nicht in der unmittelbaren Umgebung des Grundtons, sondern von demselben durch andere Töne getrennt. Es würde uns zu weit führen, die Bildformen zahlreicher dissonanter Intervalle aufzustellen. Wir erwähnen nur einige der wichtigsten und überlassen es dem Leser, sich im Aufstellen anderer Bildformen zu üben.

Der grossen Sekunde von *c* entspricht in *c*-dur der Tonschritt *c* ➳·⟶ *d*, wobei der Punkt die zwischen *c* und *d* einzuschaltende Quinte *g* andeutet.

Der grossen Septime zwischen *c* und *h* in *c*-dur entspricht das Bild



das bei Umkehrung des Pfeiles die Stellung des Leittons zur Tonika versinnbildlicht.

Aus der Darstellung von *c*-dur in der Form

a *c* *h*

f *c* *g* *d*

geht das Bild der Dominantseptime



f ←·— *g*

sowie des Dominantseptimenakkords

. . *h*

f . *g* *d*

hervor. Es fällt auf, dass die Septime *f* mit der Quinte *d* keine natürliche kleine Terz bildet, denn letztere wäre durch das Bild *d* ↘ *f* gekennzeichnet, während die Terz *d*—*f* im Dominantseptimenakkord durch das Bild *f* ←·—· *d* dargestellt ist. Die Dominantseptime *f* ist um ein Komma tiefer als die reine kleine Terz von *d*. So gut die reine kl. Terz *d* *f* isolirt klingt, so schlecht nimmt sie sich aus, wenn man sie in den Dominantseptimenakkord einführen will.

Nebenbei sei hier bemerkt, dass wir im Gegensatz zu den Intervallen, die zu ihrer eindeutigen Charakterisirung eines die Richtung des Tonschrittes anzeigenden Pfeiles bedürfen, bei den Akkorden keine Pfeile anwenden. Es entspricht dies der von Rameau (1683 bis 1764) in die Harmonielehre eingeführten Auffassung, wonach man Akkorde, die sich nur durch Versetzung einzelner Töne um eine oder mehrere Oktaven von einander unterscheiden, als nicht wesentlich von einander verschieden betrachtet.

21. Die sog. pythagoräischen Tonleitern und das pythagoräische Stimmungsprinzip. — Wir haben oben die Dur- und Moll-Tonleitern nach rein harmonischem Prinzip mit Hülfe reiner Dreiklänge aufgebaut. Vom Standpunkte der Harmoniebildung aus betrachtet ist diese Art der Tonleiter-Bildung vollkommen sachgemäss; es ist aber nicht die einzig mögliche Art. Jede Tonleiter muss, wenn sie Existenzberechtigung haben soll, ein bestimmtes möglichst einfaches Bildungsgesetz klar erkennen lassen. Damit ist aber nicht gesagt, dass nur eine mit Hülfe reiner Dreiklänge aufgebaute Tonleiter als gesetzmässig anzuerkennen sei. Eine Tonleiter an und für sich hat in erster Linie der Melodiebildung zu dienen; die Aufeinanderfolge von Tönen ist hier das Primäre, der Zusammenklang kommt erst in zweiter Linie in Betracht.

Wir können eine gesetzmässige Dur-Tonleiter auch in der Weise bilden, dass wir 7 durch Quintenschritte mit einander verkettete Töne einer und derselben zusammenhängenden Quintenreihe zum Aufbau verwenden. Gehen wir z. B. von $\overset{0}{c}$ aus einerseits um eine Quinte abwärts, andererseits in 5 Quintenschritten aufwärts, nehmen wir also die Quintenkette

$$\overset{0}{f} \quad \overset{0}{c} \quad \overset{0}{g} \quad \overset{0}{d} \quad \overset{0}{a} \quad \overset{0}{e} \quad \overset{0}{h}$$

und denken wir uns alle Töne in der über c^0 liegenden Oktave liegend und nach ihrer Höhe geordnet, so haben wir eine neue gesetzmässig gebildete Tonleiter

$$\overset{0}{c} \quad \overset{0}{d} \quad \overset{0}{e} \quad \overset{0}{f} \quad \overset{0}{g} \quad \overset{0}{a} \quad \overset{0}{h}$$

welche man die pythagoräische c-Dur-Tonleiter nennt. Vergleichen wir sie mit der bisher betrachteten sog. natürlich-harmonischen c-dur-Tonleiter, so finden wir 4 gemeinsame, neutrale Tonstufen: $\overset{0}{c}$, $\overset{0}{d}$, $\overset{0}{f}$, $\overset{0}{g}$, d. h. Prime, Sekunde, Quarte und Quinte. Verschieden sind dagegen Terz, Sexte und Septime. In der natürlichen Tonleiter sind diese Tonstufen, wie aus der symbolischen Darstellungsart

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{-1}{a} & & \overset{-1}{e} & & \overset{-1}{h} & \\ \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} & & \overset{0}{d} \end{array}$$

ersichtlich ist, durch $\overset{-1}{e}$, $\overset{-1}{a}$, $\overset{-1}{h}$ bezeichnet; in der pythagoräischen dagegen sind sie resp. mit $\overset{0}{e}$, $\overset{0}{a}$, $\overset{0}{h}$ benannt, d. h. sie sind hier um ein Komma höher.

Die pythagoräische grosse Terz $\overset{0}{c}$—$\overset{0}{e}$ ist also nicht gleich $\frac{5}{4}$, sondern $\frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80}$ oder $\frac{81}{64}$. Die pythagoräische grosse Sexte ist nicht durch das Verhältniss $\frac{5}{3}$, sondern durch $\frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$ oder $\frac{27}{16}$ gegeben. Und endlich steht die Septime $\overset{0}{h}$ auch um ein Komma höher, ist also in Bezug auf den Grundton nicht durch das Verhältniss $\frac{15}{8}$, sondern durch $\frac{15}{8} \cdot \frac{81}{80}$ oder $\frac{243}{128}$ charakterisirt.

Terz, Sexte und Septime der pythagoräischen Dur-Tonleiter klingen weniger ruhig als die entsprechenden Intervalle der natürlichen Tonleiter; sie haben einen vorwärts drängenden Charakter.

Nach demselben Prinzip der Quintenverwandtschaft lassen sich auch die Moll-Tonleitern bilden. Verlängern wir die obenstehende 7 gliedrige Quintenreihe noch um 3 Glieder nach links

$$\overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}\quad \overset{0}{g}\quad \overset{0}{d}\quad \overset{0}{a}\quad \overset{0}{e}\quad \overset{0}{h}$$

so enthält diese Reihe alle Töne, deren wir zum Aufbau der verschiedenen Formen der pythagoräischen *c*-Moll-Tonleitern bedürfen.

In aufsteigender Form heisst die pythagoräische *c*-moll-Tonleiter $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{es}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{a}\ \overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$. Verglichen mit der pythag. *c*-dur-Tonleiter unterscheidet sie sich von dieser nur durch die kleine Terz $\overset{0}{es}$. Verglichen mit der aufsteigenden melodischen Moll-Tonleiter der Musiktheorie, dargestellt durch das Schema

$$\begin{array}{cccc} & \overset{-1}{a} & & \overset{-1}{h} \\ \overset{0}{f} & \overset{0}{c} & \overset{0}{g} & \overset{0}{d} \\ & & \overset{+1}{es} & \end{array}$$

hat sie eine um ein Komma tiefere kleine Terz ($\overset{0}{es}$ statt $\overset{+1}{es}$), eine um ein Komma höhere grosse Sexte ($\overset{0}{a}$ statt $\overset{-1}{a}$) und ebenso eine um ein Komma höhere grosse Septime ($\overset{0}{h}$ statt $\overset{-1}{h}$).

In absteigender Form ist die pythag. *c*-moll-Tonleiter $\overset{0}{c}\ \overset{0}{b}\ \overset{0}{as}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{es}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{c}$. Vergleicht man sie mit der entsprechenden Tonleiter der Musiktheorie

$$\begin{array}{cccc} \overset{0}{f} & \overset{0}{c} & \overset{0}{g} & \overset{0}{d} \\ \overset{+1}{as} & \overset{+1}{es} & \overset{+1}{b} & \end{array}$$

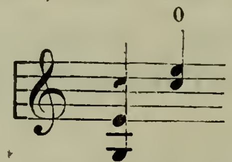
so erkennt man, dass die absteigende kleine Septime $\overset{0}{b}$, die kleine Sexte $\overset{0}{as}$ und die kleine Terz $\overset{0}{es}$ um ein Komma tiefer stehen als die entsprechenden Stufen $\overset{+1}{b}$, $\overset{+1}{as}$, $\overset{+1}{es}$ der theoretischen Leiter.

Eine kritische Besprechung der verschieden abgestimmten Tonleitern auf später versparend, bemerken wir hier nur, dass die pythagoräischen Tonleitern in der künstlerischen Praxis vielfach unbewusst angewandt werden.

Dasjenige Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne einer und derselben Quintenreihe entnommen werden, welches also nur das Prinzip der Quintenverwandtschaft anerkennt, heisst das pythagoräische Stimmungsprinzip. Alle Intervalle dieses Systems werden als „pythagoräische" bezeichnet. Von Verfechtern dieses Systems seien hier zwei genannt: Drobisch („Zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse", Leipzig, S. Hirzel, 1855) und

C. E. Naumann („Ueber die verschiedenen Bestimmungen der Tonverhältnisse und die Bedeutung des pythagoräischen Systems für unsere heutige Musik“, Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1858).

22. Darstellung pythagoräischer Intervalle auf Streichinstrumenten, speziell auf der Violine. — Spieler von Streichinstrumenten stossen oft unversehens auf pythagoräische Intervalle. Ein Geiger spiele z. B., nachdem die 4 Saiten der Geige vollkommen rein eingestimmt worden sind, den Akkord



also den *c*-dur-Dreiklang in voller Reinheit. Dann wird das auf der *a*-Saite gegriffene $\bar{c}$ mit der leeren *e*-Saite keine natürliche, sondern eine pythagoräische, um ein Komma grössere, grosse Terz bilden. Zum obigen *c*-dur-Akkord gehört nämlich das Bild $\begin{smallmatrix} & e & \\ c & & g \end{smallmatrix}$, und das *e* der leeren Saite ist aus dem *g* durch Quintenschritte gewonnen. Also ist das Gesammtbild der 4 hier in Betracht kommenden Töne

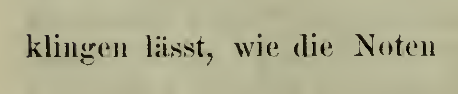


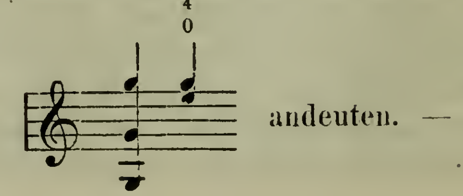
wobei das *e* der leeren Saite mit dem *c* in derselben Horizontalreihe steht, also in der That mit ihm eine pythagoräische grosse Terz bildet. — Spielt man dagegen den Akkord



mit ganz reinen natürlichen Intervallen, so bildet das tiefere *e* mit der leeren *g*-Saite eine pythagoräische grosse Sexte. Denn das *e* der leeren *e*-Saite ist aus dem *g* der leeren *g*-Saite durch Quintenschritte gewonnen; die tiefere Oktave des leeren *e* muss also mit dem leeren *g* eine pythagoräische grosse Sexte bilden. —

Eine pythagoräische kleine Terz kann man z. B. dadurch hervorbringen, dass man $\bar{\bar{g}}$ als zweit höhere Oktave der leeren *g*-Saite rein einstimmt und dieses $\bar{\bar{g}}$ gleichzeitig mit der leeren *e*-Saite er-


klingen lässt, wie die Noten



andeuten. —

23. Zwölf an einander gereihte Quintenschritte führen nahezu zur 7ten Oktave des Ausgangstones. Der Ueberschuss von 12 Quinten über 7 Oktaven ist das pythagoräische Komma. — Betrachten wir nochmals die pythagoräische Quintenreihe in einer etwas weiteren Ausdehnung und gehen wir z. B. vom Tone *des* einer sehr tiefen, sagen wir der Contra-Oktave aus, um 12 Quintenschritte aufwärts, bilden wir also die Reihe

$$\underline{Des} \quad \underline{As} \quad Es \quad B \quad f \quad \bar{c} \quad \bar{g} \quad \bar{\bar{d}} \quad \bar{\bar{a}} \quad \bar{\bar{\bar{e}}} \quad \bar{\bar{\bar{h}}} \quad \overline{\overline{\overline{\overline{fis}}}} \quad \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{cis}}}}}$$

Durch diese 12 Quintenschritte sind wir vom $\underline{Des}$ der Contra-Oktave zum fünfgestrichenen $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{cis}}}}}$ gelangt, also um circa 7 Oktaven aufwärts. Denken wir uns das $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{cis}}}}}$ um 7 Oktaven abwärts versetzt, um es unmittelbar mit dem $\underline{Des}$ zu vergleichen, und untersuchen wir das Verhältniss von dem auf diese Weise gewonnenen $\underline{Cis}$ zum $\underline{Des}$. Setzen wir den Ausgangspunkt $\underline{Des} = 1$, so entspricht den 12 Quintenschritten aufwärts eine 12 malige Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, also $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{cis}}}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096}$ Der Versetzung um 7 Oktaven rückwärts entspricht eine 7 malige Division durch 2, also

$$\underline{Cis} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{12} : 2^{7} = \tfrac{531441}{524288}$$

Eine die Grenzen der niederen Mathematik nicht überschreitende Untersuchung zeigt, dass sich dieser etwas komplizirte und wenig übersichtliche Bruch mit sehr grosser Annäherung durch den viel einfacheren Bruch $\frac{74}{73}$ ersetzen lässt, so dass also dem

$$\underline{Des} = 1 \text{ ein } \underline{Cis} = \tfrac{74}{73}$$

entspricht.

† Bezeichnen wir mit dem Symbole $1 : [q_1, q_2, q_3, \ldots]$ einen gewöhnlichen Kettenbruch, dessen Partialnenner gleich $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sind, so gibt die Entwicklung des Bruches $\frac{531441}{524288}$ in einen Kettenbruch die Gleichung

$$\tfrac{531441}{524288}\ 1 + \tfrac{7153}{524288} = \ = 1 + 1 : [73, 3, 2, 1, 1, 1, 23, 2, 5]$$

Der erste Näherungswerth N_1 wird $= \frac{74}{73}$, der zweite $N_2 = \frac{223}{220}$. Offenbar ist N_1 etwas zu gross, N_2 etwas zu klein und zwar ist $\frac{N_1}{N_2} = \frac{74}{73} \cdot \frac{220}{223} = \frac{16280}{16279}$, also ein Intervall, welches sehr weit unterhalb der Grenze der Hörbarkeit liegt. Die Abweichung des Bruches $\frac{74}{73}$ vom wahren Werthe ist noch kleiner als dieses gänzlich

zu vernachlässigende Intervall. Damit ist bewiesen, dass der einfache Bruch $\frac{74}{73}$ mit mehr als ausreichender Genauigkeit den komplizirteren vertreten kann. Nach einer bekannten fundamentalen Eigenschaft der Näherungswerthe gemeiner Kettenbrüche gibt es auch keinen andern ebenso einfachen Bruch, welcher dem wahren Werthe näher käme als eben der Bruch $\frac{74}{73}$. † .

Das *cis* der Contra-Oktave ist also um das Intervall $\frac{74}{73}$ höher als das *des* derselben Oktave, natürlich ebenso das *cis* jeder andern Oktave um $\frac{74}{73}$ höher als das *des* derselben Oktave. Die 12 Quintenschritte führen also, abgesehen von dem Unterschiede von 7 Oktaven, durchaus nicht zum Ausgangspunkte zurück, sondern zu einem um das Intervall $\frac{74}{73}$ höhern Tone. Ganz ebenso wie das *cis* höher ist als das *des* derselben Horizontalreihe, so muss natürlich auch das *gis* höher sein als das *as*, das *dis* höher als das *es*, das *ais* höher als das *b* u. s. f.; ebenso das *fis* höher als das *ges*, *h* höher als das *ces*, *e* höher als *fes* u. s. w. In der unbegrenzten Quintenreihe

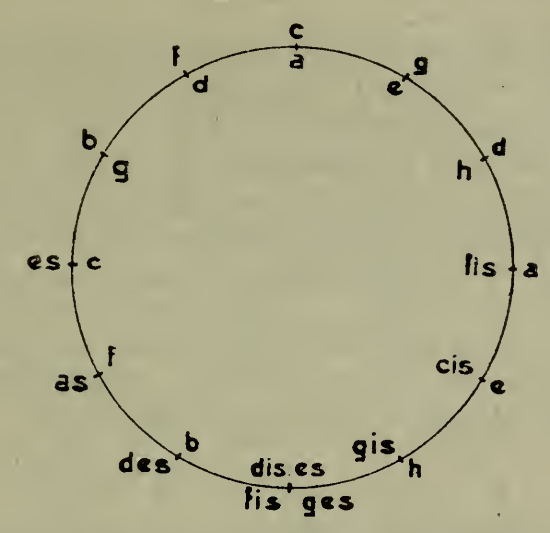
. . . . *bb fes ces ges des as es b f c g d a e h fis cis gis dis ais eis his* . . . .

sind je 2 um 12 Quintenschritte von einander getrennte Töne um das Intervall $\frac{74}{73}$ von einander verschieden, und zwar ist der rechtsstehende Ton immer um dieses Intervall höher als der entsprechende linksstehende.

Insbesondere sind hier, im pythagoräischen Quintensystem, die erhöhten Töne *fis, cis, gis, dis, ais* . . . . höher als die entsprechenden vertieften Töne *ges, des, as, es, b,* . . . .

Das Intervall $\frac{74}{73}$ heisst das pythagoräische Komma. Es ist nur wenig verschieden vom syntonischen Komma, etwas grösser als dieses. Der an den Grenzen der Hörbarkeit liegende Unterschied zwischen dem pythagoräischen und dem syntonischen Komma heisst das Schisma.

24. Der Quintenzirkel der Musik. Die Bedingung, dass dieser Zirkel sich vollkommen schliessen soll, und die gleichmässige Vertheilung des Fehlers auf alle Quinten führt zur 12 stufigen gleichschwebenden Temperatur. Ableitung der 12 Tonstufen derselben. — In der Musik spricht man bekanntlich von einem sog. Quintenzirkel, d. h. von einem Zirkel von 12 Quinten, der wieder zum Ausgangspunkt zurückführt, sich also schliesst. Man vernachlässigt den Unterschied eines pythagoräischen Kommas und setzt *ges* = *fis*, *des* = *cis*, *as* = *gis*, *es* = *dis*, *b* = *ais* etc. Man pflegt diesen Quintenzirkel durch Figuren zu veranschaulichen, wie z. B.



wo die ausserhalb des Kreises stehenden Buchstaben die Reihe der 12 üblichen Dur-Tonleitern, die innerhalb des Kreises stehenden Buchstaben die entsprechenden Moll-Tonleitern andeuten sollen. *ges* setzt man dabei gleich *fis*, *es* gleich *dis* u. s. f. Dementsprechend hat man bei der Orgel und beim Klavier für die erhöhten Töne *cis*, *dis*, *fis*, *gis*, *ais* keine anderen Tasten als für die entsprechenden vertieften *des*, *es*, *ges*, *as*, *b*. Dieselbe Taste muss für Töne dienen, die, im Grunde genommen, von einander verschieden sind. Untersuchen wir genauer, welche Folgen diese Abweichung auf die Stimmung des Klaviers ausüben muss.

Wenn wir in der Reihe der 12 Quinten

ges des as es b f c g d a e h fis

die beiden Endpunkte einander nähern, indem wir das tiefere *ges* an das höhere *fis* heranrücken oder umgekehrt, und wenn wir darauf halten, dass trotz dieser Verschiebung die einzelnen Intervalle *ges*—*des*, *des*—*as*, *as*—*es*. . . . . . *e*—*h*, *h*—*fis* unter sich gleich seien, so werden alle in obiger Reihe enthaltenen Töne etwas zusammengedrängt werden, jeder einzelne Quintenschritt wird etwas zu klein werden, aber alle Schritte werden unter sich gleich sein. Den Fehler, den wir dadurch begehen, dass wir das *ges* gleich dem *fis* setzen, und der, wie wir wissen, ein pythagoräisches Komma $\frac{74}{73}$ beträgt, vertheilen wir dadurch auf alle 12 Intervalle des obigen Systems von 12 Tönen vollkommen gleichmässig.

Dieses Vertheilen nennt man in der Sprache der Musik „temperiren“, und die gleichmässige Art der Vertheilung heisst die „gleichschwebende Temperatur“.

Durch die Bedingung der gleichmässigen Vertheilung des

Fehlers sind die einzelnen Töne des obigen Quintensystems völlig bestimmt. Die einzelnen Quintenschritte werden durch das obengenannte Zusammenrücken von *ges* und *fis* etwas zu eng, die auf diese Weise entstehende sog. „temperirte Quinte" wird in Folge dessen etwas kleiner als die natürliche Quinte $\frac{3}{2}$.

† Die Grösse der temperirten Quinte ist durch die Bedingung bestimmt, dass 12 solche Schritte genau gleich dem Intervall von 7 Oktaven, also gleich 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 d. h. $= 2^7$ sein müssen. Nennen wir die zu suchende relative Schwingungszahl der temperirten Quinte x, so muss demgemäss

$$x^{12} = 2^7, \text{ also } x = 2^{\frac{7}{12}} \text{ sein.}$$

Aus der temperirten Quinte x lassen sich alle andern Intervalle der temperirten Skala ableiten. Zu diesem Zwecke gehen wir von irgend einem Tone *c* aus in temperirten Quintenschritten sowohl aufwärts als abwärts und versetzen die Töne, die wir auf diese Weise gewinnen, durch reine Oktavenschritte, je nach Bedürfniss abwärts oder aufwärts, in die Oktave, deren Grundton der Ausgangspunkt *c* ist. Dann finden wir:

$$c = 1$$

$$g = x = 2^{\frac{7}{12}}$$

$$d = \frac{x^2}{2} = \frac{2^{\frac{14}{12}}}{2} = 2^{\frac{2}{12}}$$

$$a = \frac{x^3}{2} = \frac{2^{\frac{21}{12}}}{2} = 2^{\frac{9}{12}}$$

$$e = \frac{x^4}{2^2} = \frac{2^{\frac{28}{12}}}{2^2} = 2^{\frac{4}{12}}$$

$$h = \frac{x^5}{2^2} = \frac{2^{\frac{35}{12}}}{2^2} = 2^{\frac{11}{12}}$$

$$fis = \frac{x^6}{2^3} = \frac{2^{\frac{42}{12}}}{2^3} = 2^{\frac{6}{12}}$$

$$c = 1$$

$$f = \frac{1}{x} \cdot 2 = \frac{2}{2^{\frac{7}{12}}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$$b = \frac{1}{x^2} \cdot 2^2 = \frac{2^2}{2^{\frac{14}{12}}} = 2^{\frac{10}{12}}$$

$$es = \frac{1}{x^3} \cdot 2^2 = \frac{2^2}{2^{\frac{21}{12}}} = 2^{\frac{3}{12}}$$

$$as = \frac{1}{x^4} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{2^{\frac{28}{12}}} = 2^{\frac{8}{12}}$$

$$des = \frac{1}{x^5} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{2^{\frac{35}{12}}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$ges = \frac{1}{x^6} \cdot 2^4 = \frac{2^4}{2^{\frac{42}{12}}} = 2^{\frac{6}{12}}$$

In der linken Colonne entspricht jedem Quintenschritte aufwärts eine Multiplikation mit x, und jedesmal, sobald man bei einem solchen Schritte in eine neue Oktave eintritt, tritt im Nenner ein neuer Faktor 2 hinzu, um den gewonnenen Ton wieder in die ursprüngliche Oktave abwärts zu versetzen. In der Colonne rechts entspricht dagegen jedem Quintenschritte abwärts eine Division durch x, und jedesmal, wenn dieser Schritt in eine neue Oktave führt, tritt im Zähler ein neuer Faktor 2 hinzu, um den gewonnenen Ton in die ursprüngliche Oktave aufwärts zu versetzen.

Ordnen wir die Töne nach ihrer Höhe, so haben wir die temperirte chromatische Tonleiter

c	*cis* / *des*	*d*	*dis* / *es*	*e*	*eis* / *f*	*fis* / *ges*	*g*	*gis* / *as*	*a*	*ais* / *b*	*h* / *ces*	*c*
1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	$2^{\frac{12}{12}}$

In dieser „gleichschwebend temperirten chromatischen Tonleiter“ wird also das Intervall der Oktave in 12 unter sich vollkommen gleiche Theile eingetheilt. Jeder dieser Tonschritte ist ein „temperirter Halbton“. Die Grösse des temperirten Halbtons, sein relatives Schwingungsmaass, ist $2^{\frac{1}{12}}$, oder, wenn die Rechnung ausgeführt wird, gleich 1,05946 . . . .

In Bruchtheilen der Oktave ausgedrückt, ist der temperirte Halbton gleich $\frac{1}{12}$, der Ganzton $\frac{2}{12}$ oder $\frac{1}{6}$, die kleine Terz $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$, die grosse Terz $\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$, die Quarte $\frac{5}{12}$, die Quinte $\frac{7}{12}$ u. s. f. Nimmt man das Oktavenintervall als Grundmaass, als Einheit an, und drückt man die eben genannten Intervalle in dieser Einheit in Form von Decimalbrüchen aus, so ist also, in diesem Maasse gemessen:

der temperirte Halbton	$\frac{1}{12} = 0{,}0833\ldots$		
der temp. Ganzton	$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$		
die temp. kl. Terz	$\frac{1}{4} = 0{,}25$		
die temp. gr. Terz	$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$	einer Oktave	
die temp. Quarte	$\frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots$		
die temp. Quinte	$\frac{7}{12} = 0{,}5833\ldots$		

u. s. w. Wir werden von dieser sehr bequemen Art, musikalische Intervalle zu messen, später öfter Gebrauch machen.

Die gewöhnliche Art, die gleichschwebend temperirte Stimmung einzuführen, besteht darin, dass man sich von vornherein die Aufgabe stellt, die Oktave in 12 unter sich gleiche Halbtonschritte einzutheilen. Setzt man diesen zu suchenden Halbtonschritt gleich t, so muss $t^{12} = 2$, also $t = 2^{\frac{1}{12}}$ sein. Die einzelnen Stufen der chromatischen gleichschwebend temperirten Skala sind dann ausgedrückt durch die relativen Schwingungszahlen

$$1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}$$

oder

$$1\ 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, 2^{\frac{4}{12}}, 2^{\frac{5}{12}}, 2^{\frac{6}{12}}, 2^{\frac{7}{12}}, 2^{\frac{8}{12}}, 2^{\frac{9}{12}}, 2^{\frac{10}{12}}, 2^{\frac{11}{12}}, 2^{\frac{12}{12}},$$

wodurch wir mit einem Schlage gewonnen haben, was wir oben auf andere Weise entwickelten. †.

Die Ableitung der gleichschwebend temperirten Skala aus dem pythagoräischen Quintensystem hat, abgesehen davon, dass sie der historischen Entwicklung der gleichschwebenden Temperatur besser entspricht als die soeben gegebene einfachere Ableitung, den Vortheil, einen besseren Einblick in die Natur der temperirten Tonleiter zu gewähren als die Vorschrift der Theilung der Oktave in 12 gleiche Intervalle.

25. Die consonanten Intervalle der gleichschwebenden Temperatur verglichen mit den reinen natürlichen. Vorläufiges Urtheil über ihr gegenseitiges Verhältniss. — Wir wissen, dass die temperirte Quinte etwas kleiner ist als die natürliche reine, nämlich um den zwölften Theil des pythagoräischen Kommas $\frac{74}{73}$; denn wir haben ja die Abweichung von $\frac{74}{73}$ auf alle 12 Quinten des Quintenzirkels gleichmässig vertheilt. Der zwölfte Theil des Intervalls $\frac{74}{73}$ liegt hart an der Grenze der Hörbarkeit; wir werden uns später noch genauere Rechenschaft über die Grösse dieses sehr kleinen Intervalls geben.

Die temperirte Quarte ist als Umkehrung der Quinte, um dasselbe kleine Intervall zu gross, um welches die temperirte Quinte zu klein ist.

Was die temperirte grosse Terz anbetrifft, so wissen wir, dass sie $\frac{1}{3}$ der Oktave ist; 3 temperirte grosse Terzen an einander gereiht führen zur nächst höheren Oktave (zum Beispiel: *c—e—gis—*$\frac{his}{c}$).

Reihen wir dagegen 3 grosse natürliche Terzen an einander, so gelangen wir zu einem andern Resultate. Jeder natürliche Terzen- oder Sextenschritt führt uns, wie wir sahen, in eine andere Horizontalreihe des harmonischen Tongewebes; wir treten aus dem pythagoräischen Quintensystem heraus und gelangen zu Tönen, die wir in der Horizontalreihe, von der wir ausgingen, nicht vorfinden. — Einem Schritt von 3 grossen Terzen von $\overset{0}{c}$ aus entspricht im harmonischen Tongewebe das Bild

$$\begin{array}{cccc} & & & \overset{-3}{his} \\ & & \overset{-2}{gis} & \\ & \overset{-1}{e} & & \\ \overset{0}{c} & & & \end{array}$$

Setzen wir $\overset{0}{c} = 1$, so entspricht jedem grossen Terzenschritt eine Multiplikation mit $\frac{5}{4}$, es wird also $\overset{-3}{his} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64}$.

Die nächst höhere Oktave von $\overset{0}{c}$ ist $= 2 = \frac{128}{64}$, also höher als $\overset{-3}{his}$, und zwar um das Intervall $\frac{128}{64} : \frac{125}{64}$ oder $\frac{128}{125}$.

Während 3 an einander gereihte temperirte grosse Terzen zur nächst höheren Oktave führen, gelangen wir durch 3 natürliche grosse Terzenschritte nicht so weit; es fehlt noch das Intervall $\frac{128}{125}$ bis zur nächst höheren Oktave. Die natürliche grosse Terz $\frac{5}{4}$ ist also kleiner als der dritte Theil einer Oktave, und zwar um den dritten Theil des Intervalls $\frac{128}{125}$. Umgekehrt ist die temperirte grosse Terz um den dritten Theil des Intervalls $\frac{128}{125}$ zu gross gegenüber der natürlichen grossen Terz.

Diese Abweichung ist schon sehr merklich, bedeutend grösser als die Unreinheit der temperirten Quinte und Quarte. Wir werden später ein Mittel gewinnen, um diese verschiedenen Abweichungen leicht mit einander zu vergleichen.

Die temperirte kleine Sexte, als Umkehrung der temperirten grossen Terz, ist natürlich um eben dasselbe Intervall zu klein, um welches die temperirte grosse Terz zu gross ist.

Was endlich die temperirte kleine Terz betrifft, so ergänzt

dieselbe die allzu grosse temperirte grosse Terz zur temp. Quinte, die selbst wieder um etwas zu klein ist. Die temperirte kleine Terz wird daher von 2 Seiten zusammengedrängt und somit zu klein werden, und zwar wird sie gleichzeitig mit dem Fehler der temperirten grossen Terz und der Quinte behaftet sein. Auch hierauf werden wir später noch zurückkommen.

Die temperirte grosse Sexte ist um dasselbe Intervall zu gross, um welches die temperirte kleine Terz zu klein ist; denn die beiden Intervalle grosse Sexte und kleine Terz ergänzen sich ja zur Oktave.

Das ungefähre Urtheil, das wir durch obige einfache Ueberlegungen in Bezug auf die consonirenden Intervalle der temperirten Stimmung gewonnen haben, lässt sich also in folgender Weise kurz zusammenfassen:

Die temperirten Oktaven sind natürlich absolut rein, da man ja die Reinheit der Oktaven zum Ausgangspunkt nimmt.

Die temperirten Quinten und Quarten weichen von den reinen um ein sehr kleines, nahe an den Grenzen der Hörbarkeit liegendes Intervall ab. Die Quinten sind etwas zu klein, die Quarten etwas zu gross.

Bedeutend grösser ist die Unreinheit der temperirten grossen Terzen und kleinen Sexten. Die grosse Terz ist zu gross, die kleine Sexte zu klein.

Am grössten ist die Unreinheit der kleinen Terzen und grossen Sexten; die kleinen Terzen sind zu klein, die grossen Sexten zu gross.

26. Drei an einander gereihte reine grosse Terzen führen nicht zur höheren Oktave. Die kleine Diësis als Ueberschuss der Oktave über 3 grosse Terzen. Darstellung dieses Intervalls auf der Violine. — Kehren wir vom temperirten System wieder zum natürlichen zurück. — Wir sahen soeben, dass 3 natürliche grosse Terzen, wenn sie aneinandergereiht werden, nicht bis zur nächst höheren Oktave reichen, sondern um das Intervall $\frac{128}{125}$ hinter der Oktave zurück bleiben. Von c um eine grosse Terz aufwärts nach $\overset{-1}{e}$ schreitend, von $\overset{-1}{e}$ ebenso nach $\overset{-2}{gis}$ und von $\overset{-2}{gis}$ nach $\overset{-3}{his}$ fortschreitend, gelangten wir zu einem $\overset{-3}{his}$, das um $\frac{128}{125}$ tiefer war als die nächst höhere Oktave des Ausgangstons $\overset{0}{c}$.

Betrachten wir also z. B. das folgende Stück des harmonischen Tonsystems:

h^{-2}	fis^{-2}	cis^{-2}	gis^{-2}	dis^{-2}	ais^{-2}	eis^{-2}	his^{-2}
g^{-1}	d^{-1}	a^{-1}	e^{-1}	h^{-1}	fis^{-1}	cis^{-1}	gis^{-1}
es^{0}	b^{0}	f^{0}	c^{0}	g^{0}	d^{0}	a^{0}	e^{0}
ces^{+1}	ges^{+1}	des^{+1}	as^{+1}	es^{+1}	b^{+1}	f^{+1}	c^{+1}

und vergleichen wir die Töne der untersten Horizontalreihe mit den entsprechenden der obersten, so muss z. B. der Ton eis^{-2}, weil er um 3 grosse Terzenschritte von f^{+1} absteht, um das Intervall $\frac{128}{125}$ tiefer sein als die nächst höhere Oktave von f^{+1}. Ebenso muss ais^{-2} um das Intervall $\frac{128}{125}$ tiefer sein als die Oktave von b^{+1}, dis^{-2} um dasselbe Intervall tiefer als die Oktave von es^{+1} u. s. f. Denken wir uns also die Töne ces^{+1}, ges^{+1}, des^{+1}, as^{+1}, es^{+1}, b^{+1}, f^{+1}, c^{+1} der untersten Reihe um eine Oktave aufwärts versetzt, um sie in die engste Lage zu den entsprechenden Tönen der obersten Reihe zu bringen, so können wir sagen, dass

h^{-2} tiefer als ces^{+1}, fis^{-2} tiefer als ges^{+1},
cis^{-2} „ „ des^{+1}, gis^{-2} „ „ as^{+1},
dis^{-2} „ „ es^{+1}, ais^{-2} „ „ b^{+1},
eis^{-2} „ „ f^{+1}, his^{-2} „ „ c^{+1}
u. s. f.

ist, und zwar jeweilen um das ganze Intervall $\frac{128}{125}$.

Dieses sehr deutlich wahrnehmbare Intervall wird zuweilen mit dem Namen „kleine Diësis“ benannt. Es lässt sich sehr annähernd durch den einfacheren Bruch $\frac{43}{42}$ wiedergeben und ist beinahe doppelt so gross als ein syntonisches Komma und fast genau $\frac{1}{5}$ eines Ganztons, wie wir später sehen werden.

Auch die „kleine Diësis“ $\frac{128}{125}$ kann sich der Geiger auf seinem Instrumente leicht zurecht legen und hörbar machen. Er spiele zu

diesem Zwecke, nachdem die 4 Saiten der Geige vollkommen rein gestimmt sind, die folgenden Doppelgriffe tadellos rein:



Im Doppelgriffe 1 stimmt man das *e* als reine Quarte zur leeren *a*-Saite, im Doppelgriffe 2 stimmt man *cis* als reine kleine Terz zu dem eben gewonnenen *e*, in 3 lässt man das *cis* liegen ohne es anzustreichen und stimmt *f* als reine grosse Terz zum leeren *a*. Dieses *f* mit dem festgehaltenen *cis* des Doppelgriffs 2 gibt den Doppelgriff 4 als sog. verminderte Quarte. Will man dieses *cis* in das *des* übergehen lassen, welches mit dem *f* des Doppelgriffs 4 eine reine grosse Terz bildet, so hat man den Finger auf der *g*-Saite sehr merklich höher zu rücken und gelangt dadurch zu Doppelgriff 5. Der Unterschied zwischen *cis* und *des* in den Doppelgriffen 4 und 5 ist das Intervall $\frac{128}{125}$. Der Nachweis ist leicht in folgender Weise zu führen:

Das *cis* im obenstehenden Beispiele bildet mit der leeren *a*-Saite eine reine kleine Sexte ($\frac{8}{5}$). Setzen wir das *a* der leeren Saite $\overset{0}{a} = 1$, so wird also $cis = \frac{5}{8}$. Dagegen ist das *des* im letzten der obenstehenden Doppelgriffe um 2 reine grosse Terzen tiefer als das *a*, also in Bezug auf dieses gleich $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ zu setzen. Aus $cis = \frac{5}{8}$ und $des = \frac{16}{25}$ ergibt sich $\frac{des}{cis} = \frac{16}{25} : \frac{5}{8} = \frac{16}{25} \cdot \frac{8}{5} = \frac{128}{125}$, also in der That die kleine Diësis.

In genauerer Bezeichnungsweise ist das *cis* hier gleich $\overline{cis}$, das *des* gleich $\overset{+2}{des}$ zu setzen. Es ist von grossem Nutzen, sich bei derartigen Betrachtungen an die auf pag. 38 gegebene, oder noch besser an die diesem Abschnitte beigefügte Uebersicht des Tongewebes zu halten. Die Einsicht in den harmonischen Zusammenhang bietet oft Ersatz für eine Rechnung.

27. Vier aneinandergereihte reine kleine Terzen überragen die Oktave um die grosse Diësis. — Aehnlich, wie wir 3 natürliche grosse Terzen über einander aufgebaut haben, können wir es auch mit kleinen Terzen thun und untersuchen, ob es uns gelingt, durch Aneinanderreihen mehrerer kleiner

Terzen wenigstens annähernd zu einer höheren Oktave des Ausgangstons zu gelangen.

Nehmen wir z. B. $\overset{0}{\mathit{fis}}$ als Ausgangspunkt und schreiten wir um 4 kleine Terzen aufwärts, wie es in dem Bilde

$$\overset{0}{\mathit{fis}} \quad \overset{+1}{a} \quad \overset{+2}{c} \quad \overset{+3}{\mathit{es}} \quad \overset{+4}{\mathit{ges}}$$

dargestellt ist, so gelangen wir zu einem Tone $\overset{+4}{\mathit{ges}}$, der vom Ausgangspunkte $\overset{0}{\mathit{fis}}$ um das Intervall $\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = (\frac{6}{5})^4 = \frac{1296}{625}$ absteht. Der auf diese Weise gewonnene Ton $\overset{+4}{\mathit{ges}}$ ist höher als die Oktave des Ausgangstons $\overset{0}{\mathit{fis}}$, denn das Verhältniss von $\overset{+4}{\mathit{ges}}$ zu letzterer ist offenbar $\frac{1296}{625} : 2 = \frac{648}{625}$. Versetzen wir also den Ausgangston $\overset{0}{\mathit{fis}}$ um eine Oktave aufwärts, so können wir sagen, dass $\overset{+4}{\mathit{ges}}$ um das Intervall $\frac{648}{625}$ höher ist als $\overset{0}{\mathit{fis}}$. — Um dasselbe Intervall ist natürlich $\overset{+4}{\mathit{des}}$ höher als $\overset{0}{\mathit{cis}}$, $\overset{+4}{\mathit{as}}$ höher als $\overset{0}{\mathit{gis}}$, $\overset{+4}{\mathit{es}}$ höher als $\overset{0}{\mathit{dis}}$, $\overset{+4}{b}$ höher als $\overset{0}{\mathit{ais}}$, $\overset{+4}{f}$ höher als $\overset{0}{\mathit{eis}}$, u. s. f. —

Das Intervall $\frac{648}{625}$, um welches 4 aneinandergereihte kleine Terzen die Oktave überragen, wird zuweilen als „grosse Diësis" bezeichnet. Es lässt sich sehr annähernd durch den einfacheren Bruch $\frac{28}{27}$ ausdrücken und ist beinahe das 3 fache eines syntonischen Kommas und nahezu $\frac{1}{3}$ eines Ganztons.

28. Die 3 Hauptrichtungen des harmonischen Gewebes. Zirkel der Quinten, der grossen und der kleinen Terzen. — Wir können im harmonischen Tonsystem oder vielmehr in der gewählten Form seiner Darstellung nach Vorigem 3 Hauptrichtungen unterscheiden *):

1. Die Richtung von links nach rechts, von West nach Ost, oder die Richtung der aufsteigenden Quinten.

*) Siehe die Uebersicht am Schlusse dieses Abschnittes.

2. Die Richtung von links unten nach rechts oben, von Südwest nach Nordost, oder die Richtung der aufsteigenden grossen Terzen.

3. Die Richtung von links oben nach rechts unten, von Nordwest nach Südost, oder die Richtung der aufsteigenden kleinen Terzen.

Diese 3 Hauptrichtungen und ihre Umkehrungen (denen die umgekehrten Intervalle entsprechen) können gleichsam als die Fundamental-Axen des Tonsystems aufgefasst werden.

Annähernd mit demselben Rechte, mit dem man von einem Quintenzirkel von 12 aneinandergereihten Quinten spricht, könnte man von einem Zirkel von 3 grossen Terzen und einem Zirkel von 4 kleinen Terzen sprechen. Keiner dieser Zirkel verdient, streng genommen, seinen Namen, denn keiner schliesst sich genau. Der Quintenzirkel ergibt als Ueberschuss das pythagoräische Komma, der Zirkel der grossen Terzen als Defizit die „kleine Diësis“ und der Zirkel der kleinen Terzen als Ueberschuss die „grosse Diësis“.

Im System der gleichschwebenden Temperatur sind alle diese Unterschiede ausgeglichen; dort schliessen sich alle drei genannten Zirkel genau.

29. Die Streitfrage, ob *cis* höher oder tiefer als *des*, *dis* höher oder tiefer als *es* u. s. w. sei, kann in so allgemeiner Form nicht beantwortet werden, da sie völlig unbestimmt ist. Sie muss von Fall zu Fall entschieden werden. — Wir haben oben gesehen, dass innerhalb des pythagoräischen Quintensystems, d. h. wenn wir uns nur in horizontaler Richtung innerhalb des Tongewebes bewegen, die erhöhten Töne *cis*, *dis*, *eis*, *fis*, *gis*, *ais*, ..., auf die wir stossen, wesentlich höher sind als die entsprechenden vertieften *des*, *es*, *(f)*, *ges*, *as*, *b*, ... Bewegten wir uns dagegen in einer der beiden andern Hauptrichtungen, entweder in der Richtung der grossen oder der kleinen Terzen, so verhielt sich die Sache gerade umgekehrt; dort fanden wir die erhöhten Töne durchweg um ein Beträchtliches tiefer als die entsprechenden vertieften.

Es geht daraus hervor, dass die so beliebte Streitfrage: „Ist *cis* höher oder tiefer als *des*? *dis* höher oder tiefer als *es*?“ u. s. f. nicht zu beantworten ist, wenn sie in so allgemeiner Form gestellt wird. Die erste Antwort auf diese Frage müsste wieder

eine Frage sein: „Was verstehen Sie unter *cis*? was unter *des*? Welches *cis* und welches *des* meinen Sie?“ Und dann würde in der Regel an den Tag kommen, dass der also Befragte in der Meinung befangen ist, es gebe nur ein *cis* und nur ein *des*, die Töne *c*, *d*, *e*, u. s. w. seien absolut fest, und es handle sich nur darum, zwischen *cis* und *des*, zwischen *dis* und *es* u. s. w. zu unterscheiden, um der Bedingung absoluter Reinheit aller Intervalle zu genügen. An diesem Irrthum mag wohl unsere — auf das pythagoräische Quintensystem sich gründende — Notenschrift die Hauptschuld tragen; er ist merkwürdiger Weise selbst unter sehr gebildeten Musikern weit verbreitet. —

Von keiner Tonbezeichnung kann man sagen, ob sie einen höheren oder tieferen Ton bezeichne als eine andere, wenn man nicht beide auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt bezieht und genau angibt, auf welchem Wege man zu den zu vergleichenden Tonbezeichnungen gelangt ist.

Sowohl die gemeinhin als fest angenommenen Töne *c*, *d*, *e*, *f*, . . . als die chromatisch erhöhten und vertieften Töne *cis*, *dis*, *eis*, *fis*, ..., *ces*, *des*, *es*, *fes*, ... sind vieldeutig; alle in der Musik üblichen Tonbezeichnungen sind vieldeutig. Nur der willkürlich gewählte Ausgangspunkt ist fest und nur die Beziehungen der einzelnen Töne zu diesem festen Ausgangspunkte bringen völlige Klarheit und Bestimmtheit in den sonst unlösbaren Wirrwar.

30. Betrachtung eines speziellen Falles: der Dominantseptimenakkord und der übermässige Sextakkord. Melodische Abweichungen vom harmonischen Prinzip. — Bei Sängern und Violinspielern findet man sehr häufig die Meinung vertreten, es sei ein für alle Mal *cis* höher als *des*, *dis* höher als *es* u. s. f. Auch in einzelnen Lehrbüchern der Harmonielehre findet man zuweilen diese Ansicht als die einzig richtige hingestellt, während die meisten Bücher über die Elemente der Harmonik entweder den entgegengesetzten Standpunkt einnehmen oder der heikeln Frage ganz aus dem Wege gehen. — Es ist vielleicht hier der Ort, der Sache genauer auf den Grund zu gehen und an der Hand eines Beispiels zu untersuchen, ob und in wiefern den beiden sich schroff gegenüberstehenden Ansichten eine Berechtigung zukommt. Trotzdem wir jetzt schon wissen, dass ein allgemein gültiger Spruch niemals wird gefällt werden können, ist doch nicht ohne Weiteres anzunehmen,

jede der beiden Ansichten sei gänzlich willkürlich und aus der Luft gegriffen.

Es möge hier als Ausgangspunkt ein Beispiel genommen werden, auf welches sich Jadassohn in seinem Lehrbuche der Harmonie (Leipzig, Breitkopf und Härtel, 3. Aufl. pag. 3) beruft, um seine Ansicht, *dis* sei höher als *es* u. s. f., zu stützen.

Jadassohn geht aus von den folgenden beiden Akkord-Auflösungen:



Der Dominantsept-Akkord 1 löst sich nach *b*-dur auf, in den Dreiklang 2; hierbei sinkt das *es* nach *d*. Der übermässige Terzquintsext-Akkord 3 dagegen löst sich nach *a*-moll auf, in den Dreiklang 4; hierbei steigt *dis* nach *e*. Daraus, dass in 1 *es* nicht nach *e* steigt, sondern nach *d* sinkt, wird geschlossen, dass *es* näher bei *d* liege als bei *e*; und ebenso wird daraus, dass in 3 *dis* sich aufwärts nach *e* und nicht abwärts auflöst, geschlossen, dass *dis* näher bei *e* liege als bei *d*.

In 1 ist das *es* die innerhalb der Tonart *b*-dur liegende kleine Septime der Dominante *f*; im Terzquintsext-Akkord 3 dagegen ist die übermässige Sexte *dis* als Leitton zur Dominante *e* von *a*-moll aufzufassen. Dadurch ist die relative Höhe sowohl von *es* als von *dis* für diesen Fall in harmonischer Beziehung vollkommen bestimmt.

Die Tonart *b*-dur ist dargestellt durch

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{-1}{g} & & \overset{-1}{d} & & \overset{-1}{a} & \\ \overset{0}{es} & & \overset{0}{b} & & \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} \end{array}$$

Die Dominantseptime $\overset{0}{es}$ im Dreiklange 1 ist also die zweite Unterquinte von $\overset{0}{f}$, um 2 Oktaven aufwärts versetzt, d. h. gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{16}{9}$, von $\overset{0}{f}$ aus gemessen. Beim Uebergang von Akkord 3 zu Akkord 4 sinkt dasselbe $\overset{0}{f}$ um einen grossen Halb-

tonschritt $\frac{16}{15}$ abwärts nach *e* (also nach $\overset{-1}{e}$); die übermässige Sexte *dis* in Akkord 3 steigt dagegen um dasselbe Intervall von $\frac{16}{15}$ nach der höheren Oktave von *e*. Daraus folgt, dass die übermässige Sexte *f dis* in Akkord 3 um 2 Halbtonschritte von je $\frac{16}{15}$ kleiner ist als eine reine Oktave 2, also gleich $2 : (\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15}) = 2 : \frac{256}{225}$ oder gleich $\frac{225}{128}$. Die Dominantseptime *es*, verglichen mit der übermässigen Sexte *dis*, führt also zu dem Verhältniss

$$\frac{es}{dis} = \frac{16}{9} \cdot \frac{128}{225} = \frac{2048}{2025}$$

es ist also in diesem Beispiele höher als *dis* und zwar um das Intervall $\frac{2048}{2025}$, das sich (wie man durch Kettenbruch-Entwicklung findet) mit sehr grosser Annäherung durch den einfacheren Bruch $\frac{89}{88}$ ersetzen lässt.

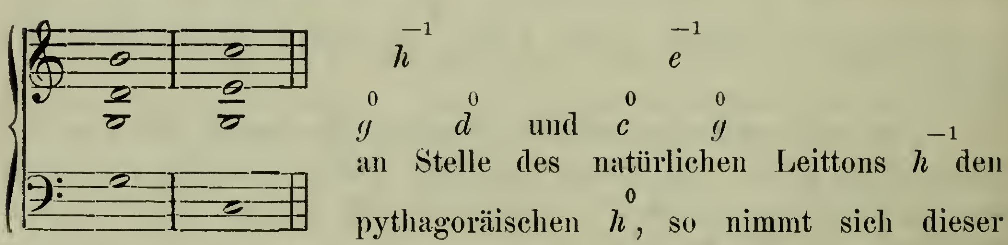
Das vorstehende Beispiel zeigt nebenbei, dass man mit genau demselben Rechte, mit dem man von einem aufwärts strebenden Leitton spricht, in gewissen Fällen von einem abwärts strebenden Leitton sprechen darf. Bei der Verbindung von Akkord 1 mit 2 ist $\overset{0}{es}$ ein nach $\overset{-1}{d}$ abwärts strebender Leitton, und ebenso ist bei der Verbindung von Akkord 3 mit 4 das $\overset{0}{f}$ ein nach $\overset{-1}{e}$ abwärts strebender Leitton.

Vom Standpunkte der reinen Harmonie aus ergibt sich also unwiderleglich, dass — in diesem speziellen Falle — *dis* tiefer ist als *es*. Damit scheint auch die Frage für den vorliegenden Fall unzweideutig erledigt zu sein. —

So einfach und klar obige Beweisführung ist, so ist sie doch von einem Standpunkte aus anzufechten, der uns bisher ferner lag, der aber auch Berücksichtigung verlangt. In der reinen Melodik nämlich macht sich häufig das Bedürfniss geltend, einzelne Töne etwas anders zu nehmen, als die Harmonie es verlangt. Es betrifft dies vornehmlich solche Töne, die, sei es nach oben oder nach unten, um einen halben Ton fortschreiten, also z. B. den Leitton, der nach der Tonika hin aufwärts strebt, oder die Dominantseptime, welche sich nach unten aufzulösen pflegt. In beiden Fällen macht sich deutlich die Tendenz bemerkbar, den Halbtonschritt merklich kleiner zu nehmen als es dem Verhältniss $\frac{16}{15}$ entspricht und als die Harmonie es verlangt, und zwar dadurch, dass man den fraglichen

Ton nach der Richtung hin verschiebt, nach der er sich auflöst. Der Leitton wird also nach der Tonika zu erhöht, die Dominantseptime dagegen umgekehrt erniedrigt. Die Melodie stellt sich hier in einen gewissen Gegensatz zu den Erfordernissen der Harmonie. Welchem Einflusse dieser Gegensatz zuzuschreiben ist, soll hier zunächst nicht weiter untersucht werden. Es genügt vorläufig, auf die Existenz dieses Gegensatzes hinzudeuten. — Auf dem später zu besprechenden Eitz'schen Harmonium hatte der Verfasser Gelegenheit, 3 verschiedene Leittonschritte mit einander zu vergleichen: den grossen natürlichen $\overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$, den pythagoräischen $\overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$ und den um ein Komma kleineren $\overset{+1}{h}\ \overset{0}{c}$. Der letzte war entschieden zu klein, der natürliche $\overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$ zu gross, und bei weitem am besten klang bei melodischer Folge der pythagoräische Leittonschritt $\overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$. Dass der Verfasser in seiner Empfindung nicht vereinzelt dasteht, scheint ihm daraus hervorzugehen, dass er nie einen Geiger oder einen Sänger traf, der den Leittonschritt grösser nahm, als es seinem Gefühle zusagte. Er glaubt deshalb den pythagoräischen Leittonschritt als denjenigen bezeichnen zu dürfen, der in der Melodie der natürliche ist.

Nimmt man jedoch in der Akkordfolge



$\overset{0}{g}\ \overset{-1}{h}\ \overset{0}{d}$ und $\overset{0}{c}\ \overset{-1}{e}\ \overset{0}{g}$ an Stelle des natürlichen Leittons $\overset{-1}{h}$ den pythagoräischen $\overset{0}{h}$, so nimmt sich dieser harmonisch recht hart aus; er nimmt dem *g*-dur-Dreiklang seinen Wohllaut und lässt ihn als auflösungsbedürftig erscheinen. Die Bedürfnisse der Melodie gerathen also hier in Konflikt mit denjenigen der Harmonie, und es wird vom Verhältniss des Werthes, den man im einzelnen Falle der Melodie einerseits, der Harmonie andererseits beimisst, abhängen, in welchem Grade man den Bedürfnissen der einen oder der andern Rechnung trägt. Bei einer Solostimme, die sich von der begleitenden harmonischen Unterlage wesentlich abhebt, werden die Erfordernisse der Melodieführung in erster Linie massgebend sein, bei einem auf einheitliche harmonische Wirkung berechneten Stücke für Harmonium oder Orgel oder bei reinem Chorgesang werden dagegen harmonische Rücksichten ihre Rechte geltend machen. —

Im übermässigen Sextakkord tritt die übermässige Sexte als aufwärts strebender Leitton auf, sie kann also im melodischen Sinne eine Erhöhung um ein Komma ertragen und zwar um so mehr, als der übermässige Sextakkord auch bei harmonisch reiner Abstimmung dissonirend ist.

Im Dominantseptakkord tritt die Dominantseptime als abwärts strebender Leitton auf. Versuche auf einem rein gestimmten Harmonium beweisen, dass auch dieser Leittonschritt eine Verkleinerung um ein Komma sehr wohl erträgt und zwar hier sowohl melodisch als harmonisch. Bei dieser Vertiefung gewinnt sogar der Dominantseptakkord an Wohllaut, da er sich dadurch dem sog. natürlichen Septakkord nähert (s. später). Dagegen ist eine noch weitergehende Erniedrigung in melodischen Gängen nicht zulässig. Auch hier ergibt sich der pythagoräische Leittonschritt als der beste in melodischer Beziehung.

Bei Erhöhung der übermässigen Sexte und Vertiefung der Dominantseptime um je ein Komma kehrt sich nun das Verhältniss zwischen *es* und *dis* um, und Jadassohn hat also in diesem Falle vom melodischen Standpunkt aus vollständig recht. Unrichtig ist es dagegen, aus diesem Beispiele Schlüsse zu ziehen, welche allgemeine Gültigkeit beanspruchen. Gerade der Leitton und die Dominantseptime sind Töne, für welche eine genaue Fixirung, die für alle Fälle gelten soll, am allerwenigsten durchführbar ist. An solche Töne Behauptungen zu knüpfen, welche Anspruch darauf machen, als ausnahmsloses Gesetz zu gelten, ist jedenfalls bedenklich. —

31. Die Tonschritte der verschieden abgestimmten Leitern. Der grosse und kleine Ganzton, der grosse Halbton und der pythagoräische Halbton. Die pythagoräischen Tonleitern zeigen einen einfacheren stufenweisen Aufbau als die harmonisch abgestimmten. — Wenn man sich auf den rein harmonischen Standpunkt stellt, so ist es natürlich und sachgemäss, die Stufen einer Tonleiter vorzugsweise auf die Tonika der Leiter als deren Ausgangspunkt und harmonischen Mittelpunkt zu beziehen und demgemäss die Intervalle der Leiter stets vom Grundton aus zu messen, wie es bisher vorzugsweise geschah. Betrachtet man dagegen die Tonleitern vom Standpunkt des Fortschreitens in einzelnen Tonschritten aus, d. h. vom Standpunkt der Melodie, so ist es näherliegend, die Grösse dieser einzelnen Tonschritte mit einander zu vergleichen. Wir werfen daher nochmals einen Blick

auf die verschiedenen oben entwickelten Tonleitern, stellen dieselben nebst den relativen Schwingungszahlen der einzelnen Töne hin und bilden durch Division die Intervalle zwischen je zwei Nachbartönen.

Dur:

Natürlich-harmonisch:															
	0		0		−1		0		0		−1		−1		0
	c		*d*		*e*		*f*		*g*		*a*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

Pythagoräisch:															
	0		0		0		0		0		0		0		0
	c		*d*		*e*		*f*		*g*		*a*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{81}{64}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	

Moll:

Harmonisch

Nach der Musiktheorie:															
	0		0		+1		0		0		+1		−1		0
	c		*d*		*es*		*f*		*g*		*as*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{8}{5}$		$\frac{15}{8}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{75}{64}$		$\frac{16}{15}$	

Pythagoräisch:															
	0		0		0		0		0		0		0		0
	c		*d*		*es*		*f*		*g*		*as*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{32}{27}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{128}{81}$		$\frac{243}{128}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{256}{243}$	

Moll:

aufsteigend melodisch:

Nach der Musiktheorie:															
	0		0		+1		0		0		−1		−1		0
	c		*d*		*es*		*f*		*g*		*a*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

Pythagoräisch:															
	0		0		0		0		0		0		0		0
	c		*d*		*es*		*f*		*g*		*a*		*h*		*c*
	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{32}{27}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$		2
Tonschritte:		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	

Moll:

absteigend melodisch

Nach der Musiktheorie:	$\overset{0}{c}$	$\overset{+1}{b}$	$\overset{+1}{as}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{+1}{es}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{c}$
	2	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{8}$	1
Tonschritte:	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	
Pythagoräisch:	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{b}$	$\overset{0}{as}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{es}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{c}$
	2	$\frac{16}{9}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$.	1
Tonschritte:	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	

Fassen wir die einzelnen Tonschritte der verschiedenen Leitern ins Auge, so finden wir — abgesehen von dem nur in der harmonischen Molltonleiter vorkommenden sog. übermässigen Sekundschritte (*as* — *h*) — vier verschiedene Schritte: Den sog. grossen Ganzton $\frac{9}{8}$, den kleinen Ganzton $\frac{10}{9}$, den grossen Halbton $\frac{16}{15}$ und den pythagoräischen Halbton $\frac{256}{243}$.

Die nach rein harmonischem Prinzipe aufgebauten Leitern der Musiktheorie zeigen einen fortwährenden Wechsel von 3 verschiedenen Tonschritten: $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{16}{15}$. Die pythagoräischen Leitern begnügen sich mit 2 Tonschritten: $\frac{9}{8}$ und $\frac{256}{243}$, die nach einem einfachen Gesetze mit einander abwechseln. Der Halbtonschritt $\frac{256}{243}$ ist dem pythagoräischen Systeme eigenthümlich; es ist derselbe Schritt, den wir oben als den in der Melodie üblichen Leittonschritt hinstellten. Dieser letztere Umstand sowie der einfachere stufenweise Aufbau der pythagoräischen Leitern verleihen diesen ein entschiedenes melodisches Uebergewicht.

32. Zusammenstellung der wichtigeren Intervalle innerhalb des Umfanges einer Oktave. — Die nachfolgende Uebersicht enthält einige der wichtigeren theils in der musikalischen Praxis, theils in der Musiktheorie vorkommenden Intervalle nebst ihren relativen Schwingungsmaassen und ihrer in der Musik üblichen Benennung. Als Ausgangspunkt der Intervallmessung sei der Ton $\overset{0}{c}$ genommen. Ein Blick auf die auf pag. 38 gegebene Uebersicht des harmonischen Tongewebes genügt, um die relative Stellung der beiden das Intervall begrenzenden Töne erkennen zu lassen. Je zwei sich zur Oktave ergänzende Intervalle stehen in derselben Horizontallinie.

Sekunden:

klein	pythagoräisch:	$\overset{0}{des}$	$\frac{256}{243}$
	grosser Halbton:	$\overset{+1}{des}$	$\frac{16}{15}$
gross	kleiner Ganzton:	$\overset{-1}{d}$	$\frac{10}{9}$
	grosser Ganzton:	$\overset{0}{d}$	$\frac{9}{8}$
	übermässig:	$\overset{-2}{dis}$	$\frac{75}{64}$

Terzen:

	vermindert:	$\overset{+2}{eses}$	$\frac{256}{225}$
klein	pythag.:	$\overset{0}{es}$	$\frac{32}{27}$
	natürlich:	$\overset{+1}{es}$	$\frac{6}{5}$
gross	natürlich:	$\overset{-1}{e}$	$\frac{5}{4}$
	pypthag:	$\overset{0}{e}$	$\frac{81}{64}$

Quarten:

vermindert:	$\overset{+2}{fes}$	$\frac{32}{25}$
rein:	$\overset{0}{f}$	$\frac{4}{3}$
unrein:	$\overset{+1}{f}$	$\frac{27}{20}$
übermässig:	$\overset{-1}{fis}$	$\frac{45}{32}$

Septimen:

gross	pythag. Leitton:	$\overset{0}{h}$	$\frac{243}{128}$
	harm. Leitton:	$\overset{-1}{h}$	$\frac{15}{8}$
klein	weit:	$\overset{+1}{b}$	$\frac{9}{5}$
	eng, pythag.:	$\overset{0}{b}$	$\frac{16}{9}$
	vermindert:	$\overset{+2}{bb}$	$\frac{128}{75}$

Sexten:

	übermässig:	$\overset{-2}{ais}$	$\frac{225}{128}$
gross	pythag.:	$\overset{0}{a}$	$\frac{27}{16}$
	natürl.:	$\overset{-1}{a}$	$\frac{5}{3}$
klein	natürl.:	$\overset{+1}{as}$	$\frac{8}{5}$
	pypthag.:	$\overset{0}{as}$	$\frac{128}{81}$

Quinten:

übermässig:	$\overset{-2}{gis}$	$\frac{25}{16}$
rein:	$\overset{0}{g}$	$\frac{3}{2}$
unrein:	$\overset{-1}{g}$	$\frac{40}{27}$
vermindert:	$\overset{+1}{ges}$	$\frac{64}{45}$

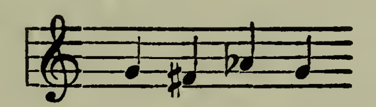
Zu dieser Uebersicht ist Folgendes zu bemerken:

Die sog. „unreine“ Quinte ist die um ein syntonisches Komma zu kleine Quinte, die sich auf der 2. Stufe der harmonisch aufgebauten Durtonleiter findet. Die „unreine“ Quarte ist ihre Umkehrung, um ein syntonisches Komma grösser als die reine Quarte.

Die verminderte Quinte $\frac{64}{45}$ findet sich auf der 7. Stufe der natürl. harmonischen Durtonleiter und der theoretischen aufsteigenden Molltonleiter, sowie auf der 2. Stufe der harmonischen Molltonleiter der Theorie; ihre Umkehrung ist die übermässige Quarte, der sog. Tritonus der älteren Musiktheorie, bestehend aus 3 Ganztönen, zwei grossen und einem kleinen. ($\frac{45}{32} = \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8}$; der Tritonus des pythag. Systems dagegen besteht aus drei grossen Ganztönen $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}$.)

Die übermässige Quinte $\frac{25}{16}$ besteht aus 2 grossen an einander gereihten Terzen; sie findet sich z. B. auf der 3. Stufe der theoretischen harmonischen Molltonleiter. Ihre Umkehrung ist die verminderte Quarte.

Die verminderte Terz $\frac{256}{225}$ besteht aus 2 aneinandergereihten grossen Leittonschritten; sie kommt nicht selten in melodischen Wendungen vor, z. B. in



als Intervall zwischen *fis* und *as*. Bei der praktischen Ausführung derartiger Phrasen pflegen die beiden Leittonschritte annähernd um je ein Komma enger genommen zu werden, so dass die verminderte Terz der Praxis um circa 2 Kommata kleiner erscheint, als das theoretische Intervall $\frac{256}{225}$. Die Umkehrung der verminderten Terz ist die im sog. „übermässigen Sextakkord“ auftretende übermässige Sexte, die in der Praxis weiter genommen zu werden pflegt, als es dem oben angegebenen Zahlenverhältniss entspricht.

Die übermässige Sekunde $\frac{75}{64}$ lernten wir schon oben als Intervall zwischen der 6. und 7. Stufe der harmonischen Molltonleiter kennen. Ihre Umkehrung, die verminderte Septime ist das charakteristische Intervall des verminderten Septimenakkords. Sie besteht aus einer verminderten Quinte, an die eine kleine Terz gereiht wird.

Die engere kleine Septime $\frac{16}{9}$ ist die in der Tonart liegende Septime des Dominantseptakkords.

33. Der kleine oder chromatische Halbton. Die enharmonische Tonleiter. Die chromatischen Tonleitern. Apotome und Limma. — Ausser den schon angeführten Halbtönen spielt ein noch kleineres Intervall eine gewisse Rolle, welches sich als Unterschied zwischen der natürlichen grossen und kleinen Terz ergibt. Durch Division von $\frac{5}{4}$ durch $\frac{6}{5}$ findet man dieses Intervall gleich $\frac{25}{24}$; man nennt es den kleinen Halbton oder auch chromatischen Halbton. So ist z. B. das Intervall $\overset{0}{c}$ — $\overset{-2}{cis}$ ein kleiner Halbton. Indem man diesen Halbtonschritt jeder Tonstufe der natürlichen harmonischen Durtonleiter sowohl nach oben als nach unten anfügte, bildete man die sog. enharmonische Tonleiter von 21 Tonstufen innerhalb der Oktave. Daraus dass $\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9}$, also ein kleiner Ganzton in einen grossen und einen kleinen Halbton zerlegbar ist, folgt, dass zwei kleine Halbtonschritte zusammengenommen immer kleiner sind als ein Ganztonschritt. Das *cis* dieser enharmonischen Leiter wird also tiefer sein müssen als das *des*; ebenso das *dis* tiefer als das *es* u. s. f. Zwei kleine Halbtöne zusammengenommen sind aber grösser als ein grosser Halbton ($\frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} > \frac{16}{15}$); in Folge dessen muss *eis* höher werden als *fes* und *his* höher als *ces*. Die 21 Stufen der enharmonischen Tonleiter, nach ihrer Höhe geordnet, werden also sein:

c cis des d dis es e fes eis f fis ges g gis as a ais b h ces his

Die Einführung dieser enharmonischen Tonleiter war von rein theoretischem und zwar von recht zweifelhaftem Werthe. Weder vom melodischen noch vom harmonischen Standpunkt aus ist ihr eine grössere Bedeutung zuzuerkennen.

Werden die Ganztöne der normalen Durtonleiter durch Einschiebung von nur einer Zwischenstufe (entweder *cis, dis, fis, gis, ais* oder *des, es, ges, as, b*) in zwei Theile getheilt, so erhält man die sog. chromatische Tonleiter in zwei verschiedenen Formen:

c cis d dis e f fis g gis a ais h c

und

c des d es e f ges g as a b h c

Die chromatischen Tonleitern der Praxis, als wesentlich melodische Gebilde, bedienen sich pythagoräischer Intervalle und speziell des pythagoräischen Leittonschrittes in der Weise, dass z. B. der Uebergang von $\overset{0}{c}$ nach $\overset{0}{d}$ durch $\overset{0}{cis}$ vermittelt wird, der umgekehrte Schritt abwärts von $\overset{0}{d}$ nach $\overset{0}{c}$ dagegen durch $\overset{0}{des}$. Die aufwärtssteigende chromatische Tonleiter der Melodik wird also — bei ungebundener Intonation — lauten:

$\overset{0}{c}$ $\overset{0}{cis}$ $\overset{0}{d}$ $\overset{0}{dis}$ $\overset{0}{e}$ $\overset{0}{f}$ $\overset{0}{fis}$ $\overset{0}{g}$ $\overset{0}{gis}$ $\overset{0}{a}$ $\overset{0}{ais}$ $\overset{0}{h}$ $\overset{0}{c}$;

die abwärts steigende Leiter dagegen:

$\overset{0}{c}$ $\overset{0}{h}$ $\overset{0}{b}$ $\overset{0}{a}$ $\overset{0}{as}$ $\overset{0}{g}$ $\overset{0}{ges}$ $\overset{0}{f}$ $\overset{0}{e}$ $\overset{0}{es}$ $\overset{0}{d}$ $\overset{0}{des}$ $\overset{0}{c}$,

wobei alle Töne einem pythagoräischen Quintensystem entnommen sind (in der absteigenden chromatischen Leiter wird häufig $\overset{0}{ges}$ durch $\overset{0}{fis}$ ersetzt). —

Im Gegensatz zu den enharmonischen und chromatischen Leitern bezeichnet man die gewöhnlichen Leitern als diatonische.

In der chromatischen Tonfolge $\overset{0}{c}$ $\overset{0}{cis}$ $\overset{0}{d}$ hat man 2 verschiedene Tonschritte: der erste $\overset{0}{c}$ $\overset{0}{cis}$ heisst „Apotome", der zweite $\overset{0}{cis}$ $\overset{0}{d}$ dagegen „Limma". $\overset{0}{cis}$ ist aus $\overset{0}{c}$ durch 7 Quintenschritte aufwärts und 4 Oktavenschritte abwärts zu gewinnen, bildet also mit $\overset{0}{c}$ das Intervall $\left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$. Das „Limma" ist identisch mit dem pythagoräischen Halbton $\frac{256}{243}$. Apotome und Limma ergänzen sich zum grossen Ganzton: $\frac{2187}{2048} \cdot \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$. In der absteigenden chromatischen Tonfolge $\overset{0}{d}$ $\overset{0}{des}$ $\overset{0}{c}$ liegt die Apotome zwischen $\overset{0}{d}$ und $\overset{0}{des}$, das Limma, als absteigender pythagoräischer Leittonschritt, zwischen $\overset{0}{des}$ und $\overset{0}{c}$.

Es muss hier übrigens bemerkt werden, dass die sämmtlichen der griechischen Sprache entnommenen Intervall-Bezeichnungen: Apotome (ἀποτομή) Limma (λεῖμμα), grosse und kleine Diësis u. s. f. (allenfalls mit Ausnahme der beiden Kommata), von verschiedenen Musik-Autoren nicht immer in demselben Sinne angewandt werden.

Es herrscht in dieser Beziehung ein ziemlicher Wirrwarr, der wohl daher rühren mag, dass altgriechische Bezeichnungen oft in etwas willkürlicher Weise von Intervallen des altgriechischen Tonsystems auf ähnliche Intervalle des modernen harmonischen Systems übertragen wurden, ohne dass dadurch die ältere Bedeutung dieser Bezeichnungen ganz ausser Kurs kam.

Uebrigens reichen alle diese Bezeichnungen noch lange nicht aus, sobald man über die allernächstliegenden Intervalle des harmonischen Tonsystems hinausgeht. Karl Eitz hat in seiner ausserordentlich klaren Schrift über das „mathematisch-reine Tonsystem“ eine Nomenclatur vorgeschlagen, die sehr klar und logisch aufgebaut ist, aber sehr fremdartig lautet. Wer weiss, wie zäh die Musiker an den Bezeichnungen festhalten, an die sie gewöhnt sind und die sich im Laufe von Jahrhunderten einbürgerten und festsetzten, wird kaum erwarten, dass eine neue Benennung der Intervalle sich in der Praxis so leicht einbürgert, mag sie auch noch so klar und logisch sein.

34. Enharmonische Verwechslungen. Das Schisma und die schismatische Vertauschung. — In der Musik bezeichnet man bekanntlich eine Vertauschung von *cis* und *des*, von *dis* und *es*, u. s. w. als enharmonische Verwechslung. In allen bisher betrachteten Fällen fanden wir zwischen den erhöhten Tönen *cis*, *dis*, *eis*, *fis*, *gis*, *ais*, (*h*) einerseits und den entsprechenden vertieften *des*, *es*, (*f*), *ges*, *as*, *b*, *ces* andrerseits so beträchtliche Unterschiede im einen oder andern Sinne, dass von einer wirklichen Vertauschungsfähigkeit in strengem Sinne nicht die Rede sein konnte. Der Unterschied betrug stets entweder ein Komma, oder eine Diësis oder ein Intervall von ähnlicher Grösse, und auch in der enharmonischen Tonleiter der Theorie kann von Vertauschungsfähigkeit nicht gesprochen werden. Im temperirten System freilich sind alle diese Unterschiede verwischt, was zwar einerseits eine gewisse Verflachung mit sich bringt, aber andrerseits für die Freiheit der Modulation ausserordentlich fördernd ist.

Indessen gibt es doch auch im reinen Tonsystem Tonpaare, die vertauschungsfähig sind, und enharmonische Verwechslungen, die auch das empfindlichste Ohr nicht verletzen werden. Zu solchen Tonpaaren gelangen wir in folgender Weise:

Gehen wir von irgend einem Ausgangspunkte, z. B. von $\overset{0}{c}$ aus, nach 3 Richtungen hin, und zwar erstens um eine natürliche

grosse Terz aufwärts nach $\overset{-1}{e}$; zweitens um 8 Quintenschritte abwärts nach $\overset{0}{fes}$, und drittens um 4 Quintenschrittte aufwärts nach $\overset{0}{e}$, wie das folgende Bild zeigt:

$$\begin{matrix} & & & & & & & & \overset{-1}{e} & & & & \\ \overset{0}{fes} & \overset{0}{ces} & \overset{0}{ges} & \overset{0}{des} & \overset{0}{as} & \overset{0}{es} & \overset{0}{b} & \overset{0}{f} & \overset{0}{c} & \overset{0}{g} & \overset{0}{d} & \overset{0}{a} & \overset{0}{e} \end{matrix}$$

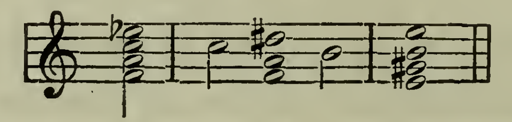
Vergeichen wir die 3 äussersten Töne: $\overset{-1}{e}$, $\overset{0}{e}$ und $\overset{0}{fes}$ unter einander, so wissen wir: erstens, dass $\overset{-1}{e}$ um das syntonische Komma $\frac{81}{80}$ tiefer ist als $\overset{0}{e}$, und zweitens, dass $\overset{0}{fes}$ um das pythagoräische Komma tiefer ist als derselbe Ton $\overset{0}{e}$ (natürlich immer abgesehen von Oktaven-Unterschieden). Daraus folgt aber sofort, das $\overset{-1}{e}$ sich vom $\overset{0}{fes}$ genau um dasselbe Intervall unterscheiden wird, um welches das pythagoräische Komma grösser ist als das syntonische. Dieses Intervall ist das sog. Schisma; in Bruchform ausgedrückt kann es gleich $\frac{887}{886}$ gesetzt werden. Es ist ungefähr 12 mal kleiner als ein (pythag.) Komma und so klein, dass es von einem sehr geübten Ohre nur bei grösster Aufmerksamkeit wahrgenommen werden kann.

† Der genaue Werth des pythagoräischen Kommas war $\frac{531441}{524288}$. Dividirt man diesen Werth durch $\frac{81}{80}$, so ergibt sich für das Schisma der Bruch $\frac{32805}{32768}$, dessen zwei ersten Näherungswerthe $\frac{886}{885}$ und $\frac{887}{886}$ sind; zwischen diesen beiden Werthen liegt der genaue Werth des Schismas. †

Es ist $\overset{-1}{e}$ um das Schisma höher als $\overset{0}{fes}$; ganz ebenso ist natürlich $\overset{-1}{h}$ um das Schisma höher als $\overset{0}{ces}$, $\overset{-1}{fis}$ um das Schisma höher als $\overset{0}{ges}$ u. s. w. Allgemein ist die grosse natürliche Oberterz eines Tones — von Oktavenunterschieden abgesehen — um das Schisma höher als dessen 8. Unterquinte. Diesen Unterschied kann man in der praktischen Musik vernachlässigen, und man ist berechtigt $\overset{-1}{e}$ und $\overset{0}{fes}$, $\overset{-1}{h}$ und $\overset{0}{ces}$, $\overset{-1}{fis}$ und $\overset{0}{ges}$, $\overset{-1}{cis}$ und $\overset{0}{des}$, $\overset{-1}{gis}$ und $\overset{0}{as}$, $\overset{-1}{dis}$ und $\overset{0}{es}$, $\overset{-1}{ais}$ und $\overset{0}{b}$, u. s. f. als voll-

kommen vertauschungsfähig zu betrachten. Eine derartige enharmonische Verwechslung ist durchaus legitim; man bezeichnet sie als schismatische Vertauschung. Von ihr wird in Praxis und Theorie häufig Gebrauch gemacht (s. z. B. das Helmholtz'sche Harmonium).

Wenn man z. B. im Dominant-Septimenakkord irgend einer Tonart die innerhalb der Tonart liegende Septime um ein Schisma erhöht, d. h. schismatisch mit der übermässigen Sexte vertauscht, so verwandelt sich dieser Akkord unmittelbar in einen übermässigen Terzquintsext-Akkord, der zu Modulationszwecken weiter benützt werden kann. Z. B.:



In Buchstabenschrift ausgedrückt sind diese 4 Akkorde: $\overset{0}{f}$ $\overset{-1}{a}$ $\overset{0}{c}$ $\overset{0}{es}$, $\overset{0}{f}$ $\overset{-1}{a}$ $\overset{0}{c}$ $\overset{-1}{dis}$, $\overset{0}{f}$ $\overset{-1}{a}$ $\overset{-1}{h}$ $\overset{-1}{dis}$, $\overset{-1}{e}$ $\overset{-2}{gis}$ $\overset{-1}{h}$ $\overset{-1}{c}$ und der Gang der einzelnen Stimmen ergibt sich aus der Uebersicht

$\overset{0}{es}$	$\overset{-1}{dis}$	$\overset{-1}{dis}$	$\overset{-1}{c}$
$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{c}$	$\overset{-1}{h}$	$\overset{-1}{h}$
$\overset{-1}{a}$	$\overset{-1}{a}$	$\overset{-1}{a}$	$\overset{-2}{gis}$
$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{-1}{e}$

Im ersten Akkord ist als Septime das innerhalb der Tonart ($\overset{0}{b}$-dur) liegende $\overset{0}{es}$ genommen. Hier ist zu einer Erniedrigung der Septime um ein Komma, die der Dominatseptakkord an und für sich zulassen würde, keine Veranlassung da, da die Septime sich nicht abwärts auflöst, sondern unter schismatischer Verwechslung in das $\overset{-1}{dis}$ ($\overset{-1}{dis} = \overset{0}{es}$) übergeht, das vermittelst eines pythagoräischen Leittonschrittes dann nach $\overset{-1}{e}$ weiterführt. Die Führung der übrigen Stimmen erfolgt nach harmonischem Prinzipe, so dass der letzte Akkord ein reiner Dur-Dreiklang ist. Jede der 3 Unterstimmen macht einen grossen (harmonischen) Leittonschritt abwärts. Man

gelangt auf diese Weise unter Anwendung einer schismatischen Verwechslung aus der Tonart b -dur nach e^{-1} -dur, der sog. Ober-Mediante von c^{o} -dur.

35. Einführung und Zweck des sog. Oktavenmaasses. Direkte Berechnung der Quinte und der natürl. grossen Terz. Messung der Intervalle in Tausendtheilen der Oktave. Das reine Tonsystem im Lichte dieses Maasses. — Es ist von grossem Vorteil, eine Art der Messung musikalischer Intervalle einzuführen, welche es uns ermöglicht, die verschiedensten Intervalle in durchaus müheloser übersichtlicher Weise mit einander zu vergleichen.

Wir drückten bisher alle Intervalle durch ihre relativen Schwingungszahlen, d. h. durch das Verhältniss der Schwingungszahlen der beiden das Intervall begrenzenden Töne aus. Diese Art der Messung ist durch die Natur direkt gegeben und erscheint zunächst als die einzig mögliche, da ja nicht die Differenz, sondern das Verhältniss der Schwingungszahlen zweier Töne charakteristisch ist für das Intervall, das sie mit einander bilden. Nur das Verhältniss bleibt für ein und dasselbe Intervall eine unveränderliche Grösse und ist unabhängig davon, ob das Intervall in hohen oder tiefen Regionen des Tongebietes liegt.

Trotzdem die bisherige Art, Intervalle auszudrücken, natürlich, d. h. von der Natur gewissermassen vorgeschrieben ist, empfinden wir es doch als einen Mangel, dass wir multiplikationsweise vorgehen müssen, wenn wir zwei oder mehrere Intervalle an einander reihen wollen, dagegen divisionsweise, wenn wir ein Intervall von einem andern abzuziehen haben oder wenn wir zwei Intervalle mit einander vergleichen wollen. Wir sind daran gewöhnt, zwei Grössen, die wir an einander fügen, zu addiren, und zwei Grössen, die wir zusammen vergleichen, durch Bildung ihres Unterschiedes vergleichend zu beurtheilen. Dies ist der Grund, weshalb es dem Neuling erfahrungsgemäss nicht sehr leicht fällt, sich rasch mit der Art vertraut zu machen, wie man musikalische Intervalle misst und messend mit einander vergleicht, und sich darin eine gewisse Gewandtheit und Sicherheit anzueignen. Es liegt daher der Gedanke sehr nahe, nach einer Art der Messung zu suchen,

welche der gewöhnlichen Art zu messen näher kommt und dem Sprachgebrauche besser entspricht als die ursprüngliche durch die Natur der Sache gegebene Art.

Der Weg, den wir zu gehen haben, um zum Ziele zu gelangen, ist sehr leicht zu finden; er wurde schon oben, bei Anlass der Einführung der gleichschwebenden Temperatur, angedeutet.

Die Musiksysteme aller Zeiten und Völker kennen die Eintheilung des Tongebietes in Oktaven. Das Intervall einer Oktave ist eine klar bestimmte, unveränderliche Grösse, die den Grundstein zum Aufbau jedes Tonsystems bildet. Es ist daher naheliegend, die Oktave als eine Einheit zu betrachten, in der man alle andern Intervalle ausdrückt, ähnlich wie man z. B. zur Messung von Längen das Meter als Einheit benützt und alle Längen in Metern oder Bruchtheilen von Metern ausdrückt. Intervalle, die kleiner als eine Oktave sind, werden dann, in diesem Maasse gemessen, als echte Brüche erscheinen, sei es nun in Form eines gewöhnlichen Bruches, oder in Form eines Decimalbruches. Intervalle, die grösser sind als eine Oktave, werden natürlich als Zahlen erscheinen, die grösser als 1 sind, sei es als ganze Zahlen, oder als unechte gemeine Brüche oder Decimalbrüche.

Bei der Einführung der gleichschwebenden Temperatur theilten wir die Oktave in 12 gleiche Theile und nannten jeden dieser Theile einen temperirten Halbton. Jeder Theil ist $\frac{1}{12}$ Oktave oder, als Decimalbruch ausgedrückt, gleich 0,083333 ... Oktave. Wenn wir dieses Maass als „Oktavenmaass"*) bezeichnen, so können wir also sagen: In Oktavenmaass ausgedrückt ist der

temperirte Halbton = 0,08333 . . . .

Die temperirte grosse Terz besteht aus 4 solchen Halbtönen, sie ist $\frac{4}{12}$ einer Oktave, d. h. in Oktavenmaass ausgedrückt, gleich $\frac{1}{3}$. Wir können also setzen

temperirte grosse Terz = 0,333333 . . . .

*) Das Oktavenmaass oder logarithmische Maass wurde schon von Euler (1707—1783) eingeführt und später von Andern, als einfachste Art der Messung von Intervallen, angewandt, wohl zum Theil auch selbständig neu erfunden (z. B. v. Drobisch, Opelt, Eitz u. A.).

Die temperirte Quinte besteht aus 7 temperirten Halbtönen, sie ist also $\frac{7}{12}$ Oktave, d. h.

temperirte Quinte = 0,583333 . . . .

Die natürliche grosse Terz ist, wie wir wissen, kleiner als die temperirte; umgekehrt ist die natürliche reine Quinte sehr wenig grösser als die temperirte. Es ist unsere nächste Aufgabe, für die natürliche grosse Terz und Quinte ihr genaues Oktavenmaass abzuleiten. — Im Gegensatz zum Oktavenmaass nennen wir das gewöhnliche, durch die relative Schwingungszahl ausgedrükte Maass: „Schwingungsmaass". —

†. Nennen wir z die relative Schwingungszahl oder das „Schwingungsmass" irgend eines Intervalls, x dagegen dasselbe Intervall, in Oktavenmaass ausgedrückt, so ist die Beziehung zwischen z und x sehr leicht zu finden. — Nehmen wir an, ein Intervall z sei in der Oktave n : mal enthalten, sei also der n te Theil einer Oktave, so ist $\frac{1}{n} = x$ das Oktavenmaass des betreffenden Intervalls, und es wird

$$z \,.\, z \,.\, z \,.\,.\,.\,.\,.\, (n : \text{mal}) = 2, \text{ d. h. } z^n = 2,\ z = 2^{\frac{1}{n}} = 2^x$$

Zwischen dem Schwingungsmaass z und dem Oktavenmaass x eines und desselben Intervalls besteht also die einfache Beziehung

$$z = 2^x$$

Für die temperirten Intervalle ist das Oktavenmaass x das ursprünglich Gegebene und das Schwingungsmaass, oder die relative Schwingungszahl das Gesuchte. Für die natürlichen Intervalle ist es gerade umgekehrt; für sie ist die relative Schwingungszahl z bekannt und das Oktavenmaass x gesucht.

Für die natürliche grosse Terz $z = \frac{5}{4}$ haben wir:

$\frac{5}{4} = 2^x$, woraus sich durch Logarithmirung ergibt: $\log \frac{5}{4} = x \log 2$; $\log 5 - \log 4 = x \log 2$ und daher $x = \frac{\log 5 - \log 4}{\log 2}$.

Durch Aufsuchen der Logarithmen findet man:

$$x = \frac{0{,}6989700043 - 0{,}6020599913}{0{,}3010299957}$$

d. h. x = 0,3219281

mit einer Genauigkeit von 7 Decimalen.

Aehnlich gestaltet sich die Rechnung für die natürliche Quinte. Für sie ist

$$\frac{3}{2} = 2^x;\ \log \frac{3}{2} = x \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 2} = \frac{0{,}4771212547 - 0{,}3010299957}{0{,}3010299957}$$

d. h. $x = 0{,}5849625$

mit einer Genauigkeit von 7 Decimalen.

Die grosse Terz und die Quinte sind die einzigen Intervalle, für welche wir das Oktavenmaass direkt mit Hülfe der Logarithmen zu berechnen haben, alle andern Intervalle lassen sich aus diesen beiden und aus dem Intervall der Oktave durch Addition oder Subtraktion ableiten. Denn durch die Einführung des Oktavenmaasses verwandelt sich die Multiplikation in Addition und die Division in Subtraktion. Es seien z. B. z_1 und z_2 zwei beliebige Intervalle, und x_1 und x_2 das diesen Intervallen entsprechende Oktavenmaass, so ist

$$z_1 = 2^{x_1} \text{ und } z_2 = 2^{x_2}.$$

Werden diese beiden Intervalle an einander gefügt, was einer Multiplikation der relativen Schwingungszahlen entspricht, so erhält man für das resultirende Intervall

$$z_1 \cdot z_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$$

d. h. man hat die Oktavenmaasse x_1 und x_2 der beiden Intervalle zu addiren, um das Oktavenmaass des resultirenden Intervalls zu erhalten. Wird dagegen von einem Intervall z_1 ein anderes z_2 abgezogen, oder werden diese beiden Intervalle mit einander verglichen, so wird z_1 durch z_2 dividirt und es ergibt sich für das resultirende Intervall:

$$z_1 : z_2 = 2^{x_1} : 2^{x_2} = 2^{x_1 - x_2}$$

d. h. das Oktavenmaass des resultirenden Intervalls ist gleich der Differenz der Oktavenmaasse x_1 und x_2 der einzelnen Intervalle.

Aus dieser wesentlichen Vereinfachung geht der grosse Nutzen der Einführung des Oktavenmaasses zur Genüge hervor.

Nehmen wir z. B. die Quinte, für die wir gefunden haben

$$\tfrac{3}{2} = 2^{0{,}5849625},$$

und die Quarte, deren Oktavenmaass x wir suchen wollen und für die $\frac{4}{3} = 2^{x}$ ist, so ergibt sich, da Quinte und Quarte sich zur Oktave ergänzen, folgende Beziehung

$$\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2} = 2 = 2^{0{,}5849625 + x} = 2^{1}.$$

Es muss also $0{,}5849625 + x = 1$, oder $x = 1 - 0{,}5849625$ sein. D. h. das Oktavenmaass der Quarte ist

$$x = 0{,}4150375.$$

Es ist klar, auf welche Weise man aus den direkt berechneten Intervallen alle andern ableiten kann. Wenn zwei durch ihre Oktavenmaasse x_1 und x_2 gegebene Intervalle sich zur Oktave ergänzen, so ist $x_1 + x_2 = 1$; ergänzen sie sich zur Quinte, so ist $x_1 + x_2 = 0,5849625$ u. s. w. Ist x_1 gegeben, so findet man also x_2 durch Subtraktion.

Vom rein mathematischen Standpunkt aus betrachtet ist das Oktavenmaass x nichts anderes als der Logarithmus des Schwingungsmaasses z in Bezug auf die Basis 2. Der Grundstein des ganzen Tongebäudes ist die Oktave; das ganze Tonsystem baut sich auf den Potenzen der Zahl 2 auf. Es ist daher natürlich, dass im Gebiete der musikalischen Töne der Zahl 2 und den Logarithmen in Beziehung auf die Basis 2 eine ganz ähnliche Rolle zufällt wie im Decimalsystem der Zahl 10 und den Logarithmen in Bezug auf die Basis 10. †.

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich also, dass, auf die Oktave als Einheit bezogen,

die grosse Terz = 0,3219281

und

die Quinte = 0,5849625

ist. Diese Zahlen bieten eine weit grössere Genauigkeit, als der praktische Gebrauch sie jemals erfordert. Nach Versuchen verschiedener Forscher (Weber, Helmholtz, Preyer) ist schon eine Abweichung von $\frac{1}{1000}$ Oktave, d. h. von 0,001, nur mit grösster Aufmerksamkeit und bei gänzlicher Abwesenheit jeder Störung zu erkennen*), unter Bedingungen, die in der praktischen Musik niemals in Betracht kommen. Wenn wir uns mit 3 Decimalen begnügen und

die grosse Terz = 0,322
die Quinte = 0,585

setzen, zo ist in beiden Fällen der Fehler, den wir durch Vernachlässigung weiterer Decimalstellen begehen, kleiner als $\frac{1}{10000}$ einer Oktave, d. h. kleiner als 0,0001, also weit unterhalb der Grenze der Hörbarkeit. Die beiden oben aufgestellten 3 stelligen Maasse für grosse Terz und Quinte bieten also einen ausser-

*) Nach Preyer's Untersuchungen über die Grenzen der Tonwahrnehmung können noch 2 Töne von 1000,5 und 1000 Schwingungen in der Sekunde von einander unterschieden werden. Es entspricht dies einer Differenz von ungefähr $\frac{3}{4}$ Tausendtheilen einer Oktave. Auch G. Engel kam zu einem ähnlichen Resultate (s. seine Aesthetik der Tonkunst pag. 295). In der musikalischen Praxis ist aber schon das doppelte Intervall von $1\frac{1}{2}$ Tausendtheilen einer Oktave von keinem Belange mehr.

ordentlich grossen Grad von Genauigkeit dar und haben den Vortheil, sich leicht dem Gedächtniss einzuprägen.

Wir werden künftig in der Regel alle Intervalle mit einer Genauigkeit von 3 Decimalen angeben.

Wir können uns auch in folgender Weise ausdrücken: Die ganze Oktave denken wir uns in 1000 gleiche Theile eingetheilt und messen jedes Intervall durch die Zahl der Theile, welche es umfasst. So misst z. B. die grosse Terz 322 und die Quinte 585 solcher Theile. Die temperirte grosse Terz dagegen misst $333\frac{1}{3}$ und die temperirte Quinte $583\frac{1}{3}$ Theile. Denken wir uns das Intervall einer Oktave etwa durch die Länge eines Meters versinnbildlicht, so entspricht $\frac{1}{1000}$ Oktave ein Millimeter. Die natürliche grosse Terz ist dann durch 322 und die natürliche Quinte durch 585 Millimeter repräsentirt. Man könnte den tausendsten Theil einer Oktave als „Milli-Oktave" benennen und mit irgend einem Buchstaben, z. B. mit μ bezeichnen. In dieser Weise ausgedrückt ist dann eine nat. grosse Terz gleich 322^{μ} und eine nat. Quinte gleich 585^{μ}. Je nach Bedürfniss drücken wir die Intervalle bald in diesem Maasse, bald als Decimalbruch aus. Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Arten der Auffassung besteht natürlich nicht.

Gehen wir von irgend einem Tone um eine Quinte aufwärts, so entspricht dieser Schritt einer Addition von 0,585. Betrachten wir den Punkt, von dem wir ausgehen, als Nullpunkt der Tonskala, setzen wir also z. B. $c = 0$ $(1 = 2^0)$, so wird die nächst höhere Quinte $g = 0{,}585$.

Gehen wir von c um eine Quinte abwärts, so entspricht dies einer Subtraktion von 0,585. Die Unter-Quinte f ist dann also $= - 0{,}585$ zu setzen. Versetzen wir diese um eine Oktave höher, so dass sie, von c aufwärts gemessen, als Quarte erscheint, so muss 1 addirt werden, da ja die Zahl 1 eine Oktave repräsentirt. Es wird dann also $f = 1 - 0{,}585$ oder $f = 0{,}415$. Die Quarte wird also durch den Decimalbruch 0,415 gemessen.

Dass Quinte und Quarte sich zur Oktave ergänzen, ist durch die Gleichung $0{,}585 + 0{,}415 = 1$ ausgedrückt.

Das Oktavenmaass der kleinen Terz werden wir finden, indem wir von der Quinte die grosse Terz subtrahiren.

$$\text{Kleine Terz} = \text{Quinte} - \text{grosse Terz}$$
$$= 0.585 - 0{,}322$$

d. h.

$$\text{Kleine Terz} = 0{,}263.$$

Die grosse Sexte ergibt sich durch Subtraktion der kleinen Terz von der Oktave:

Grosse Sexte = Oktave — kleine Terz
= 1 — 0,263

d. h.

Grosse Sexte = 0,737.

Die kleine Sexte ergibt sich aus Oktave und grosser Terz:

Kleine Sexte = Oktave — grosse Terz
= 1 — 0,322

d. h.

Kleine Sexte = 0,678.

Hiermit haben wir schon alle Intervalle gewonnen, welche mit dem Grundton 0,000 Consonanzen bilden. Ist der Grundton *c* und gruppiren wir die gefundenen Intervalle um *c* herum in der Weise, wie wir es schon oben (unter Nr. 20) gethan haben, so haben wir das Bild

	a 0,737		*e* 0,322	
f 0,415		*c* 0,000		*g* 0,585
	as 0,678		*es* 0,263	

Zur Ergänzung dieser Gruppe zur vollständigen „tonalen Gruppe von *c*“ (s. pag. 33) fehlen uns noch die beiden Dreiklänge $g \overset{h}{\quad} d$ und $g \underset{b}{\quad} d$, die sich aber sehr leicht berechnen lassen. Man findet aus $g = 0{,}585$ vermittelst der grossen Terz 0,322, der kleinen Terz 0,263 und der Quinte 0,585 die folgenden Werthe:

$$h = 0{,}585 + 0{,}322 = 0{,}907$$
$$b = 0{,}585 + 0{,}263 = 0{,}848$$
$$d = 0{,}585 + 0{,}585 = 1{,}170$$

Der Ton *d* (von *c* aus gemessen die zweite Quinte nach oben) liegt in der nächst höhern Oktave. Das gibt sich im Bruche 1,170 darin zu erkennen, dass vor dem Decimal-Komma eine 1 steht. Das *d* um eine Oktave abwärts versetzen, ist gleichbedeutend mit einer Subtraktion von 1; $d = 1{,}170$ verwandelt sich dann in das um eine Oktave tiefere $d = 0{,}170$. Wir haben also nun die vollständige tonale Gruppe

	a 0,737	*e* 0,322	*h* 0,907
f 0,415	*c* 0,000	*g* 0,585	*d* 0,170
	as 0,678	*es* 0,263	*b* 0,848

Die Erweiterung der tonalen Gruppe zum harmonischen Tongewebe vollzieht sich ohne jegliche Schwierigkeit. Bilden wir zunächst eine pythagoräische Quintenreihe, indem wir von $\overset{0}{c}$ aus um Quintenschritte aufwärts und abwärts schreiten. Dann haben wir nach oben lauter Vielfache von + 0,585; nach unten dagegen lauter Vielfache von — 0,585:

$\overset{0}{ges}$	$\overset{0}{des}$	$\overset{0}{as}$	$\overset{0}{es}$	$\overset{0}{b}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{c}$
— 3,510	— 2,925	— 2,340	— 1,755	— 1,170	— 0,585	0,000

$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{a}$	$\overset{0}{e}$	$\overset{0}{h}$	$\overset{0}{fis}$
0,585	1,170	1,755	2,340	2,925	3,510

Gemäss unserer bisherigen Gewohnheit versetzen wir alle Töne dieser Quintenreihe in e i n e Oktave, und zwar in die vom Ausgangspunkt *c* aufwärts steigende Oktave. Bei den von *c* aus aufwärts liegenden Tönen geschieht dies dadurch, dass wir nur die Decimalen berücksichtigen und die ganze vor dem Decimal-Komma stehende Zahl durch 0 ersetzen. Es müssen *d* und *a* um eine Oktave, *e* und *h* um 2 und *fis* um 3 Oktaven abwärts verlegt werden. Umgekehrt ist es bei den von *c* aus abwärts liegenden Tönen. *f* muss um eine Oktave, *b* und *es* müssen um 2, *as* und *des* um 3 und *ges* um 4 Oktaven höher verlegt werden. Es wird also

$$\begin{aligned} f &= 1 - 0{,}585 = 0{,}415 \\ b &= 2 - 1{,}170 = 0{,}830 \\ es &= 2 - 1{,}755 = 0{,}245 \\ as &= 3 - 2{,}340 = 0{,}660 \\ des &= 3 - 2{,}925 = 0{,}075 \\ ges &= 4 - 3{,}510 = 0{,}490 \end{aligned}$$

Die pythagoräische Quintenreihe wird also nun, mit den zugehörigen Oktavenmaassen versehen:

$\overset{0}{ges}$	$\overset{0}{des}$	$\overset{0}{as}$	$\overset{0}{es}$	$\overset{0}{b}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{a}$
0,490	0,075	0,660	0,245	0,830	0,415	0,000	0,585	0,170	0,755

$\overset{0}{e}$	$\overset{0}{h}$	$\overset{0}{fis}$
0,340	0,925	0,510

Die beiden äussersten Enden dieser Quintenreihe, *fis* und *ges*, kommen einander nahe; sie bilden, wie wir wissen, das sog. pythagoräische Komma mit einander. Aus *fis* = 0,510 und *ges* = 0,490 erhält man für das pythag. Komma den abgerundeten Werth:

$$fis - ges = 0{,}510 - 0{,}490 = \mathbf{0{,}020}$$

d. h. das pythagoräische Komma misst $\frac{20}{1000}$ einer Oktave oder 20‴.

Genau in derselben Weise werden die Oktavenmaasse für alle Horizontalreihen des harmonischen Tongewebes gefunden. Alle Töne werden immer in die erste, von *c* aus aufwärts gehende Oktave verlegt, und das geschieht bei einer Verlegung abwärts immer durch Subtraktion, bei einer Verlegung aufwärts immer durch Addition einer die Zahl der Oktavenschritte angebenden ganzen Zahl.

Es sei nur das folgende kleine Stück des harmonischen Tongewebes zur Darstellung gebracht: *)

—2	—2	—2	—2	—2	—2	—2	—2	—2	—2
a	*c*	*h*	*fis*	*cis*	*gis*	*dis*	*ais*	*eis*	*his*
0,719	0,304	0,889	0,474	0,059	0,644	0,229	0,814	0,399	0,984

—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1
c	*g*	*d*	*a*	*e*	*h*	*fis*	*cis*	*gis*
0,982	0,567	0,152	0,737	0,322	0,907	0,492	0,077	0,662

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
as	*es*	*b*	*f*	*c*	*g*	*d*	*a*	*e*	*h*
0,660	0,245	0,830	0,415	0,000	0,585	0,170	0,755	0,340	0,925

+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
ces	*ges*	*des*	*as*	*es*	*b*	*f*	*c*	*g*
0,923	0,508	0,093	0,678	0,263	0,848	0,433	0,018	0,603

+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2
asas	*eses*	*bb*	*fes*	*ces*	*ges*	*des*	*as*	*es*	*b*
0,601	0,186	0,771	0,356	0,941	0,526	0,111	0,696	0,281	0,866

Aus dieser Uebersicht ersieht man, dass die Töne irgend einer Horizontalreihe um das Intervall 0,018 höher stehen als die gleichnamigen Töne der nächst höheren Reihe, und um

---

*) Eine etwas umfangreichere Uebersicht des harmonischen Tonsystems nebst den in Tausendtheilen einer Oktave (‴) ausgedrückten Maassen findet sich auf der diesem Abschnitt beigefügten Tabelle.

das Intervall 0,018 niedriger als die gleichnamigen Töne der nächst tieferen Reihe.

Das Intervall 0,018 ist demnach das syntonische Komma.

In Oktavenmaass ausgedrückt ist also das

pythagoräische Komma $= 0{,}020 = 20''$
syntonische Komma $= 0{,}018 = 18''$
somit das sog. Schisma $= 0{,}020 - 0{,}018 = 0{,}002 = 2''$

Genauere Werthe für diese drei Intervalle erhält man, wenn man der Berechnung die 7stelligen Werthe für Quinte und nat. gr. Terz zu Grunde legt. Das pythagoräische Komma ist = 12 Quinten minus 7 Oktaven $= 12 \,.\, 0{,}5849625 - 7 = 0{,}0195500$. Das syntonische Komma ist = 4 Quinten minus 2 Oktaven minus nat. grosse Terz $= 4 \,.\, 0{,}5849625 - 2 - 0{,}3219281 = 0{,}0179219$. (Es muss also auch $\frac{81}{80} = 2^{0{,}0179219}$ sein, wegen der Beziehung $z = 2^{x}$).

Das Schisma ist $= 0{,}0195500 - 0{,}0179219 = 0{,}0016281$. In Tausendtheilen einer Oktave ausgedrückt ist also das pythag. Komma $= 19{,}5''$; das synt. Komma $= 17{,}9''$ und das Schisma $= 1{,}6''$.

Die Tonschritte, die wir bei der Betrachtung der verschiedenen diatonischen Tonleitern kennen lernten, haben in Oktavenmaass die folgenden Werthe:

Der grosse Ganzton ($\frac{9}{8}$, $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}$) ist $0{,}170 = 170''$ }
Der kleine Ganzton ($\frac{10}{9}$, $\overset{0}{d}\ \overset{-1}{e}$) $0{,}152 = 152''$ } Diff. $18''$

Der grosse Halbton ($\frac{16}{15}$, $\overset{-1}{e}\ \overset{0}{f}$) $0{,}093 = 93''$ }
Der pythag. Halbton ($\frac{256}{243}$, $\overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$) $0{,}075 = 75''$ } Diff. $18''$.

Die kleine Diësis ist 1 Oktave minus 3 nat. gr. Terzen, also $1 - 3 \,.\, 0{,}322 = 0{,}034 = 34''$, also in der That fast doppelt so gross als ein synton. Komma ($2 \,.\, 18'' = 36''$) und 5mal kleiner als ein gr. Ganzton ($\frac{1}{5} \,.\, 170'' = 34''$).

Die grosse Diësis ist gleich 4 nat. kleine Terzen minus Oktave, also $4 \,.\, 0{,}263 - 1 = 0{,}052 = 52''$, also in der That nahezu 3mal grösser als das synt. Komma ($3 \,.\, 18'' = 54''$) und 3mal kleiner als ein Ganzton ($3 \,.\, 52'' = 156''$).

Der kleine oder chromatische Halbton ($\frac{25}{24}$) ist gleich der Differenz zwischen grosser und kleiner natürl. Terz, also gleich 0,322 — 0,263 = 0,059 = 59^{μ}. Er verdient also weit eher den Namen: Drittelton, als Halbton (3 . 59^{μ} = 177^{μ}).

Das Limma ist, weil identisch mit dem pythagoräischen Halbton, gleich 75^{μ}. Die Apotome ergänzt das Limma zu einem grossen (pythag.) Ganzton, ist also = 95^{μ}. Der Unterschied zwischen Apotome und Limma ist das pythagoräische Komma : $95^{\mu} - 75^{\mu} = 20^{\mu}$.

Es braucht wohl kaum bis ins Einzelne erörtert zu werden, wie alle die verschiedenen Intervalle, auf die wir bisher stiessen, in Oktavenmaass zu berechnen sind. Es können alle unmittelbar der Uebersicht über das harmonische Tonsystem entnommen werden, die diesem Abschnitte beigefügt ist.

36. Vergleichende Uebersicht der natürlichen, pythagoräischen und temperirten Intervalle auf Grund des Oktavenmasses. — Dieselben Intervalle, die wir oben (unter Nr. 32) zusammenstellten und in gewöhnlichem Schwingungsmaass ausdrückten, finden sich in der folgenden kleinen Tabelle, in Tausendtheilen einer Oktave ausgedrückt, nach ihrer Grösse geordnet. Beigefügt ist nur der kleine Halbton und dessen Umkehrung. Wie dort, so sind auch hier alle Intervalle von demselben Grundton $\overset{0}{c}$ aus gemessen.

Die 12 Stufen der gleichschwebend temperirten Skala sind, vom Grundton aus gemessen, Vielfache des temperirten Halbtons. Der temperirte Halbton, in μ ausgedrückt, ist $1000^{\mu} : 12 = 83\frac{1}{3}^{\mu}$. Die temperirte 12 stufige Leiter ist also durch folgende Zahlenreihe dargestellt:

0,	$83\frac{1}{3}$,	$166\frac{2}{3}$,	250,	$333\frac{1}{3}$,	$416\frac{2}{3}$,	500,	$583\frac{1}{3}$,	$666\frac{2}{3}$,	750,	$833\frac{1}{3}$,	$916\frac{2}{3}$,	1000
c	*cis* *des*	*d*	*dis* *es*	*e*	*eis* *f*	*fis* *ges*	*g*	*gis* *as*	*a*	*ais* *b*	*h*	*c*

Die folgende Tabelle soll gleichzeitig dazu dienen, die temperirten Intervalle mit den ihnen entsprechenden natürlichen zu vergleichen.

Die temperirten Intervalle stehen neben den mit ihnen vergleichbaren natürlichen; in der äussersten Vertikalreihe rechts stehen die Differenzen zwischen den temperirten und den natürlichen Intervallen, wobei eine positive Differenz einen Ueberschuss des temperirten Intervalls über das natürliche bedeutet,

dagegen eine negative Differenz ein Zurückbleiben des temperirten Intervalls hinter dem natürlichen.

Benennung der Intervalle.		Bezeichnung	Natürlich	Temperirt	Differenz
Prime	rein	$\overset{0}{c}$	000	000	0
	übermässig	$\overset{-2}{cis}$	059	$083\frac{1}{3}$	$+24\frac{1}{3}$
Sekunde	klein, pythag.	$\overset{0}{des}$	075	$083\frac{1}{3}$	$+8\frac{1}{3}$
	klein, gr. Halbton	$\overset{+1}{des}$	093	$083\frac{1}{3}$	$-9\frac{2}{3}$
	gross, kl. Ganzton	$\overset{-1}{d}$	152	$166\frac{2}{3}$	$+14\frac{2}{3}$
	gross, gr. Ganzton	$\overset{0}{d}$	170	$166\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{3}$
Terz,	vermindert	$\overset{+2}{eses}$	186	$166\frac{2}{3}$	$-19\frac{1}{3}$
Sekunde,	übermässig	$\overset{-2}{dis}$	229	250	$+21$
Terz	klein, pythag.	$\overset{0}{es}$	245	250	$+5$
	klein, natürl.	$\overset{+1}{\mathbf{es}}$	**263**	**250**	$\mathbf{-13}$
	gross, natürl.	$\overset{-1}{\mathbf{e}}$	**322**	$\mathbf{333\frac{1}{3}}$	$\mathbf{+11\frac{1}{3}}$
	gross, pythag.	$\overset{0}{e}$	340	$333\frac{1}{3}$	$-6\frac{2}{3}$
Quarte	vermindert	$\overset{+2}{fes}$	356	$333\frac{1}{3}$	$-22\frac{2}{3}$
	rein	$\overset{0}{\mathbf{f}}$	**415**	$\mathbf{416\frac{2}{3}}$	$\mathbf{+1\frac{2}{3}}$
	unrein	$\overset{+1}{f}$	433	$416\frac{2}{3}$	$-16\frac{1}{3}$
	übermässig	$\overset{-1}{fis}$	492	500	$+8$
Quinte	vermindert	$\overset{+1}{ges}$	508	500	-8
	unrein	$\overset{-1}{g}$	567	$583\frac{1}{3}$	$+16\frac{1}{3}$
	rein	$\overset{0}{\mathbf{g}}$	**585**	$\mathbf{583\frac{1}{3}}$	$\mathbf{-1\frac{2}{3}}$
	übermässig	$\overset{-2}{gis}$	644	$666\frac{2}{3}$	$+22\frac{2}{3}$

Benennung der Intervalle.		Bezeichnung	Natürlich	Temperirt	Differenz
Sexte	klein, pythag.	$\overset{0}{as}$	660	$666\frac{2}{3}$	$+\ 6\frac{2}{3}$
	klein, natürl.	$\overset{+1}{as}$	**678**	**$666\frac{2}{3}$**	**$-\ 11\frac{1}{3}$**
	gross, natürl.	$\overset{-1}{a}$	**737**	**750**	**$+13$**
	gross, pythag.	$\overset{0}{a}$	755	750	$-\ 5$
Septime,	vermindert	$\overset{+2}{bb}$	771	750	-21
Sexte,	übermässig	$\overset{-2}{ais}$	814	$833\frac{1}{3}$	$+19\frac{1}{3}$
Septime	klein, eng (pyth.)	$\overset{0}{b}$	830	$833\frac{1}{3}$	$+\ 3\frac{1}{3}$
	klein, weit	$\overset{+1}{b}$	848	$833\frac{1}{3}$	$-14\frac{2}{3}$
	gross, Leitton	$\overset{-1}{h}$	907	$916\frac{2}{3}$	$+\ 9\frac{2}{3}$
	gross, pythag.	$\overset{0}{h}$	925	$916\frac{2}{3}$	$-\ 8\frac{1}{3}$
Oktave	vermindert	$\overset{+2}{ces}$	941	$916\frac{2}{3}$	$-24\frac{1}{3}$
	rein	$\overset{0}{c}$	1000	1000	0

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich Folgendes:

Der temperirte Halbton hält nahezu die Mitte zwischen den pythagoräischen (melodischen) und dem grossen (harmonischen). Der temperirte Ganzton ist sehr wenig verschieden von dem grossen (pythag.), nur um $3\frac{1}{3}''$ kleiner. Die temperirte kleine Terz steht zwischen der natürlichen, um $13''$ grösseren, und der pythagoräischen, um $5''$ kleineren; sie neigt sehr stark nach letzterer hin.

Die temperirte grosse Terz ist um ungefähr $\frac{2}{3}$ Komma grösser als die natürliche und um $\frac{1}{3}$ Komma kleiner als die pythagoräische, neigt also auch mehr nach letzterer Seite hin.

Die temperirte Quarte ist um $1\frac{2}{3}''$ grösser als die reine, die temperirte Quinte um $1\frac{2}{3}''$ kleiner. Diese Abweichung

stimmt also mit dem Schisma (fast mathematisch genau) überein und ist ohne Belang.

Die temperirte kleine Sexte ist nun nahezu $\frac{1}{3}$ Komma grösser als die pythagoräische, und um $\frac{2}{3}$ Komma kleiner als die natürliche, also ersterer näherstehend.

Die temperirte grosse Sexte endlich ist um $13''$ grösser als die natürliche und nur um $5''$ kleiner als die pythagoräische.

Es ergibt sich also im Ganzen, dass die temperirten Intervalle eine vermittelnde Stellung zwischen den natürlichen (im engern Sinne) und den pythagoräischen einnehmen, und im allgemeinen mehr nach der Seite der pythagoräischen Intervalle hinneigen.

Dass das temperirte System sich dem pythagoräischen nähert, wird nicht befremden, wenn man sich daran erinnert, wie das erstere aus dem letzteren hervorgegangen ist. —

Während der Fehler der temperirten Quinten und Quarten ($1\frac{2}{3}''$) in der Praxis in den meisten Fällen keine Rolle spielt, ist die Abweichung der temperirten grossen Terzen und kleinen Sexten von der harmonischen Reinheit ($11\frac{1}{3}''$) ungefähr 7mal so gross ($7 \cdot 1\frac{2}{3} = 11\frac{2}{3}$), diejenige der temperirten kleinen Terzen und grossen Sexten ($13''$) sogar fast 8mal so gross ($8 \cdot 1\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3}$), als die Abweichung der Quinten und Quarten.

Es sind also, von den dissonanten Intervallen abgesehen, nur die Terzen und Sexten, welche in der gleichschwebend temperirten Stimmung wesentlich von der Reinheit abweichen. Wie störend diese Unreinheit ist, wie weit sie dem Hörer zum Bewusstsein kommt, das hängt, ausser von der Grösse der Abweichung, noch von verschiedenen Umständen ab, die wir hier nur andeuten können. Aus später anzuführenden Gründen ist die Tonlage des Intervalls nicht unwesentlich. Unreine Terzen und Sexten in harmonischem Zusammenklang klingen im Allgemeinen in hohen Lagen viel schlechter als in tiefen. Jeder Geiger weiss z. B., dass bei ganz hohen Lagen jede Unreinheit von Terzen und Sexten das Ohr viel empfindlicher verletzt als in tieferen Lagen. Auch die Klangfarbe kommt hierbei einigermassen in Betracht; bei verschiedenartigen Klangfarben ist der zulässige Grad für Abweichungen von der Reinheit verschieden. Ferner wird bei lang anhaltenden Tönen

eine Unreinheit leichter bemerkbar werden, als bei Tönen, die rasch an Stärke abnehmen und verklingen.

Dasjenige Instrument, welches Abweichungen von der vollkommenen Reinheit am besten ertragen kann und welchem die gleichschwebende Temperatur ihre weite Verbreitung in erster Linie verdankt, ist das Klavier. Die Töne des Klaviers haben nur unmittelbar nach dem Anschlag nennenswerthe Stärke; sie verklingen verhältnissmässig rasch und lassen Abweichungen von der Reinheit weniger leicht erkennen, als z. B. die lang anhaltenden Töne eines Harmoniums oder einer Orgel. Das Klavier ist hauptsächlich auf Beweglichkeit und Flüssigkeit der Tonfiguren eingerichtet. In weit geringerem Maasse ist dies beim Harmonium und bei der Orgel der Fall. Bei diesen sind die Unreinheiten der temperirten Stimmung ohne Schwierigkeit zu konstatiren und unter Umständen recht fühlbar, weshalb die Einführung der gleichschwebenden Temperatur für die Orgel ursprünglich auf nicht unbedeutenden Widerstand stiess.

37. Vergleichende Parallele zwischen den drei wichtigsten Stimmungsprinzipien, dem harmonisch reinen, dem pythagoräischen und dem 12stufigen gleichschwebend temperirten System. — Jedes Urtheil beruht auf einer bewussten oder unbewussten Messung und Vergleichung. Wer sich ein Urtheil über die gleichschwebend temperirte Stimmung und ihr Verhältniss zur harmonisch reinen und pythagoräischen bilden will, für den wird es unerlässlich sein, diese Stimmungen praktisch zu erproben und systematisch mit einander zu vergleichen. Die Gefahr, durch die konsequente Durchführung eines Prinzips auf einen einseitigen Standpunkt hingedrängt zu werden, liegt hier sehr nahe. Für den Musiker wird die höchste Instanz stets das musikalisch gebildete Ohr sein. Mit dem Zusatz: „musikalisch gebildet“ ist allerdings das Zugeständniss verbunden, dass dieser höchste Richter vom Einfluss der Veränderlichkeit, dem der musikalische Geschmack unterworfen ist, nicht frei sein wird. Allein in diesen immerhin relativ elementaren Fragen sind die Grenzen der Veränderlichkeit doch wohl ziemlich eng. Jedes theoretische Prinzip geht ursprünglich von Erfahrungsthatsachen aus und hat deshalb innerhalb gewisser Grenzen volle Berechtigung. Wo diese Grenzen liegen, wie weit die praktische Leistungsfähigkeit des Prinzips geht, das

hängt von dem Grade der Berücksichtigung ab, den die ihm zu Grunde liegenden Thatsachen verlangen.

Wir haben zwei natürliche, d. h. auf Intervallen, die von der Natur gegeben sind, fussende Stimmungsprinzipien kennen gelernt, nach denen wir eine Tonleiter abstimmen können, und ausserdem ein drittes, künstliches. Das erste Prinzip, das wir voranstellten, war das harmonische Prinzip des reinen Dur-Dreiklanges, das uns in seiner consequenten Durchführung zum Aufbau des unbegrenzten harmonischen Tonsystems führte. Dieses Prinzip fusst — von dem fundamentalen Intervalle der Oktave ganz abgesehen — auf den beiden Grundintervallen der Quinte und der natürlichen grossen Terz, es bringt die Stufen der nach ihm abgestimmten Tonleitern in eine möglichst nahe harmonische Beziehung zu einem bestimmten Centrum, der Tonika. — Das zweite Prinzip war das pythagoräische Stimmungsprinzip, das als grundlegendes Intervall ausser der Oktave nur die Quinte anerkennt. Nach ihm sind die Stufen einer Tonleiter Glieder einer zusammenhängenden Quintenkette; der kettenweise Zusammenhang der Glieder lässt ihre Beziehung zum Centrum der Tonika nicht so unmittelbar und scharf hervortreten, aber der Zusammenhang der einzelnen Glieder unter sich ist ein unzerreissbar fester.

Jede der Horizontalreihen des harmonischen Tongewebes ist, für sich allein, ein pythagoräisches Quintensystem; letzteres ist also als Spezialfall im harmonischen Tonsystem enthalten. Mehrere Jahrhunderte weit reichen die Bestrebungen zurück, das reine Tonsystem auf klavierähnlichen Tasteninstrumenten zur Darstellung zu bringen*). Derartige Instrumente sind die besten Hülfsmittel, um die verschiedenen Stimmungsprinzipien praktisch mit einander zu vergleichen. Einige dieser Instrumente aus neuerer Zeit sollen unten kurz besprochen werden, und es soll ausserdem angedeutet werden, wie man sich allenfalls auch ohne solche Hülfsmittel mit Hülfe von Streichinstrumenten ein Urtheil über die hier in Betracht kommenden Fragen bilden kann.

---

*) Zur Geschichte der reinen Tasteninstrumente siehe Shohé Tanaka, Studien im Gebiete der reinen Stimmung. Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 1890, Heft 1, und A. J. Ellis in der engl. Uebersetzung von Helmholtz' Tonempfindungen, 2. Aufl.

Praktische Versuche an einem reingestimmten Harmonium zeigen nun, dass das harmonische Prinzip überall da den Vorzug verdient, wo es sich um reinen harmonischen Wohlklang, ganz speziell um reines Dur handelt. Ein Dur-Dreiklang in absolut reiner Stimmung klingt wunderbar voll und weich und erinnert einigermaassen an den Wohllaut, den ein gut geschulter a-capella-Chor entfaltet. Wie man sich an alles Gute leicht gewöhnt und sich des Schrittes vom Besseren zum weniger Guten viel leichter bewusst wird als des umgekehrten Schrittes, so ist es auch hier. Den reineren Wohllaut der natürlichen Dur-Dreiklänge nimmt man leicht als etwas Selbstverständliches hin; hat man sich aber daran gewöhnt, so fällt es, wenn man einigermaassen darauf achtet, sehr merklich auf, wenn mitten unter den reinen Dur-Dreiklängen ein temperirter oder ein solcher mit pythagoräischer Terz erscheint. Temperirte und besonders pythagoräische Dur-Dreiklänge klingen, im Vergleich zu reinen, wegen der zu hohen Terz unruhig, gespannt, beinahe auflösungsbedürftig und vorwärts drängend. Es ist erfahrungsgemäss nicht ganz unbedenklich, sich zu sehr an harmonisch reine Dur-Dreiklänge zu gewöhnen, da das auf solche Weise geschärfte Ohr Mühe hat, sich mit den unvermeidlichen harmonischen Unreinheiten der praktischen Musik zu befreunden, und die Genussfähigkeit darunter erheblich leidet. Ganz abgesehen von den rein praktischen Schwierigkeiten, die harmonisch reine Stimmung zur Anwendung zu bringen, kommt ausserdem noch in Betracht, dass die harmonische Reinheit der Akkorde sich durchaus nicht immer mit einer natürlichen und ungezwungenen melodischen Stimmführung verträgt und letzterer daher oft nothgedrungen Concessionen gemacht werden müssen, um Uebelstände zu vermeiden, welche noch schlimmer sind, als die Unruhe und Gespanntheit temperirter oder pythagoräischer Dur-Dreiklänge. —

Eine klare Logik und eiserne Consequenz zeigt das pythagoräische Stimmungsprinzip. Hier sind alle Quinten tadellos rein; eine „unreine Quinte der zweiten Stufe“ der Tonleiter gibt es hier nicht. Die grossen Terzen und Sexten sind zwar um ein Komma grösser als die harmonisch reinen, die kleinen Terzen und Sexten um ein Komma kleiner, allein nicht immer ist das ein entschiedener Uebelstand. Unangenehm sind die pythagoräischen Terzen und Sexten nur in Dur-Dreiklängen und zwar auch nur dann, wenn diese einen kürzeren oder längeren Ruhepunkt bezeichnen. Der pythagoräische Moll-Dreiklang

erweist sich sogar als ausdrucksfähiger und jedenfalls nicht schlechter klingend als der Moll-Dreiklang mit harmonisch reiner kleiner Terz. Zur Melodiebildung ist das pythagoräische Stimmungsprinzip entschieden geeigneter als das harmonische. Das Wesen der Melodie besteht in der Bewegung, in einer zeitlichen Aufeinanderfolge von Tönen; die Schritte, welche von einem Tone zum andern führen, müssen entschiedenen Charakter haben und entweder ein entschiedenes Vorwärtsdrängen in der Bewegung bezeichnen, oder ein Nachlassen in der Spannung. Die pythagoräische Tonleiter kennt nur 2 fundamentale Schritte: den grossen Ganzton $\frac{9}{8}$ (170″) und den pythagoräischen Halbton $\frac{256}{243}$ (75″); der erste bezeichnet ein energisches Fortschreiten, der zweite ein Einlenken in einen Zustand relativer Ruhe. Der pythagoräische Halbton entspricht dem in der reinen Melodik üblichen Leittonschritt sowohl in aufsteigender als in absteigender Bewegung. Die grosse Terz der Dur-Tonleiter klingt zwar auch in melodischer Folge etwas gespannt, weil hier die harmonische Beziehung zur Tonika noch fühlbar ist und den Leittoncharakter in Bezug zur Quarte nicht zu vollem Bewusstsein kommen lässt. Für die grosse Septime tritt aber die zur Tonika drängende Tendenz weit in den Vordergrund gegenüber der indirekten harmonischen Beziehung zum Grundton, und auch für die Sexte liegt die melodische Beziehung einerseits zur Quinte, andrerseits zur Septime häufig näher als die harmonische Beziehung zum Grundton.

In Bezug auf den schrittweisen Aufbau sind die pythagoräischen Tonleitern mit ihren zwei einfachen und charakteristischen Tonschritten den nach harmonischem Prinzip aufgebauten entschieden überlegen. Letztere zeigen einen fortwährenden Wechsel von 3 verschiedenen Tonschritten, dem grossen und kleinen Ganzton und dem grossen Halbton. Von diesen ist der kleine Ganzton $\frac{10}{9}$ ein in melodischer Beziehung unglückliches Mittelding, zu matt, um als richtiger Ganztonschritt zu gelten; und der grosse Halbton $\frac{16}{15}$ ist so gross, dass er als Leittonschritt nur dann annehmbar ist, wenn der eigentliche Leittoncharakter durch harmonische Beziehungen in den Hintergrund gedrängt wird.

Versuche an einem reingestimmten Harmonium zeigen, dass die pythagoräischen Tonleitern dem Ohre als viel ungezwungener und natürlicher erscheinen als die harmonisch abge-

stimmten. Melodien, in pythagoräischer Stimmung gespielt, zeigen eine Energie des Ausdrucks, die jedenfalls mit der Ausdrucksfähigkeit der grundlegenden Tonschritte zusammenhängt.

Das dritte Stimmungsprinzip, das wir kennen lernten, das System der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur, ist ein Kunstprodukt insofern, als keines seiner Intervalle mit Ausnahme der Oktave, von der Natur direkt gegeben ist. Wir sahen, dass seine Intervalle durchweg eine vermittelnde Stellung zwischen den pythagoräischen und den natürlich-harmonischen einnehmen und im Ganzen recht glückliche Mittelwerthe besitzen. Mit dem pythagoräischen System, nach dem es übrigens sehr hinneigt, theilt es die Eigenschaft des einfachen stufenweisen Aufbaus, indem es auch nur 2 grundlegende Tonschritte, den Ganzton ($166\frac{2}{3}''$) und den Halbton ($83\frac{1}{3}''$) kennt. Ersterer kommt dem grossen Ganzton ($170''$) nahezu gleich, letzterer hält fast genau die Mitte zwischen dem grossen harmonischen ($93''$) und dem pythagoräischen melodischen ($75''$) Halbton. Von diesem Standpunkte aus betrachtet erscheint das gleichschwebend temperirte System als ein sehr glücklicher Kompromiss zwischen den Bedürfnissen der Melodie und denjenigen der Harmonie.

Derjenige Vorzug, dem die gleichschwebende Temperatur ihre praktische Verwendbarkeit und ihre weite Verbreitung wohl in erster Linie verdankt, ist ihre Geschlossenheit. Während das pythagoräische Quintensystem nach 2 Richtungen und das harmonische System nach allen Richtungen hin unbegrenzt ist und eine unendliche Menge von Tönen aufweist, besteht das System der gleichschwebenden Temperatur nur aus 12 wesentlich verschiedenen Tönen. Es ist in Folge dessen vorzugsweise geeignet für Instrumente mit fester Stimmung, die eine auf leichte Spielbarkeit berechnete möglichst einfache Konstruktion haben müssen. Wie die Bedürfnisse der Instrumentaltechnik die Einführung der gleichschwebenden Temperatur begünstigten, so verdankt auch umgekehrt die Instrumentalmusik zum grossen Theil der gleichschwebenden Temperatur ihren riesenhaften Aufschwung. Es kann kein Zweifel darüber sein, dass die gleichschwebende Temperatur ungeheure praktische Vortheile bietet. Sie ist ein völlig neutraler Boden, sie bevorzugt weder die Harmonie vor der Melodie noch umgekehrt; sie räumt

keiner Tonart ein Vorrecht vor der andern ein, sie gestattet, sich in allen Tonarten frei zu bewegen, in keiner absolut rein, aber in allen mit einem befriedigenden Grade von Reinheit. Ihr grösster Vortheil ist aber wohl die absolute Modulationsfreiheit, die auf der Geschlossenheit des Quintenzirkels sowie des Zirkels der grossen und kleinen Terzen beruht. Im gleichschwebend temperirten System kann man frei nach allen Richtungen hin moduliren und wieder zum Ausgangspunkte zurückkehren, ohne befürchten zu müssen, aus der ursprünglichen Stimmung hinausgedrängt zu werden und um ein oder mehrere Kommata zu sinken oder zu steigen, wie es im harmonisch-reinen Tonsystem sehr leicht vorkommt. Die gleichschwebende Temperatur gestattet durch die Umdeutungsfähigkeit einzelner Töne und ganzer Akkorde, durch enharmonische Verwechslungen und andere freilich oft etwas gewaltsame Mittel, unter Zuhülfenahme der Anpassungsfähigkeit des menschlichen Ohres, Modulationen, die in keinem andern System möglich wären und die zur Erhöhung der harmonischen Ausdrucksfähigkeit der modernen Musik nicht unwesentlich beitragen.

Trotz aller dieser grossen und unleugbaren Vortheile ist es gut, sich dessen stets bewusst zu bleiben, dass die gleichschwebende Temperatur ein Kompromiss ist und bleibt und als Kunstprodukt zu betrachten ist. Jedenfalls ist es durchaus verkehrt, sie als das Gegebene, Natürliche, das reine Tonsystem dagegen als etwas Gekünsteltes zu betrachten, wie dies sogar von sehr achtbarer Seite geschehen ist*). — Dass die gleichschwebende Temperatur das musikalische Denken in ungünstiger Weise beeinflusst und einen klaren Einblick in das Wesen der Harmonie erschwert, wird von allen Lehrern der musikalischen Theorie anerkannt, und es wird sehr darauf gehalten, dass der Schüler nicht etwa statt eines *fis* ein *ges*, oder statt eines *dis* ein *es* hinschreibe, ein solcher Fehler würde mit Recht als ein schwerer Verstoss gegen das richtige musikalische Empfinden beurtheilt werden. Es ist aber streng genommen auch ein Fehler, zu glauben, mit der blossen Unterscheidung von *cis* und *des*, von *dis* und *es* u. s. f. sei den Anforderungen der reinen Harmonie gänzlich Genüge geleistet. — Jedenfalls hat die temperirte Stimmung es vermocht, das Ge-

*) Siehe: Kiesewetter, der neuen Aristoxener zerstreute Aufsätze über das Irrige der musikalischen Arithmetik und das Eitle ihrer Temperaturrechnungen. Leipzig, Breitkopf u. Härtel, 1846.

fühl für absolute Reinheit bis zu einem gewissen Grade abzustumpfen, aber immerhin nicht in einem solchen Grade, dass nicht jedes normale Ohr im Stande wäre, die Unreinheiten der temperirten Stimmung zu konstatiren. Natürlich macht es immer einen Unterschied aus, ob die Aufmerksamkeit ausdrücklich auf einen Punkt gerichtet ist oder nicht. Glücklicher Weise hat das menschliche Ohr einen nicht unerheblichen Grad von Anpassungsfähigkeit und die gute Eigenschaft, Gehörtes bis zu einem gewissen Grade zu idealisiren.

Unbedingt gerechtfertigt ist die gleichschwebend temperirte Stimmung stets als Kompromiss zwischen den verschiedenartigen Bedürfnissen der Melodie und der Harmonie, und ausserdem, in rein praktischem Sinne, als Stimmungsprinzip für Instrumente mit fester Stimmung. Wo aber die Intonation ungebunden ist und die Ausdrucksfähigkeit des temperirten Systems ihre Grenze erreicht, da wird das feine musikalische Ohr seine Rechte geltend machen und da wird auch eine Abweichung bald nach Seite der pythagoräischen, bald nach Seite der harmonischen Stimmung hin stattfinden, je nach den überwiegenden Bedürfnissen der Melodie oder der Harmonie. Jedes der drei Stimmungsprinzipien hat innerhalb gewisser Grenzen seine Berechtigung. Die Tonkunst verfügt über reiche Mittel, und man würde ihr Unrecht thun, wenn man ihr in der Anwendung ihrer Ausdrucksmittel enge Schranken ziehen würde.

38—44. Historischer Rückblick auf die Entwicklung des Tonsystems.

38. Das Tonsystem der alten Griechen. Dorisches, phrygisches und lydisches Tetrachord. Tetrachorde des Pythagoras, des Didymus und des Ptolemaeus. Diatonisches, chromatisches und enharmonisches Geschlecht. Erweiterung des dorischen Tetrachords des Pythagoras zur 15stufigen normalen diatonischen Tonleiter. Die 7 diatonischen Oktavengattungen der Griechen. Ihre Transposition in die allen Stimmengattungen gemeinsame Tonlage. Die 12 Tonstufen des Aristoxenos und die Transposition der Tonarten. — Wir haben uns im Verlaufe unserer Betrachtungen häufig allgemeinüblicher Bezeichnungen bedient, welche der griechischen Sprache entnommen sind, und sogar ganze Tongebilde, die

dem altgriechischen Tonsystem angehören, als noch heutzutage zu Recht bestehend anerkannt. Es geht daraus hervor, dass wir den Ursprung unseres ganzen Tonsystems im alten Griechenland zu suchen haben. Wie sich der Entwicklungsprozess unseres Tonsystems aus den von den alten Griechen gelegten Fundamenten vollzog, soll im Folgenden in grossen Zügen skizzirt werden.

Diejenigen Intervalle, auf welche man am frühesten kommen musste, sind die Oktave, die Quinte und die (aus beiden abzuleitende) Quarte. Die Oktave ist dasjenige Intervall, das als annähernder Unterschied zwischen der Tonlage einer männlichen und einer weiblichen Stimme gewissermassen schon von der Natur gegeben ist. Die Quinte dagegen ist das Intervall, durch welches sich die Tonlagen der beiden Haupt-Stimmengattungen ein und desselben Geschlechts (Sopran und Alt, Tenor und Bass) annähernd von einander unterscheiden. Auch ergibt sich Quinte und Quarte aus dem Tonfall beim gewöhnlichen Sprechen, indem bei einem fragenden Satze der Ton ungefähr um eine Quinte in die Höhe steigt, bei einem affirmativen, bejahenden Satze dagegen ungefähr um eine Quarte sinkt. Es wird daher nicht befremden, dass die Kenntniss und die praktische Anwendung der Tonreihe

$$e \text{ ——— } a \text{ — } h \text{ ——— } e$$

in welcher das Oktavenintervall zwischen e und seiner nächsthöhern Oktave durch die Quinte h und die Quarte a in kleinere Unterabtheilungen getrennt ist, schon einer sagenhaften Zeit (Orpheus) zugeschrieben wird. Der nächste Schritt musste natürlicher Weise dazu führen, die grossen Lücken zwischen e und a einerseits, zwischen h und dem höheren e andrerseits, durch Einschaltung weiterer Tonstufen auszufüllen. Dazu konnte der nächstkleinere Tonschritt zwischen a und h, der Ganzton, der dem Unterschiede zwischen Quinte und Quarte entspricht, mit Erfolg verwendet werden. Sollte die Quarte e — a unter Anwendung des Ganztonschrittes in weitere Unterabtheilungen getheilt werden, so konnte dies in verschiedener Weise geschehen. Man musste zunächst darauf stossen, dass zwei aneinandergereihte Ganztonschritte kleiner sind als das Quartenintervall, drei solche Schritte aber grösser. So musste man dazu kommen, das Intervall der Quarte in 2 Ganztonschritte und in einen kleineren Schritt, den Halbtonschritt, zu zerlegen. Die alten Griechen bevorzugten das Fortschreiten von höheren Tönen zu tieferen vor der Bewegung in entgegengesetzter Richtung. Schreiten wir demnach von a aus in Ganztonschritten abwärts, so weit

als es das Quartenintervall *e* — *a* zulässt, so erhalten wir die Tonreihe

e f g a

die, weil aus 4 Tönen bestehend, als Tetrachord bezeichnet wurde. — In diesem Tetrachorde liegt der Halbtonschritt *e* — *f* am unteren Ende; man konnte ihn aber ebensowohl nach der Mitte oder nach dem oberen Ende verlegen. So ergaben sich 2 weitere Tetrachorde, die nach unserer Bezeichnungsweise lauten müssen

e fis g a *e fis gis a*

Diese 3 Tetrachorde benannte man nach den Namen verschiedener Völkerstämme; das erste (*e f g a*) hiess das dorische; das zweite (*e fis g a*) das phrygische; das dritte (*e fis gis a*) das lydische.

Von ihnen stand das dorische im höchsten Ansehen, es galt bei den Griechen als das normale. Beschränken wir uns also auf die Betrachtung des dorischen Tetrachords *e f g a*.

Unter Beibehaltung der Aufeinanderfolge von ganzen und halben Tönen, wie sie durch dieses Tetrachord gegeben ist, konnte man doch die Mittelstufen *f* und *g* nach verschiedenen Prinzipien bestimmen.

Die älteste Bestimmungsart war diejenige des Pythagoras, der sich streng an die Intervalle hielt, die sich aus Quinte und Quarte ergeben.

Das dorische Tetrachord des Pythagoras war also in unserer genaueren Bezeichnungsweise

$$\overset{0}{e}\;\overset{0}{f}\;\overset{0}{g}\;\overset{0}{a} \quad \text{mit den 3 Intervallen } \tfrac{256}{243},\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{9}{8}.$$

$$\tfrac{256}{243}\quad \tfrac{9}{8}\quad \tfrac{9}{8}$$

(gemäss der Zerlegung $\frac{4}{3} = \frac{256}{243} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}$, oder $415'' = 75'' + 170'' + 170''$).

Im ersten Jahrhundert nach Chr. führte Didymus die schon von Archytas (circa 408 v. Chr., Tarent) angewandte natürl. Terz $\frac{5}{4}$ in das Tetrachord ein, indem er im Tetrachorde des Pythagoras das *f* als reine grosse Unterterz zu *a* einstimmte, während die übrigen Töne unverändert blieben. So entstand das nach ihm benannte Tetrachord

$$\overset{0}{e}\;\overset{+1}{f}\;\overset{0}{g}\;\overset{0}{a} \quad \text{mit den Tonschritten } \tfrac{16}{15},\ \tfrac{10}{9},\ \tfrac{9}{8}$$

$$\tfrac{16}{15}\quad \tfrac{10}{9}\quad \tfrac{9}{8}$$

(gemäss der Zerlegung $\frac{4}{3} = \frac{16}{15} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8}$ oder $415'' = 93'' + 152'' + 170''$), wobei die beiden letzten Tonschritte zusammen eine natürliche grosse Terz ausmachen: $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{5}{4}$.

Endlich führte Ptolemaeus (circa 140 nach Chr., Alexandria) das nach ihm benannte Tetrachord

$$\overset{0}{e}\ \underbrace{\ }_{\frac{16}{15}}\ \overset{+1}{f}\ \underbrace{\ }_{\frac{9}{8}}\ \overset{+1}{g}\ \underbrace{\ }_{\frac{10}{9}}\ \overset{0}{a}$$

ein, das sich von demjenigen des Didymus nur durch Vertauschung der beiden Ganztöne $\frac{10}{9}$ und $\frac{9}{8}$ unterscheidet, mit ihm aber das charakteristische Intervall der reinen grossen Terz $\frac{5}{4}$ gemein hat. Es entspricht genau dem zwischen der Terz und der Sexte liegenden Stück unserer natürlich-harmonischen *c*-dur-Tonleiter.

(Das auf dieses Tetrachord sich gründende Tongeschlecht wird oft als das „syntonisch-diatonische Tongeschlecht des Ptolemaeus" bezeichnet; die nach harmonischem Prinzip abgestimmten modernen Tonleitern lassen sich ganz mit Hülfe der Tetrachorde des Ptolemaeus und des Didymus aufbauen.)

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die verschieden abgestimmten Tetrachorde des Pythagoras, des Didymus und des Ptolemaeus, wenn sie auf einem reingestimmten Tasteninstrumente gespielt werden, sehr deutlich von einander zu unterscheiden sind.

Es handelt sich dabei stets um den deutlich wahrnehmbaren Unterschied von einem syntonischen Komma ($\frac{81}{80}$, $18''$). Das pythagoräische Tetrachord ist dasjenige von den dreien, das unserem Ohr entschieden am meisten zusagt. Wenigstens, war keiner der Musiker, denen der Verfasser die verschieden abgestimmten (oder, nach griechischem Ausdruck, verschieden „gefärbten") Tetrachorde vorspielte, im Zweifel, für welches er sich entscheiden sollte.

Allen genannten Tetrachorden war, bei aller Verschiedenheit, wenigstens das Eine gemeinsam, dass bei der Eintheilung des feststehenden Quartenintervalls in kleinere Intervalle immer zwei ganze und ein halber Ton, wenn auch von verschiedener Grösse, verwendet wurden. Alle gehörten dem sog. diatonischen Tongeschlecht an (von *διά*, durch, und *τόνος*, Tonart, also etwa „durch die Tonart fortschreitend"). Ausserdem kannten aber die Griechen Tetrachorde, die sie theils als chromatisch (von *χρῶμα*, Farbe, also etwa „gefärbt"), theils als enharmonisch bezeichneten. In ersteren wurde die Quarte in 2 aufeinanderfolgende Halbtöne und eine kleine

Terz eingetheilt, in letzteren in 2 Vierteltöne und eine grosse Terz. Das Tetrachord, das der Zerlegung $\frac{4}{3} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{6}{5}$ entspricht, war z. B. ein chromatisches; dagegen das aus der Zerlegung $\frac{4}{3} = \frac{32}{31} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{5}{4}$ hervorgehende ein enharmonisches.

Die meisten derartigen Tetrachorde gingen mehr aus theoretischen Spekulationen hervor und entsprachen wohl kaum einem praktischen Bedürfniss. Doch ist immerhin das letztgenannte enharmonische Tetrachord, in welchem der Halbton $\frac{16}{15}$ in 2 fast gleiche Vierteltöne $\frac{32}{31}$ und $\frac{31}{30}$ zerlegt ist, nicht ohne Interesse. Nach Berichten von Reisenden sollen einzelne orientalische Völker in ihren Gesängen noch jetzt solche Vierteltöne zur Anwendung bringen. In Griechenland scheinen die chromatischen und enharmonischen Tetrachorde nicht lange lebensfähig gewesen und bald ausser Kurs gekommen zu sein.

Von allen Tetrachorden der Griechen war es einzig das dorische Tetrachord des Pythagoras, das, wie ein Denkmal aus Granit, Jahrhunderte, ja Jahrtausende überdauerte und als festes, unerschütterliches Fundament für die weitere Entwicklung der Tonkunst diente.

Pythagoras blieb aber nicht bei der Aufstellung seines Tetrachords stehen, sondern er benützte dasselbe weiter zum Aufbau einer vollständigen Tonleiter von 8 Stufen, indem er die beiden gleichgebauten Tetrachorde $e^0\ f^0\ g^0\ a^0$ und $h^0\ c^0\ d^0\ e^0$ unmittelbar aneinanderfügte. So entstand die Leiter

$$\underbrace{e\ f\ g\ a}\ \underbrace{h\ c\ d\ e}$$

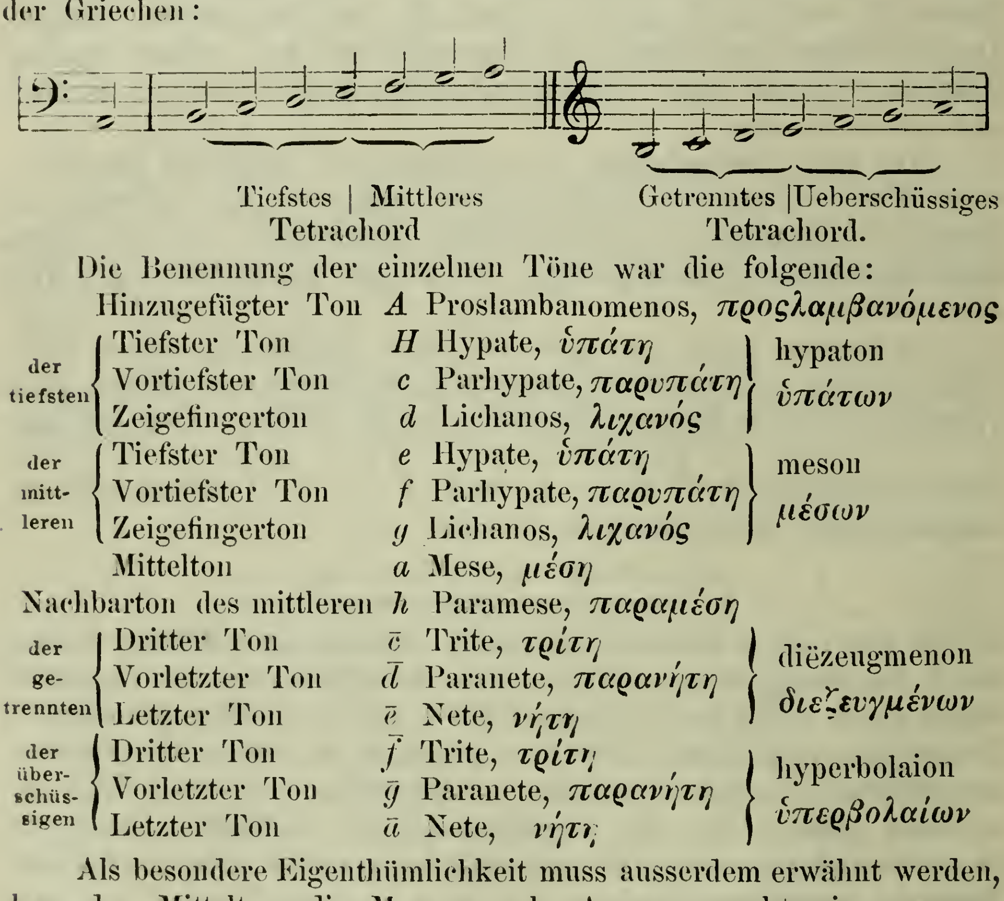
Wollte man diese Tonreihe über die Grenzen einer Oktave hinaus durch Anreihung weiterer Tetrachorde fortsetzen ohne zu wesentlich neuen (d. h. nicht nur um eine Oktave von den schon gewonnenen Tonstufen verschiedenen) Tönen zu gelangen, so musste das zunächst anzureihende Tetrachord mit dem vorhergehenden den Grenzton gemeinsam haben. Bei der Verlängerung der 8 stufigen Leiter um je ein Tetrachord nach oben und nach unten musste also die folgende Tonreihe entstehen:

$$\underbrace{H\ c\ d\ e}\ \underbrace{e\ f\ g\ a}\ \underbrace{h\ \bar{c}\ \bar{d}\ \bar{e}}\ \underbrace{\bar{e}\ \bar{f}\ \bar{g}\ \bar{a}}$$

in welcher sog. verbundene Tetrachorde mit getrennten abwechseln (die Bezeichnung der Tonhöhen ist hier in absolutem Sinne zu nehmen; der Exponent 0 wurde, weil selbstverständlich, weggelassen). Das Ganztonintervall zwischen zwei getrennten Tetrachorden, also

hier das Intervall *a—h*, hiess „Diazeuxis“ (*διάζευξις* = Trennung), die gemeinschaftliche Tonstufe von 2 verbundenen Tetrachorden (hier *e*) dagegen „Synaphe“ (*συναφή* = Bindung).

In der obigen Tonskala fassten die Griechen den obersten Ton *a* als den ersten, den untersten *H* als den letzten auf; dabei empfanden sie es aber als Mangel, dass die Tonleiter nicht mit einer tieferen Oktave des Ausgangstons endigte. Aus diesem Grunde fügten sie unten noch den Ton *A* an, den sie, weil ausserhalb der Tetrachord-Eintheilung stehend, den „hinzugenommenen“ (*προςλαμβανόμενος*) nannten. So entstand also die folgende 15stufige Normal-Tonleiter der Griechen:



Die Benennung der einzelnen Töne war die folgende:

	Hinzugefügter Ton	*A*	Proslambanomenos, *προςλαμβανόμενος*	
der tiefsten	Tiefster Ton	*H*	Hypate, *ὑπάτη*	hypaton *ὑπάτων*
	Vortiefster Ton	*c*	Parhypate, *παρυπάτη*	
	Zeigefingerton	*d*	Lichanos, *λιχανός*	
der mittleren	Tiefster Ton	*e*	Hypate, *ὑπάτη*	meson *μέσων*
	Vortiefster Ton	*f*	Parhypate, *παρυπάτη*	
	Zeigefingerton	*g*	Lichanos, *λιχανός*	
	Mittelton	*a*	Mese, *μέση*	
	Nachbarton des mittleren	*h*	Paramese, *παραμέση*	
der getrennten	Dritter Ton	$\bar{c}$	Trite, *τρίτη*	diëzeugmenon *διεζευγμένων*
	Vorletzter Ton	$\bar{d}$	Paranete, *παρανήτη*	
	Letzter Ton	$\bar{e}$	Nete, *νήτη*	
der überschüssigen	Dritter Ton	$\bar{f}$	Trite, *τρίτη*	hyperbolaion *ὑπερβολαίων*
	Vorletzter Ton	$\bar{g}$	Paranete, *παρανήτη*	
	Letzter Ton	$\bar{a}$	Nete, *νήτη*	

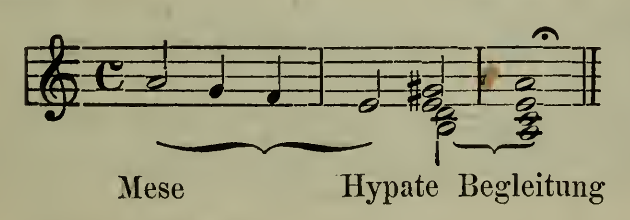
Als besondere Eigenthümlichkeit muss ausserdem erwähnt werden, dass der Mittelton, die Mese *a*, als Ausgangspunkt eines neuen, ausserhalb der normalen Tonreihe stehenden, sog. „verbundenen“ Tetrachords benützt wurde, indem die Viertonreihe *a b* $\bar{c}$ $\bar{d}$, gewissermassen als Zweiglinie an das „mittlere“ Tetrachord angeschlossen wurde:

e f g a b $\bar{c}$ $\bar{d}$

Mittleres Verbundenes
Tetrachord

Dadurch wurde in die streng diatonische Tonreihe ein fremdes Element, das *b*, eingeführt, das, nach unserer Auffassungsweise, schon einen ausgesprochen modulatorischen Charakter hat. In diesem verbundenen Tetrachorde hiessen *a* die Mese, *b* die Trite, $\bar{c}$ die Paranete und $\bar{d}$ die Nete, und zwar die letzten drei mit dem genaueren Zusatze „synemmenon", d. h. „der Verbundenen" (*συνημμένων*). — In Betreff der Notirung der Töne sei nur bemerkt, dass die Griechen dazu die Buchstaben ihres Alphabets in verschiedenen Stellungen (aufrecht, liegend und verkehrt) anwandten, und dass die Bezeichnung für die Singstimme eine andere war als für die begleitende Kithara, Lyra oder Flöte. —

In musikalischer Beziehung ist es von grossem Interesse, dass, nach gewissen Andeutungen von Aristoteles (384—322 vor Chr.), die Mese *a* eine Rolle spielte, welche derjenigen unserer Tonika einigermassen entspricht. Die Gesänge scheinen in der Regel mit der Mese *a* begonnen zu haben. Während aber bei uns das Bedürfniss überwiegt, eine einstimmige Melodie mit der Tonika enden zu lassen, schlossen die Griechen ihre Gesänge vorwiegend mit der Hypate *e*, zu welcher ihnen die Parhypate *f* als absteigender Leitton diente. Wenn wir, nach unserer modernen Ausdrucksweise, die Mese *a* als Tonika bezeichnen, so entspricht die Hypate *e* der Dominante. Die griechischen Gesänge pflegten also im Allgemeinen mit der Tonika zu beginnen und eine Quarte tiefer auf der Dominante zu endigen. Es erklärt sich dies naturgemäss aus dem Umstande, dass die Musik vorzugsweise dazu diente, dem gesprochenen Worte mehr Ausdruck zu verleihen, und sich daher dem Tonfalle des gewöhnlichen Sprechens eng anschloss. Beim modernen Recitativ tritt dieser Tonfall auch deutlich hervor; auch hier endigt die recitirende Singstimme meist auf der tieferen Dominante, und den für unser Tonalitätsgefühl nothwendigen, nach der Tonika zurückführenden Abschluss besorgt die Begleitung mit Hülfe des Dominant-Dreiklangs oder -Septimenakkords und des darauffolgenden Dreiklangs der Tonika. Wir können uns, auch in einem modernen Recitativ, das rein dorische Tetrachord als Abschluss des gesungenen Wortes vorstellen:



Mese Hypate Begleitung

(wobei man sich das Tetrachord eine Oktave tiefer denken kann).

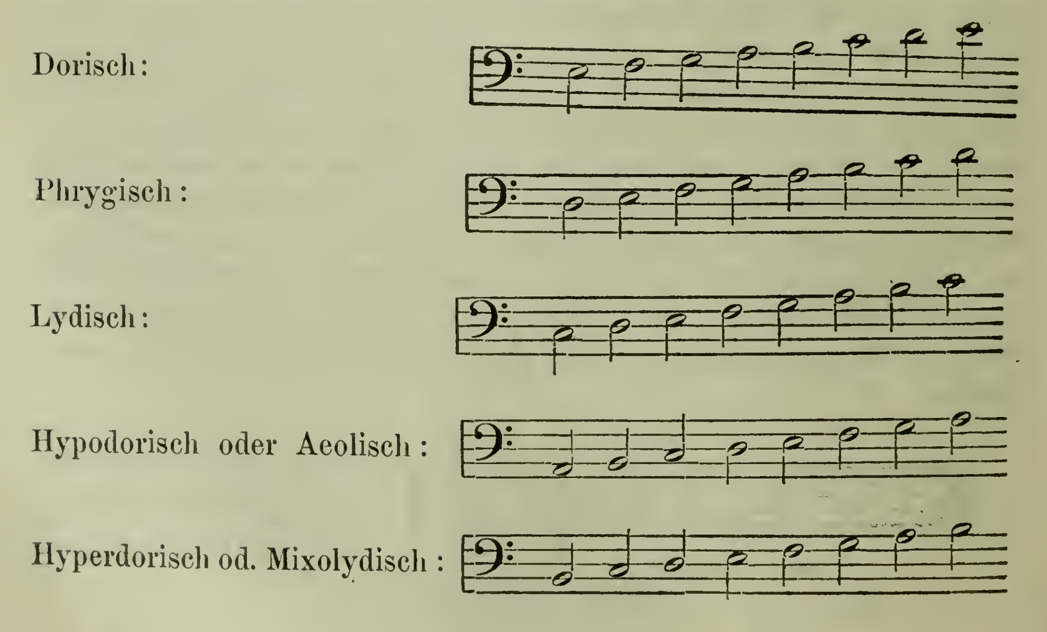
Aus der 15 stufigen diatonischen Tonleiter griffen nun die Griechen verschiedene je eine Oktave umfassende Tonleitern heraus, indem sie zunächst einen der 3 Töne *e*, *d* oder *c* zum Ausgangspunkt machten und die Leiter bis zur nächst höheren Oktave fortführten. So entstanden die folgenden 3 verschiedenen „Tonarten“:

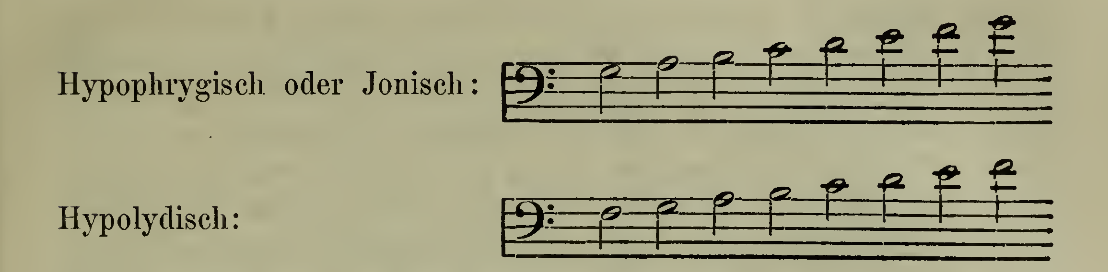
Dorisch: *e f g a h* $\bar{c}$ $\bar{d}$ $\bar{e}$

Phrygisch: *d e f g a h* $\bar{c}$ $\bar{d}$

Lydisch: *c d e f g a h* $\bar{c}$

welche ihren Namen nach der Art der sie zusammensetzenden Tetrachorde erhielten. Aus jeder einzelnen dieser drei Tonleitern bildeten die Griechen weiter je eine neue dadurch, dass sie den Ausgangspunkt um eine Quinte abwärts versetzten, oder, wenn der Umfang ihrer 15 stufigen Skala dies nicht erlaubte, um eine Quarte aufwärts. So entstanden die Tonarten, die sie mit dem Zusatze „hypo-“ (unter-) bezeichneten, also die hypodorische, von *A* bis *a* reichend; die hypophrygische von *g* bis $\bar{g}$, und die hypolydische von *f* bis $\bar{f}$. Endlich entstand aus der dorischen Tonleiter ausserdem noch die sog. hyper- (über-) dorische, welche von der Oberquinte (resp. Unterquarte) der dorischen Leiter zur nächst höheren Oktave, also von *H* nach *h* führte. Später wurde die hypodorische Tonleiter umgetauft in „aeolische“, die hypophrygische in „jonische“ und die hyperdorische in „mixolydische“. In unserer Tonschrift ausgedrückt hiessen also die 7 griechischen Tonarten:





Die griechischen Tonarten unterscheiden sich von einander wesentlich durch die verschiedene Lage der Ganz- und Halbtöne; ihr Unterschied ist von derselben Art wie derjenige zwischen unserem Dur und Moll. Die lydische Tonart stimmt genau mit dem modernen Dur-Geschlecht überein, die aeolische dagegen mit dem Moll-Geschlecht. Die altgriechischen Tonarten sind also nach unserer heutigen Auffassungsweise vielmehr als Ton-Geschlechter zu bezeichnen. Unsere modernen Tonarten dagegen zeigen unter sich nur Unterschiede in der absoluten Tonhöhe; sie sind gegeben durch die (auf die 12 Stufen der gleichschwebend temperirten Skala) transponirten Tonleitern ein und desselben Geschlechts, entweder von Dur oder von Moll. — Mit absoluter Nothwendigkeit mussten jedoch die Griechen schon früh dazu gedrängt werden, ihre verschiedenen Tonarten auch auf verschiedene Tonhöhen zu transponiren, um sie den verschiedenen Gattungen der menschlichen Stimme anzupassen. Die aeolische Tonleiter, in ihrer ursprünglichen Tonlage, war z. B. für eine Tenorstimme unsingbar, weil sie (in ihrer unteren Hälfte) zu tief lag; ebenso lag die nächst höhere Oktave für eine Sopranstimme zu tief. Umgekehrt lag z. B. die jonische Tonart für eine Bassstimme zu hoch, ebenso die nächst höhere Oktave für eine Altstimme.

Dem Tenor und dem Bass ist dagegen die Oktave zwischen *c* und $\bar{c}$, oder zwischen *d* und $\bar{d}$ gemeinsam; ebenso dem Sopran und dem Alt die Oktave zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ oder zwischen $\bar{d}$ und $\bar{\bar{d}}$.

Sollte irgend eine Melodie gleichzeitig von Männer- und Frauenstimmen gesungen werden, — von letzteren natürlich um eine Oktave höher als von ersteren — und sollte dies in verschiedenen „Tonarten“ geschehen können, so mussten alle Tonarten in die den verschiedenen Stimmengattungen gemeinsame Tonlage transponirt werden. Nehmen wir dazu die Oktave zwischen *c* und $\bar{c}$, resp. für Frauenstimmen diejenige zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$, so mussten also die 7 griechischen Tonarten (nach unserer heutigen Bezeichnungsweise) durch folgende Skalen dargestellt sein:

Lydisch:	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*
Phrygisch:	*c*	*d*	*es*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*
Dorisch:	*c*	*des*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c*
Hypolydisch:	*c*	*d*	*e*	*fis*	*g*	*a*	*h*	*c*
Jonisch:	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*
Aeolisch:	*c*	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c*
Mixolydisch:	*c*	*des*	*es*	*f*	*ges*	*as*	*b*	*c*

Alle diese transponirten Tonarten konnten von Männer- und Frauenstimmen gemeinschaftlich benützt werden. Sie waren auch auf einer einzigen 8 saitigen Lyra darstellbar, indem die 6 mittleren Saiten durch Regulirung der Spannung um einen halben Ton höher oder tiefer gestimmt werden konnten.

Das Transponiren der Tonarten führte nun zu neuen Tönen: *es*, *as*, *des*, *ges*, *fis* u. s. f., die in der ursprünglichen 15 stufigen Normalskala nicht enthalten waren, und so musste sich naturgemäss der Bereich der praktisch angewandten Töne mehr und mehr erweitern.

Schon Aristoxenos (um 350 v. Chr., Tarent) wusste, dass 12 aneinander gereihte Quinten nahezu zur 7 ten Oktave des Ausgangstons führen. Schon er kannte also das, was wir heutzutage den Quintenzirkel nennen, und es wird ihm auch die Eintheilung der Oktave in 12 unter sich gleiche Halbtöne zugeschrieben, also das, was wir unter der 12 stufigen gleichschwebenden Temperatur verstehen. Kannte man aber dieses Eintheilungsprinzip, so war es, nachdem man einmal angefangen hatte, zur Transposition der Tonarten zu schreiten, naheliegend, diese 12 Tonstufen dazu zu benützen und die 7 Tonarten auf jede dieser 12 Stufen zu transponiren.

Wir sehen also, dass das Tonsystem der alten Griechen ein ungemein reiches und hoch entwickeltes war. Es fehlte nicht am Baumaterial zur Aufführung eines Prachtbaues. Die schönsten behauenen Steine lagen da, und doch wurden dieselben nicht zu einem Bauwerk zusammengefügt, das des dazu angewandten Materials würdig war. Die Musik war immer nur untergeordnete Dienerin im Dienste des Kultus und der Poesie; zu freier Selbständigkeit konnte sie sich nicht aufschwingen. Wenn es wahr ist, dass die Griechen keine Mehrstimmigkeit kannten, so lag darin freilich ein grosses Hinderniss zur Entwicklung reicherer Kunstformen. Das fast gänzliche Schweigen der griechischen Schriftsteller über alles, was wir unter Harmonie verstehen, kann freilich nicht als Beweis dafür gelten, dass den Griechen die Mehrstimmigkeit ganz unbekannt war, aber wenigstens als Zeugniss dafür, dass sie mit derselben nichts anzufangen wussten

und ihr daher keinen grossen Werth beimassen. Die Idee von der Harmonie der Sphären scheint freilich darauf hinzudeuten, dass den Griechen die Wirkung des gleichzeitigen Erklingens von Tönen, die nach den einfachsten Zahlenverhältnissen abgestimmt sind, nicht fremd war, insbesondere dass sie die himmlische Ruhe eines Natur-Dreiklangs kannten und zu schätzen wussten; aber von der Kenntniss dieser einen Thatsache bis zu einer nach harmonischen Grundsätzen geregelten Mehrstimmigkeit ist noch ein ganz gewaltiger Schritt, den die Griechen nicht zu machen wussten und der nicht nur Jahrhunderte, sondern Jahrtausende erforderte.

Während unsere Kenntnisse über das altgriechische Tonsystem ziemlich reichhaltig und vollständig sind, wissen wir über die Musik der Griechen leider nur sehr wenig. Insbesondere sind wir darüber im Ungewissen, ob den einzelnen griechischen Tonarten oder vielmehr Tongeschlechtern eine Tonika in unserm Sinne zukam oder nicht. Die spärlichen, auf das dorische Tetrachord bezüglichen Andeutungen des Aristoteles reichen nicht hin, um uns über diese von unserem Standpunkt aus sehr wichtige Frage Klarheit zu verschaffen.

Gewiss ist es, dass das Abstimmungsprinzip der normalen griechischen Tongeschlechter das auf die reine Quintenverwandtschaft sich gründende pythagoräische war.

39. Die Tonleitern des ältesten christlichen Kirchengesanges: Ambrosius, Gregor der Grosse. Die Kirchentonarten des Mittelalters: Glarean. — An die Ueberlieferungen aus der Blüthezeit hellenischer Kunst knüpfte der älteste christliche Kirchengesang an, von dem wir Kunde haben. Bischof Ambrosius von Mailand († 397) setzte für den kirchlichen Gebrauch 4 sog. authentische Tonarten fest, die den folgenden 4 Skalen entsprachen:

1.	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*
2.	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*
3.	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*
4.	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*

Melodien der ersten Tonart mussten in *d* schliessen, solche der zweiten Tonart in *e*, der dritten in *f* und der vierten in *g*. Dadurch waren also die Anfangstöne der einzelnen Tonleitern als Tonika gekennzeichnet.

Gregor der Grosse (Papst 590—604) fügte den 4 authentischen Tonleitern des Ambrosius 4 neue, sog. plagale bei (von *τὸ πλάγος*, die Seite), welche eine Quarte tiefer, also mit der Dominante begannen. Diese plagalen Tonleitern ermöglichten es,

die Melodie auch unter die Tonika hinabzuführen bis zur Unterquarte derselben. Bei den authentischen Melodien war die Tonika der tiefste Ton, bei den plagalen die Unterquarte, d. h. die tiefere Dominante. Die 4 authentischen Tonleitern des Ambrosius wurden nun mit ungeraden Ziffern: 1, 3, 5, 7 bezeichnet, und dazwischen wurden die entsprechenden plagalen als Nummer 2, 4, 6, 8 eingeschaltet, indem man jeder authentischen Tonleiter in der Numerirung die entsprechende plagale unmittelbar folgen liess.

Gregor führte auch die Benennung der Töne durch Buchstaben des lateinischen Alphabets ein, indem er den „Proslambanomenos“, als den tiefsten Ton der griechischen diatonischen Normaltonleiter, mit *A* bezeichnete und von da nach der Reihenfolge der Buchstaben weiterschritt: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*.

Das griechische „Tetrachordon synemmenon“ mit dem neuen Tone *b* führte aber dazu, dem Buchstaben B zweierlei Bedeutung beizulegen, entsprechend derjenigen unseres „*h*“ und unseres „*b*“. Man unterschied deshalb ein ***B*** rotundum (♭) entsprechend unserem *b*, und ein ***B*** quadratum (♮ = ♮) entsprechend unserem *h*. Wahrscheinlich konnte in jeder der 8 erwähnten kirchlichen Tonleitern sowohl das *B* rotundum als das *B* quadratum angewandt werden. (In England und Holland hat sich die Bezeichnung „*b*“ an Stelle unseres *h* bis heute erhalten; vom Standpunkt der Logik aus verdient dieselbe den Vorzug.) Papst Gregor legte auch durch seine sog. Neumen den Grund zu der Notenschrift, aus der sich im Laufe der Jahrhunderte unsere heutige entwickelte.

Die Benennung und Numerirung der ambrosianischen und gregorianischen Kirchentonarten erfuhr im Laufe der Jahrhunderte mannigfache Abänderungen. Besonders der Umstand, dass das Tonalitätsgefühl noch ein sehr schwankendes und unsicheres war und in Folge dessen die alte Regel, welche den tiefsten Ton der authentischen Tonleitern als deren Tonika charakterisirte, vielfach unbeachtet blieb, trug dazu bei, eine arge Verwirrung anzurichten. Die einzelnen Tonarten unterschieden sich ja von einander wesentlich durch die verschiedene Lage der Ganz- und Halbtöne zur Tonika. War die Tonika selbst schwankend, so musste auch die Erkennung der Tonart als solcher durchaus unsicher werden. Als die Verwirrung ihren Höhepunkt erreicht hatte, unternahm es der Musiktheoretiker Glareanus (eigentlich Heinrich Loris aus Mollis im Kanton Glarus, 1488—1563), die alte Lehre von den Tonarten neu zu ordnen. In seinem Hauptwerke, dem in Basel im Jahre 1547 erschienenen „Dodekachordon“, stellte er 12 Tonarten als in der Musik der damaligen

Zeit gebräuchlich fest und bezeichnete 6 davon als authentisch, die übrigen 6 als plagal. Die altgriechischen Benennungen behielt er bei, übertrug sie jedoch in unrichtiger Weise auf seine 12 Tonarten, indem er die ursprünglichen griechischen Tonarten (oder besser: Tongeschlechter) nicht scharf genug von den späteren transponirten Tonleitern trennte. Die Namen Glarean's sind noch heute im Gebrauch und den Musikern viel bekannter als die richtigen altgriechischen Benennungen. Die 6 authentischen Tonarten Glarean's nebst ihren Benennungen sind folgende:

Jonisch:	***c***	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	authentisch nach Glarean.
Dorisch:	***d***	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	
Phrygisch:	***e***	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*	
Lydisch:	***f***	*g*	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*	
Mixolydisch:	***g***	*a*	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	
Aeolisch:	***a***	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	

Die 6 plagalen Tonleitern begannen nicht mit der Tonika (die hier durch Fettdruck hervorgehoben ist), sondern mit der Dominante. Sie wurden durch die Vorsilbe „hypo“ bezeichnet und lauteten demnach wie folgt:

Hypojonisch:	*g*	*a*	*h*	***c***	*d*	*e*	*f*	*g*	plagal nach Glarean.
Hypodorisch:	*a*	*h*	*c*	***d***	*e*	*f*	*g*	*a*	
Hypophrygisch:	*h*	*c*	*d*	***e***	*f*	*g*	*a*	*h*	
Hypolydisch:	*c*	*d*	*e*	***f***	*g*	*a*	*h*	*c*	
Hypomixolydisch:	*d*	*e*	*f*	***g***	*a*	*h*	*c*	*d*	
Hypoaeolisch:	*e*	*f*	*g*	***a***	*h*	*c*	*d*	*e*	

Es unterschied sich demnach z. B. die jonische Tonart von der hypolydischen, deren Tonleitern mit einander im Uebrigen genau übereinstimmen, dadurch dass der tiefste Ton der jonischen Tonleiter die Tonika der jonischen Tonart war, der tiefste Ton der hypolydischen Tonleiter dagegen die Dominante der hypolydischen Tonart.

Um den Verwechslungen, die aus der Verschiedenheit der Bezeichnungen für eine und dieselbe Tonart unvermeidlich entspringen mussten, ein Ende zu setzen, schlug Helmholtz eine Bezeichnung vor, die wegen ihrer Eindeutigkeit und Klarheit allen andern vorzuziehen ist. Nach Helmholtz heisst z. B. die durch die Tonleiter *e f g a h c d e* bestimmte Tonart mit der Tonika ***e*** „das Sextengeschlecht von *e*“, und zwar „Sextengeschlecht“ aus dem Grunde, weil die Vorzeichnung dieser Leiter dieselbe ist wie diejenige von *c*-dur, und *c* die (kleine) Sexte von *e* ist. Es wäre also z. B. die Tonleiter ***g*** *a h c d e f g*, weil sie dieselbe Vorzeichnung hat wie die auf der Quarte von *g*

errichtete Durtonleiter (*c*-dur), „als Quartengeschlecht von *g*" zu benennen u. s. f.

Stellen wir die 3 Hauptbezeichnungen für die 7 untransponirten, der ursprünglichen diatonischen Tonreihe entnommenen Oktavengattungen (Tonarten oder Tongeschlechter) übersichtlich neben einander, so haben wir also folgende kleine Uebersicht:

Oktaven-gattung	Altgriechische Bezeichnung	Nach Glarean	Nach Helmholtz
c d e f g a h c	Lydisch	Jonisch	Dur
d e f g a h c d	Phrygisch	Dorisch	Septimengeschl. v. *d*
e f g a h c d e	Dorisch	Phrygisch	Sextengeschl. v. *e*
f g a h c d e f	Hypolydisch	Lydisch	Quintengeschl. v. *f*
g a h c d e f g	Hypophrygisch od. Jonisch	Mixolydisch	Quartengeschl. v. *g*
a h c d e f g a	Hypodorisch od. Aeolisch	Aeolisch	Terzengeschl. v. *a*
h c d e f g a h	Hyperdorisch oder Mixolydisch	—	Sekundengeschl. von *h*

Unter Sekunde, Terz, Sexte und Septime sind hierbei die kleinen Intervalle dieses Namens zu verstehen.

40. Die fünfstufigen Tonleitern der Schotten und der mongolischen Völker. — Während die Oktavengattungen der alten Griechen und die Kirchentonarten des Mittelalters aus 7 Tönen bestanden, die mit einander quintenverwandt sind, d. h. als zusammenhängende Quintenkette dargestellt werden können ($\overset{\circ}{f}\ \overset{\circ}{c}\ \overset{\circ}{g}\ \overset{\circ}{d}\ \overset{\circ}{a}\ \overset{\circ}{e}\ \overset{\circ}{h}$), liegen den Melodien einiger mongolischer Völker sowie besonders der Gälen Hoch-Schottlands und Irlands 5 stufige Skalen zu Grunde, deren charakteristisches Merkmal das Fehlen von Halbtonschritten ist. Zur Bildung solcher Tonleitern genügen 5 anschliessende Töne irgend einer Quintenkette, z. B.

$$\overset{\circ}{f} \quad \overset{\circ}{c} \quad \overset{\circ}{g} \quad \overset{\circ}{d} \quad \overset{\circ}{a}$$

welche von $\overset{\circ}{c}$ ausgehend, die 5 stufige Skala $\overset{\circ}{c}\ \overset{\circ}{d} - \overset{\circ}{f}\ \overset{\circ}{g}\ \overset{\circ}{a} - \overset{\circ}{c}$ liefern. Es wechseln hierin Ganztonschritte mit Schritten von $1\frac{1}{2}$ Tönen ab. Jeder der 5 Töne einer solchen Tonleiter kann aber als Ausgangspunkt genommen werden, so dass 5 verschiedene Gattungen von Tonleitern entstehen.

Von derartigen Skalen wird man sich am besten dadurch ein Bild machen, dass man beliebige 5 neben einander liegende schwarze

Obertasten des Klaviers zu einer Tonleiter verbindet (unter Hinzunahme der 6ten, um die Oktave zu schliessen). Jede beliebige Obertaste kann als Ausgangspunkt einer solchen Tonleiter benützt werden. Transponirt man alle auf diese Weise zu gewinnenden Leitern auf den gemeinsamen Ausgangspunkt *c*, so lauten die 5 möglichen Skalen:

1) *c d — f g a — c*; 2) *c — es f g — b c*
3) *c d e — g a — c*; 4) *c d — f g — b c*
5) *c — es f — as b c*.

Diejenigen schottischen Lieder, welche einen moll-ähnlichen Charakter haben, gehören meist dem Typus 2) ohne Sekunde und Sexte an. Dagegen entspricht der überwiegenden Mehrzahl schottischer Lieder mit Dur-Charakter der Typus 3) ohne Quarte und Septime. Dass die mit dem Vordringen des Christenthums zusammenhängende Bekanntschaft mit den 7stufigen kirchlichen Tonleitern nicht ganz ohne Einfluss auf die Volksmelodien blieb, ist ganz natürlich; es ist jedoch bemerkenswerth, dass das eigentlich Charakteristische der altschottischen Lieder durch das gelegentliche Berühren der nicht zur 5stufigen Leiter gehörenden Töne durchaus nicht beeinträchtigt wird. In vielen, selbst aus neuerer Zeit stammenden Liedern hat sich die 5stufige Skala ganz rein erhalten; in allen aber liegt sie dem eigentlich charakteristischen Tonfall zu Grunde.

Folgende 2 Beispiele mögen hier genügen:



Das erste Beispiel ist ein altschottisches kriegerisches Thema, das Max Bruch im letzten Satze seiner sog. schottischen Phantasie für

† 1474, Johannes Okeghem † 1515, Josquin des Près † 1521, Orlando di Lasso † 1594 u. A. m.). Durch die Mehrstimmigkeit musste auch der Sinn für die Rhythmik in der Musik geschärft werden, denn die Bewegung der einzelnen Stimmen erforderte nicht nur eine Regelung in Bezug auf die Tonhöhe, sondern auch in Bezug auf die Zeit. Die Tonschrift musste auch im Stande sein, den Rhythmus auszudrücken, und so entstand schon im Anfang oder in der Mitte des 12. Jahrhunderts die Notenschrift, welche als Mensuralnotation bezeichnet wird. (Franko von Köln.)

Das Charakteristische der ganzen Polyphonie des Mittelalters bestand darin, dass das Hauptgewicht auf die melodische Führung der einzelnen Stimmen gelegt wurde und die Schönheit des Zusammenklangs erst in zweiter Linie in Betracht kam. Das Streben nach harmonischem Wohlklang ging nicht weiter, als das ausdrückliche Vermeiden von Missklang es direkt mit sich brachte. Desshalb war auch unter der Herrschaft der mittelalterlichen Polyphonie kein Grund da, vom pythagoräischen Stimmungsprinzip abzuweichen. Sind ja doch Dreiklänge mit pythagoräischen Terzen, wenn auch nicht als absolut wohlklingend, so doch nicht als dissonant im eigentlichen Sinne des Wortes zu bezeichnen.

42. Die Reform der polyphonen Musik und der Uebergang zur harmonischen. Der protestantische Kirchenchoral: Luther. — Palestrina und Gabrieli. — Antheil der Oper an der Einführung der harmonischen Musik. — Ein wesentlicher Umschwung begann im Laufe des 16. Jahrhunderts sich zu vollziehen. Die neu enstandene protestantische Kirche verlangte die Theilnahme der ganzen Gemeinde am Gesang in der Kirche. Die verwickelten polyphonen Kompositionen der alten Kontrapunktiker erforderten zu ihrer Wiedergabe einen wohlgeschulten Chor tüchtiger Sänger, für eine ganze Gemeinde ungeschulter Sänger war es aber ein Ding der Unmöglichkeit, solche Kompositionen auch nur annähernd gut zu singen. Sollte der Kirchengesang auf eine breitere Basis gestellt werden und auch die Gemeinde aktiv am Gesang theilnehmen, so musste man entweder zum Unisono-Gesang zurückkehren oder eine neue Art mehrstimmigen Gesanges schaffen, die verständlicher, durchsichtiger und auch von wenig geschulten musikalisch beanlagten Sängern auszuführen war. Der Kontrast zwischen der verwickelten Vielstimmigkeit der damaligen Zeit und dem einfachen Unisono-Gesang war zu gross, um wieder ganz zu letzterem zurückzukehren. Das musikalische Ohr verlangte Mehrstimmigkeit, aber eine klare, durchsichtige Mehrstimmigkeit. So entstand der

protestantische Kirchen-Choral: eine einfache, verständliche Melodie wurde mit einer harmonischen Unterlage versehen, harmonisirt. Einer Stimme, vorzugsweise der obersten, fiel es zu, die Choral-Melodie zu singen; die übrigen hatten einen weit geringeren Grad musikalischer Selbständigkeit, sie wurden so geführt, dass sie unter sich und mit der melodieführenden Stimme wohlklingende Akkorde bildeten. So büssten die einzelnen Stimmen, abgesehen von der melodieführenden, einen grossen Theil ihrer Selbständigkeit ein zu Gunsten der Akkorde. Während vom Standpunkte der älteren Polyphonie aus wohlklingende Akkorde sich gewissermassen als ein Nebenprodukt der melodischen Stimmführung ergaben, kehrte sich nun das Verhältniss einigermassen um.

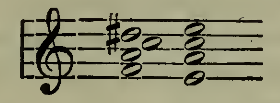
Die Akkorde erlangten einen erhöhten Grad von Selbständigkeit auf Kosten der einzelnen Stimmen. Das Interesse und die Aufmerksamkeit des Hörers konzentrirte sich nun auf die in einer Stimme liegende Choral-Melodie einerseits und den Wohlklang der Akkorde andrerseits. Man musste darauf hingedrängt werden, Beziehungen zwischen den einzelnen Akkorden zu suchen und zu finden und Regeln über die Verbindung von Akkorden aufzustellen; es entwickelten sich die Anfänge einer geordneten Harmonielehre. Mehr und mehr bildete sich der Sinn für Tonalität aus: die Tonika und der auf ihr aufgebaute Dreiklang übernahm eine führende Rolle und alle andern Töne und Dreiklänge wurden in Beziehung zu dem herrschenden Oberhaupte gesetzt. — In der römischen Kirche reformirten Johannes Gabrieli (1557—1612) und namentlich Palestrina (1515—1594) den Gesang in ähnlichem Sinne, wie Luther und seine Anhänger in der protestantischen Kirche; auch dort kehrte man zu einer weniger verwickelten Stimmführung zurück, ohne doch auf die reichen Kunstformen der Polyphonie ganz zu verzichten. Speziell die Kirchenkompositionen Palestrina's sind wahre Wunderwerke in Bezug auf Verschmelzung höchster Kunst mit klarer Durchsichtigkeit.

Der Uebergang von polyphoner zu harmonischer Musik wurde im Weiteren beschleunigt durch die Einführung und Entwicklung der Oper. In der Oper mussten Chöre mit Solo-Gesängen abwechseln. Die Chöre konnten zwar polyphon gehalten sein, aber zwischen die vielstimmigen Gesänge hätte nun ein einfacher unbegleiteter Solo-Gesang nicht hineingepasst. So entstand also auch auf diesem Gebiete die Aufgabe, eine Melodie mit einer harmonischen Unterlage zu versehen. Es entstand das begleitete Recitativ (Jakob Peri, Caccini, Corsi, um 1600) und die begleitete Arie (Monteverde 1568—1643 und Viadana 1564—1645).

43. Die Folgen des Ueberganges von der polyphonen zur harmonischen Musik: die Umgestaltung der alten Kirchentonarten in die zwei Tongeschlechter von Dur und Moll. Die Einführung der reinen grossen Terz und die Erweiterung des pythagoräischen Quintensystems zum harmonischen Tongewebe. Folgen für die Stimmung klavierähnlicher Instrumente; musikalische Temperaturen. — Der Uebergang zur harmonischen Musik brachte hauptsächlich nach 2 Richtungen hin Folgen mit sich:

Von den alten Kirchentonarten erwiesen sich nicht alle als gleich geeignet zu harmonischer Verwendung. Zunächst verwischte sich mit dem ausgesprocheneren Tonalitätsgefühl der Unterschied zwischen den plagalen und authentischen Kirchentonarten; diese hatten ja dieselbe Tonika und unterschieden sich von einander in keinem Punkte, der vom harmonischen Standpunkt aus wesentlich in Betracht kommen konnte. Von den 6 authentischen Kirchentonarten Glarean's entsprach die jonische unserem Dur, die aeolische unserer absteigenden Molltonleiter. Die lydische Tonleiter *f g a h c d e f* (Quintengeschlecht) war harmonisch nicht zu gebrauchen wegen der über der Tonika stehenden übermässigen Quarte *h*; wurde diese in die reine Quarte verwandelt, indem man *b* statt *h* setzte, so entstand daraus eine transponirte jonische Tonleiter: *f*-dur. Die Einführung eines nach der Tonika aufsteigenden Leittons, auf welche man durch das Bedürfniss nach einem befriedigenden Schluss hingedrängt wurde, bewirkte weiter die Umwandlung der mixolydischen Tonleiter *g a h c d e f g* in die *g*-dur-Tonleiter, also wieder in ein transponirtes Jonisch, und die dorische Tonleiter *d e f g a h c d* verwandelte sich in die aufsteigende Molltonleiter von *d*-moll. Es blieb also von den 6 authentischen Kirchentonarten Glarean's ausser der jonischen, unserem Dur, und der zu unserem Moll verschmelzenden dorischen und aeolischen, nur die phrygische Tonart (das Sextengeschlecht), die sich einen höheren Grad von Selbständigkeit noch längere Zeit zu wahren wusste. In der phrygischen Kirchentonart erschien der düstere Charakter unseres Moll noch in erhöhtem Maasse ausgedrückt; sie war im Intervallenbau die direkte Umkehrung des Durgeschlechts. Noch Händel, Bach und Mozart wenden gelegentlich, wo es sich um scharfe Charakteristik und ausdrucksvollen Gegensatz zu hellem, klarem Dur handelt, die phrygische Kirchentonart an. Aber auch sie konnte sich dem Verschmelzungsprozess, der die Mannigfaltigkeit der alten Tongeschlechter auf die Zweizahl unseres Dur und Moll reduzirte, auf die Dauer nicht entziehen. Nur ein Ueber-

rest davon ist in die moderne Musik übergegangen und besitzt darin noch jetzt volles Bürgerrecht: der übermässige Sextakkord



der einen abwärts strebenden und einen aufwärts steigenden Leitton besitzt. Der absteigende Leitton ist der phrygischen Tonleiter (dem Sextengeschlecht) *e f g a h c d e* eigen und für dieses Tongeschlecht charakteristisch; der aufwärts steigende Leitton wurde erst später eingeführt als Terz im Dominant-Dreiklang. — Von den 6 alten authentischen Tonarten Glarean's gingen also 3: die jonische, lydische und mixolydische ganz in unserem Dur auf; die 3 übrigen, die dorische, aeolische und in letzter Linie die phrygische verschmolzen in unser Moll, ohne dass jedoch der Verschmelzungsprozess ein so vollkommener war wie bei den drei ersteren. Die verschiedenen Formen unserer heutigen Molltonleiter weisen deutlich darauf hin, dass das Mollgeschlecht das Resultat einer unvollkommenen Verschmelzung ist; es kann jedoch nicht behauptet werden, dass die Unvollkommenheit der Verschmelzung dem Mollgeschlecht zum Schaden gereiche.

Ausser dem Anstoss zu der allmählichen Umwandlung der Kirchentonarten hatte das Zurücktreten der verwickelten Polyphonie zu Gunsten der leichter zu fassenden und durchsichtigeren harmonischen Musik eine sehr beachtenswerthe Folge: die Einführung der natürlichen grossen Terz $\frac{5}{4}$ in die praktische Musik, für welche namentlich Zarlino (1517—1590) kräftig eintrat. Die Konzentration der Aufmerksamkeit auf den harmonischen Bau der Kompositionen musste den Sinn für harmonische Reinheit schärfen und dazu führen, in einem Dur-Dreiklang die zu grosse, unruhige pythagoräische Terz ($\frac{81}{64}$) durch die zwar etwas stumpfe, aber im harmonischen Zusammenklang wunderbar ruhig dahinfliessende und wohllautende natürliche Terz ($\frac{5}{4}$) zu ersetzen. Damit war aber ein fremdes Element eingeführt, welches im pythagoräischen System nicht zu finden war; der erste und entscheidende Schritt zur Erweiterung der pythagoräischen Quintenreihe und zum Aufbau des harmonischen Tonsystems war geschehen. Es bedurfte nur eines konsequenten Fortschreitens auf dem betretenen Wege, um das ganze unbegrenzte (zweidimensionale) Tongewebe zu erschliessen.

Der unendliche Reichthum neugewonnener Töne brachte aber für die musikalische Praxis neue grosse Schwierigkeiten mit sich,

namentlich für die Instrumente mit fester Stimmung: Orgel und klavierähnliche Instrumente. Es ist wohl selbstverständlich, dass unter der Herrschaft des pythagoräischen Stimmungsprinzips die Orgeln und alle damit verwandten Instrumente von Alters her diesem Prinzip gemäss abgestimmt waren. Die bekannte Thatsache, dass 12 anschliessende Quintenschritte nahezu zu einer höhern Oktave des Ausgangstones führen, d. h. die Kenntniss des Quintenzirkels, hatte schon früh dazu geführt, sich mit 12 Tonstufen in der Oktave zu begnügen. Es kann als gewiss betrachtet werden, dass schon vor circa 500 Jahren im Wesentlichen die noch heutigen Tags übliche Form der Klaviatur im Gebrauch war.

Ein im Jahre 1410 vollendetes Bild Johann van Eyck's, welches die heilige Cäcilia vor einer Orgel sitzend darstellt, zeigt dieselbe Anordnung von Ober- und Untertasten und dieselbe Zahl von 12 Tonstufen in der Oktave, wie sie bei den Orgeln und Klavieren von heutzutage üblich ist. — Der Fehler dieser Stimmung bestand hauptsächlich darin, dass wegen des Grundfehlers des sich nicht vollkommen schliessenden Quintenzirkels die Quinte der beiden äussersten Töne der Quintenkette keine reine war. Hatte man für die 12 Tasten der Oktave die 12 anschliessenden Quintentöne

$$\overset{0}{des}\quad \overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}\quad \overset{0}{g}\quad \overset{0}{d}\quad \overset{0}{a}\quad \overset{0}{e}\quad \overset{0}{h}\quad \overset{0}{fis}$$

gewählt, so war die Quinte *fis—des* um das pythagoräische Komma zu klein und unbrauchbar. Aber es waren doch alle andern Quinten völlig rein, und es liess sich, so lange man mit pythagoräischen Terzen zufrieden war, ganz reinlich musiziren, wenn man sich in den Modulationen nicht zu weit vom Centrum der Quintenkette entfernte. Viel schlimmer wurde aber die Sache durch die Einführung der reinen grossen Terz und der dadurch zu gewinnenden Töne. Wollte man auch dieser einschneidenden Neuerung Rechnung tragen und die Orgel dem neu eingeführten harmonischen Prinzip des reinen Dreiklangs wenigstens einigermassen anpassen, so musste man entweder Instrumente mit einer weit grösseren Zahl von Tönen innerhalb der Oktave bauen, oder zur Erfindung von Ausgleichsverfahren, d. h. von musikalischen Temperaturen schreiten. Beide Wege wurden eingeschlagen. Die Bestrebungen zur Konstruktion reingestimmter Tasteninstrumente sind ebenso alt als die ersten Anfänge harmonischer, d. h. auf den reinen Dur-Dreiklang gegründeten Musik. Es würde uns viel zu weit führen, auf diese Versuche hier ausführlicher einzutreten; nur einige Instrumente aus neuerer Zeit sollen unten kurz besprochen werden. —

Die Praktiker neigten naturgemäss dazu, die übliche Form der Klaviatur mit 12 Tasten in der Oktave um jeden Preis zu wahren. Sie schritten zur Erfindung von Temperaturen. Zunächst gingen sie von der Forderung aus, ihre 12 Tasten so abzustimmen, dass man in den gebräuchlicheren Tonarten harmonisch reine Dreiklänge zur Verfügung hatte. Das brachte aber den unvermeidlichen Nachtheil mit sich, dass für andere Tonarten die Fehler sich so sehr summirten, dass diese Tonarten ganz unbrauchbar wurden. Irgendwo entstand immer ein „Wolf", ein unreines Intervall, welches man umgehen musste. Alle Arten musikalischer Temperatur, welche darauf basiren, dass gebräuchlichere Tonarten auf Kosten der seltener vorkommenden bevorzugt werden, fasst man zusammen unter dem Sammelnamen der „ungleichschwebenden Temperaturen". Es gibt deren eine fast unübersehbare Zahl. Nur 2 der wichtigsten sollen hier in Kürze besprochen werden.

44. Ungleichschwebende Temperaturen: die Temperatur von Kiruberger und die sog. mitteltöuige Temperatur. Die Einführung der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur durch Werckmeister und Neidhardt. — Die Kirnberger'sche ungleichschwebende Temperatur (Kirnberger 1721—1783) stand lange Zeit in hohem Ansehen; ihre 12 Stufen sind durch folgende Zahlen gegeben (z = Schwingungsmaass, x = Oktavenmaass in μ ausgedrückt, vom Grundton aus gerechnet):

	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{des}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{es}$	$\overset{-1}{e}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{-1}{fis}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{as}$	a	$\overset{0}{b}$	$\overset{-1}{h}$	$\overset{0}{c}$
z =	1,	$\frac{256}{243}$,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{32}{27}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{45}{32}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{128}{81}$,	$\frac{270}{161}$,	$\frac{16}{9}$,	$\frac{15}{8}$,	2
x =	0,	75,	170,	245,	322,	415,	492,	585,	660,	746,	830,	907,	1000

Wie man sieht, gehören die Tonstufen $\overset{0}{c}$, $\overset{0}{des}$, $\overset{0}{d}$, $\overset{0}{es}$, $\overset{0}{f}$, $\overset{0}{g}$, $\overset{0}{as}$, $\overset{0}{b}$ einer und derselben pythagoräischen Quintenreihe an, während $\overset{-1}{e}$, $\overset{-1}{fis}$, $\overset{-1}{h}$ der nächsten Oberterzreihe entnommen sind. Die der grossen Sexte entsprechende Stufe von 746^{μ} hält genau die Mitte zwischen der natürlichen grossen Sexte $\overset{-1}{a} = 737^{\mu}$ und der pythagoräischen $\overset{0}{a} = 755^{\mu}$. Es sei dem Leser überlassen, auf Grund der oben gegebenen Zahlen sich ein Urtheil über die Brauchbarkeit der einzelnen Tonarten zu bilden. — Eine andere sehr bemerkenswerthe Art ungleichschwebender Temperatur wurde schon im Jahre 1511 von dem deutschen Organisten Arnold Schlick in seiner

Schrift: „Spiegel der Orgelmacher und Organisten“ (von R. Eitner in den Monatsheften für Musikgeschichte, Jahrg. 1869, neu herausgegeben) vorgeschlagen und durchgeführt. Schlick ging von dem Gedanken aus, in der Quintenreihe $\overset{0}{c}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{a}\ \overset{0}{e}$, deren letzter Ton $\overset{0}{e}$ um ein syntonisches Komma höher ist als die natürliche grosse Terz $\overset{-1}{e}$ von $\overset{0}{c}$, jeden der 4 Quintenschritte genau um $\frac{1}{4}$ Komma zu klein zu machen, um so durch 4 Quintenschritte nicht zur „pythagoräischen, sondern zur natürlichen grossen Terz $\overset{-1}{e}$ des Grundtons $\overset{0}{c}$ zu gelangen.

Mit andern Worten: er erniedrigte $\overset{0}{e}$ zu $\overset{-1}{e}$ und vertheilte den dadurch entstehenden Fehler von einem synt. Komma gleichmässig auf die vier Quinten zwischen *c* und *e*. Bei consequenter Durchführung dieses Grundsatzes mussten den einzelnen Tönen der auf diese Weise modifizirten Quintenreihe folgende in „ ″ “ ausgedrückte Maasse zukommen:

es	*b*	*f*	*c*	*g*	*d*	*a*	*e*	*h*	*fis*	*cis*	*gis*
245	830	415	0	585	170	755	322	907	492	77	644
$+3.\frac{18}{4}$	$+2.\frac{18}{4}$	$+\frac{18}{4}$		$-\frac{18}{4}$	$-2.\frac{18}{4}$	$-3.\frac{18}{4}$		$-\frac{18}{4}$	$-2.\frac{18}{4}$	$-3.\frac{18}{4}$	

Nach steigender Höhe geordnet geben diese Töne also die folgende Skala:

c	*cis*	*d*	*es*	*e*	*f*	*fis*	*g*	*gis*	*a*	*b*	*h*	*c*
0	63,5	161	258,5	322	419,5	483	580,5	644	741,5	839	902,5	1000

Rein waren in dieser Stimmung alle grossen Terzen und kleinen Sexten, mit Ausnahme derjenigen über *h*, *fis*, *cis* und *gis*, welche um 34″ zu gross, resp. zu klein, also musikalisch entschieden unbrauchbar waren. Die Quinten waren alle um 4,5″ zu klein, nur die Quinte *gis*—*es*, der „Wolf“, war um 29,5″ zu gross, ihre Umkehrung um dasselbe Intervall zu klein, also ebenfalls ganz unbrauchbar. Da bei dieser Art von Temperatur der ganze Ton 161 genau in der Mitte zwischen dem grossen Ganzton 170 und dem kleinen 152 liegt, so wurde ihr auch der Name „mitteltönige Temperatur“ („mean tone temperament“) gegeben. Diese Temperatur war Jahrhunderte lang mehr oder weniger in Gebrauch; in Frankreich wurde sie noch im Jahre 1726 von Rameau vertheidigt und erhielt sich dort unzweifelhaft bis in die zweite Hälfte des letzten Jahrhunderts.

Für weitere Arten ungleichschwebender Temperaturen muss auf

Spezialschriften verwiesen werden (s. z. B. Marpurg, Versuch über die musikalische Temperatur, Breslau 1776).

Die bedeutendsten Musiker traten mit praktisch mehr oder weniger brauchbaren Vorschlägen hervor, Systeme über Systeme wurden ersonnen und wieder aufgegeben, und das Resultat war, dass man sich dahin einigte, die Oktave in 12 unter sich gleiche Intervalle einzutheilen und die 12stufige sog. „gleichschwebende Temperatur" einzuführen. Nur bei einer Eintheilung des Tongebietes in Intervalle, die unter sich vollkommen gleich sind, wird man von jedem Tone aus genau dieselben Intervalle mit demselben Grade von Reinheit vorfinden.

In keiner Tonart wird man vollkommen rein spielen können, aber in jeder Tonart sind die Abweichungen von der Reinheit gleich gross und alle Tonarten sind musikalisch brauchbar. Es war daher die Einführung der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur eine wirkliche Errungenschaft für die Instrumente mit fester Stimmung. Sie bedeutete von allen unvermeidlichen Uebeln das geringste, ohne jedoch ihren Charakter als Uebel gänzlich zu verleugnen.

Als Vorkämpfer für die praktische Einführung der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur in Deutschland verdienen genannt zu werden:

Andreas Werckmeister († 1706 in Halberstadt als Organist) und Johann Georg Neidhardt*) († 1739 in Königsberg), die

*) Der vollständige, sehr charakteristische Titel der grundlegenden Arbeiten der oben genannten Autoren ist folgender:

Musikalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht, wie man durch Anweisung des Monochordi ein Klavier, sonderlich die Orgelwercke, Positive, Regale, Spinetten und dergleichen wohl temperirt stimmen könne, damit nach heutiger Manier alle modi ficti in einer angenehm und erträglichen Harmonia mögen genommen werden, mit vorhergehender Abhandlung von dem Vorzuge, Vollkommen- und weniger Vollkommenheit der musikalischen Zahlen (Proportionen) und Consonantien, welche bei Einrichtung der Temperaturen wohl in acht zu nehmen sind, benebst einem dazu gehörig- in Kupfer vorgebildeten deutlichen und völligen Monochordo, beschrieben und an das Tageslicht gegeben durch Andreas Werckmeistern, Stiffts-Hof-Organisten zu Quedlinburg. Frankfurt und Leipzig, in Verlegung Theodori Philippi Calvisii, Buchhändler in Quedlinburg, anno 1691. — Ferner: Johann George Neidhardts S. S. Theol. Stud. beste und leichteste Temperatur des Monochordi, vermittelst welcher das heutiges Tages bräuchliche Genus Diatonico-chromaticum also eingerichtet wird, dass alle Intervalla nach gehöriger Proportion einerlei Schwebung überkommen und sich daher die modi regulares in alle und jede claves in einer angenehmen Gleichheit transponiren lassen. Worbey vorhero von dem Ursprung der musikalischen Proportionum, den generibus musicis, deren Fehlern und Unzulänglichkeit anderer Verbesserungen gehandelt wird. Alle aus mathematischen Gründen gründlich, ordentlich, deutlich und kürtzlich

mit ihren Vorschlägen Ende des 17. und Anfangs des 18. Jahrhunderts an die Oeffentlichkeit traten. Sebastian Bach liess sein Klavier schon gleichschwebend temperirt stimmen, und sein berühmtes Werk: „Das wohltemperirte Klavier“ darf wohl als Zeugniss dafür angesehen werden, dass ihm diese neue Art von Temperatur als wesentlicher Fortschritt wenigstens für das Klavier erschien. — In Frankreich war es Rameau, welcher in seinen späteren Lebensjahren die Einführung der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur befürwortete.

Nicht unerwähnt mag bleiben, dass auch eine 19stufige gleichschwebende Temperatur vorgeschlagen, jedoch praktisch niemals eingeführt wurde (siehe Opelt, Allgemeine Theorie d. Musik, auf den Rhythums der Klangwellenpulse gegründet, Leipzig bei Barth 1852).

Es wird dem sich dafür interessirenden Leser ein Leichtes sein, die Intervalle der 19stufigen Tonleiter selbst zu bilden und mit den natürlichen auf dem Wege der Rechnung zu vergleichen, um sich so ein ungefähres Urtheil über die Brauchbarkeit dieses Systems zu bilden.

45—49. Einige reingestimmte Tasteninstrumente.

45. Die Mercator-Bosanquet'sche 53stufige gleichschwebende Temperatur und das Bosanquet'sche Harmonium. — Unter den gleichschwebenden Temperaturen mit einer grösseren Anzahl von Tonstufen innerhalb einer Oktave verdient das von Mercator vorgeschlagene und von Bosanquet praktisch durchgeführte System hervorgehoben zu werden, da dieses den Anforderungen der Theorie in sehr befriedigender Weise genügt.

Bosanquet geht von der Bemerkung aus, dass 31 Oktaven mit sehr grosser Annäherung gleich 53 reinen Quinten gesetzt werden können. (Wird $\frac{585}{1000}$ in einen Kettenbruch entwickelt, so findet

---

bey Akademischen Nebenstunden aufgesetzt. Nebst einem darzu gehörigen Kupffer. Jena bey Johann Bielcken 1706.

Beide Schriften sind heutzutage von grosser Seltenheit.

Nach einer Vermuthung von Fétis (Biographie universelle des musiciens) ist Neidhardt auch der erste, der die logarithmische Messung der Intervalle anwandte in einer Schrift: Sectio canonis harmonici, zur völligen Richtigkeit der generum modulandi. Königsberg 1724.

man $\frac{585}{1000} = \frac{117}{200} = 1$: [1, 1, 2, 2, 3, 1, 3] und die Näherungswerthe sind: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{24}{41}$, $\frac{31}{53}$, $\frac{117}{200}$; der Näherungsbruch $\frac{7}{12}$ entspricht der 12 stufigen gleichschwebenden Temperatur, bei welcher 7 Oktaven gleich 12 Quinten sind; der Näherungsbruch $\frac{31}{53}$ liegt dagegen dem Mercator-Bosanquet'schen System zu Grunde, in welchem 31 Oktaven = 53 Quinten sind.) Wird nun die Oktave in 53 gleiche Tonstufen getheilt, so ist jeder Theil gleich 1000 : 53 = 18,868'', also etwas grösser als ein syntonisches Komma. 31 solche Theile sind gleich 31 . 18,868 = 584,91'', also beinahe ganz genau eine reine Quinte. 17 Theile sind gleich 17 . 18,868 = 320,75'', also mit einer Abweichung von 1,25'' gleich einer natürl. grossen Terz.

Für die Töne der tonalen *c*-Gruppe erhält man also in diesem temperirten System folgende Werthe:

	a		*e*		*h*	
	735,85		320,75		905,66	
f		*c*		*g*		*d*
415,09		000		584,91		169,81
	as		*es*		*b*	
	679,25		264,15		849,06	

Vergleicht man diese Werthe mit den genauen Werthen der tonalen *c*-Gruppe, so sieht man, dass eine sehr befriedigende, auch strengen Ansprüchen genügende Uebereinstimmung herrscht. Die Abweichungen der Quinte und der Quarte von der Reinheit sind ganz unhörbar, diejenigen aller übrigen Intervalle nähern sich den Grenzen der Hörbarkeit. Auf dem Bosanquet'schen Harmonium kann man in allen Dur- und Moll-Tonarten mit einem Grade von harmonischer Reinheit spielen, der auch das empfindlichste Ohr zufrieden stellen wird. Für den Mechanismus des Instruments sehe man entweder die Originalarbeit von Bosanquet (An elementary Treatise on Musical Intervals and Temperament by R. H. M. Bosanquet. London, Macmillan 1875) oder die Beilage XIX von Helmholtz' Lehre von den Tonempfindungen 1877. —

46. Das Helmholtz'sche Harmonium. Die sog. enharmonische Temperatur. — Das Instrument, das sich Helmholtz zu seinen Versuchen bauen liess, beruht auf dem schon oben angedeuteten Prinzip der schismatischen Vertauschung, d. h. auf der Gleichsetzung der grossen natürl. Oberterz eines Tones mit dessen 8ter Unterquinte ($\overset{-1}{e} = \overset{0}{fes}$, $\overset{-1}{h} = \overset{0}{ces}$, ...). — Im Lichte des

Oktavenmaasses gestaltet sich das dem Helmholtz'schen Instrumente zu Grunde liegende Prinzip wie folgt: Von $\overset{0}{c}$ aus einerseits um eine grosse Terz aufwärts, andrerseits um 8 Quinten abwärts gehend erhält man das Bild

$\overset{0}{fes}$	$\overset{0}{ces}$	$\overset{0}{ges}$	$\overset{0}{des}$	$\overset{0}{as}$	$\overset{0}{es}$	$\overset{0}{b}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{c}$	$\overset{-1}{e}$
320	905	490	75	660	245	830	415	000	322

wobei jedem Tone sein Abstand von $\overset{0}{c}$, in Tausendtheilen einer Oktave ($^{\mu}$) ausgedrückt, beigegeben ist, unter der üblichen Voraussetzung, dass man alle Töne in die über $\overset{0}{c}$ liegende Oktave versetzt. Die Differenz $\overset{-1}{e} - \overset{0}{fes}$ ist gleich 2^{μ}, oder genauer gleich dem Schisma $1{,}6281^{\mu}$ ($\overset{0}{fes}$ ist nämlich $= - 8 \,.\, 584{,}9625^{\mu} + 5000^{\mu} = 320{,}3^{\mu}$ und $\overset{-1}{e} = 321{,}9281$, also $\overset{-1}{e} - \overset{0}{fes} = 1{,}6281^{\mu}$). $\overset{-1}{e}$ ist um ein Schisma höher als $\overset{0}{fes}$, ebenso $\overset{-1}{h}$ um ein Schisma höher als $\overset{0}{ces}$ u. s. f. Da das Schisma sich schon der Grenze der überhaupt wahrnehmbaren Tonunterschiede nähert, so darf ohne Bedenken $\overset{0}{fes}$ um ein Schisma erhöht und gleich $\overset{-1}{e}$ gesetzt werden. Den Fehler von $1{,}6^{\mu}$ kann man sich auf die 8 Quintenschritte zwischen $\overset{0}{fes}$ und $\overset{0}{c}$ vertheilt denken, indem man jeden der 8 Quintenschritte um $0{,}2^{\mu}$ zu klein macht. In praxi kommen so feine Tonunterschiede überhaupt nicht in Betracht und man darf daher beim praktischen Einstimmen einfach $\overset{0}{fes} = \overset{-1}{e}$, $\overset{0}{ces} = \overset{-1}{h}$, $\overset{0}{ges} = \overset{-1}{fis}$, $\overset{0}{des} = \overset{-1}{cis}$, $\overset{0}{as} = \overset{-1}{gis}$, $\overset{0}{es} = \overset{-1}{dis}$, $\overset{0}{b} = \overset{-1}{ais}$, $\overset{0}{f} = \overset{-1}{eis}$ setzen. — Das Helmholtz'sche Harmonium hat zwei normalgebaute Manuale; der harmonische Zusammenhang der einzelnen Töne und ihre Vertheilung auf die beiden Manuale geht aus der folgenden Uebersicht hervor:

Unteres Manual				Oberes Manual			
$\overset{-2}{gis}$	$\overset{-2}{dis}$	$\overset{-2}{ais}$	$\overset{-2}{eis}$	$\overset{-2}{his}$	$\overset{-2}{fisis}$	$\overset{-2}{cisis}$	$\overset{-2}{gisis}$
$\overset{-1}{e}$	$\overset{-1}{h}$	$\overset{-1}{fis}$	$\overset{-1}{cis}$	$\overset{-1}{gis}$	$\overset{-1}{dis}$	$\overset{-1}{ais}$	$\overset{-1}{eis}$
$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{a}$	$\overset{0}{e}$	$\overset{0}{h}$	$\overset{0}{fis}$	$\overset{0}{cis}$

Jedes der beiden Manuale hat innerhalb jeder Oktave 12 Tonstufen, die in normaler Weise auf 7 weisse Untertasten und 5 schwarze Obertasten vertheilt werden, genau wie bei der gewöhnlichen Klaviatur. Beim Einstimmen nimmt man $\overset{0}{a}$ zum Ausgangspunkt und stimmt von da aus nach reinen natürlichen Intervallen, wie es der aus dem obenstehenden Schema ersichtliche harmonische Zusammenhang der Töne erheischt. Dieses Stimmen ist erfahrungsgemäss viel leichter als das Stimmen nach temperirten Intervallen.

Unter Vernachlässigung des schismatischen Unterschiedes von $1{,}6''$ können nun die Töne der beiden oberen Quintenreihen umgedeutet werden, indem man die Quintenkette

$$\overset{-1}{e}\quad \overset{-1}{h}\quad \overset{-1}{fis}\quad \overset{-1}{cis}\quad \overset{-1}{gis}\quad \overset{-1}{dis}\quad \overset{-1}{ais}\quad \overset{-1}{eis}$$

unter schismatischer Vertauschung ($\overset{-1}{e} = \overset{0}{fes}$, $\overset{-1}{h} = \overset{0}{ces}$, ...) umdeutet als

$$\overset{0}{fes}\quad \overset{0}{ces}\quad \overset{0}{ges}\quad \overset{0}{des}\quad \overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}$$

Ebenso lässt sich die oberste Quintenreihe

$$\overset{-2}{gis}\quad \overset{-2}{dis}\quad \overset{-2}{ais}\quad \overset{-2}{eis}\quad \overset{-2}{his}\quad \overset{-2}{fisis}\quad \overset{-2}{cisis}\quad \overset{-2}{gisis}$$

unter Vernachlässigung des Schismas umdeuten als

$$\overset{-1}{as}\quad \overset{-1}{es}\quad \overset{-1}{b}\quad \overset{-1}{f}\quad \overset{-1}{c}\quad \overset{-1}{g}\quad \overset{-1}{d}\quad \overset{-1}{a}$$

Unter Benützung dieser Umdeutung gibt also das Helmholtz'sche Instrument das folgende Stück des harmonischen Tongewebes*):

Exp.				
−2		*gis dis ais eis*	*his fisis cisis gisis*	
−1	*as es b f c g d a*	*e h fis cis*	*gis dis ais eis*	*his*
	fes ces ges des as es b f	*c g d a*	*e h fis cis*	

Auf dem unteren Manual allein findet man die Tonleitern von $\overset{0}{g}$-Dur, $\overset{-1}{h}$-Dur und $\overset{-1}{h}$-Moll harmonisch rein vor; auf dem oberen Manual

*) Der Raumersparniss wegen wurden die Exponenten nicht jedem Buchstaben einzeln beigefügt, sondern nur an der Seite links für die betreffende Reihe angedeutet.

die Tonleitern von $\overset{0}{h}$-Dur, $\overset{-1}{dis}$-Dur und $\overset{-1}{dis}$-Moll. Unter Benützung beider Manuale hat man überhaupt die Dur-Tonleitern von

$$\overset{0}{ces},\ \overset{0}{ges},\ \overset{0}{des},\ \overset{0}{as},\ \overset{0}{es},\ \overset{0}{b},\ \overset{0}{f},\ \overset{0}{c},\ \overset{0}{g},\ \overset{0}{d},\ \overset{0}{a},\ \overset{0}{e},\ \overset{0}{h}$$

harmonisch rein. In Bezug auf Moll-Tonarten ist dagegen das Helmholtz'sche Instrument nicht so reichhaltig. In jeder Form, d. h. aufsteigend und absteigend und harmonisch findet man, von pythag. Leitern abgesehen, die Moll-Tonleitern von $\overset{-1}{h}$, $\overset{-1}{fis}$, $\overset{-1}{cis}$, $\overset{-1}{gis}$, $\overset{-1}{dis}$; harmonisch ausserdem die Moll-Tonleitern von $\overset{-1}{a}$, $\overset{-1}{e}$ und $\overset{-1}{ais}$.

Will man sich im Dominantdreiklang mit einer pythagoräischen grossen Terz an Stelle einer natürlichen begnügen, so findet man endlich ausserdem die Moll-Tonleitern von

$$\overset{-1}{d},\ \overset{-1}{g},\ \overset{-1}{c},\ \overset{-1}{f},\ \overset{-1}{b},\ \overset{-1}{es}$$

harmonisch rein. — Das Helmholtz'sche Instrument gestattet zwar keine so grosse Bewegungsfreiheit wie andere vollkommenere Instrumente; dass es jedoch als Werkzeug eines genialen Forschers von grossem Werthe sein kann, hat Helmholtz zur Genüge dargethan. Der Kunstgriff, auf dem es beruht (die Gleichsetzung von $\overset{-1}{e}$ und $\overset{0}{fes}$), war sehr wahrscheinlich schon den arabisch-persischen Musikern vor der Eroberung Persiens durch die Araber und dem Sturz der Sassaniden (226—636 n. Chr.) durch Omar bekannt (s. Helmholtz, Tonempfindungen, 4. Aufl. pag. 511). —

Das Ausgleichungsverfahren, welches darin besteht, die 8te Unterquinte eines Tones, durch Erhöhung um ein Schisma, mit der grossen Oberterz zu identifiziren und den schismatischen Fehler auf die 8 Quinten gleichmässig zu vertheilen, nennt man die enharmonische Temperatur. Die enharmonisch temperirte Quinte ist um $\frac{1}{8}$ des Schismas zu klein, also gleich 584,76″ an Stelle von 584,96″. Vom rein akustischen Standpunkte aus ist die enharmonische Temperatur sozusagen vollkommen. Sie gestattet die Ersetzung des (zweidimensionalen) harmonischen Tonsystems durch eine (eindimensionale) Kette zusammenhängender enharmonisch temperirter Quinten, welche die Vorzüge des pythagoräischen mit denjenigen des harmonisch-reinen Systems in sich vereinigt, an Einfachheit jedoch hinter der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur in demselben Maasse zurücksteht, wie das pythagoräische System.

47. Das Enharmonium von Tanaka. — Eine ziemlich weite Verbreitung hat das Transponir-Harmonium oder sog. Enharmonium von Tanaka gefunden, dessen Eigenart, wie der Name

sagt, auf einer sinnreichen Transponir-Vorrichtung beruht*). Die Klaviatur hat 20 Tasten innerhalb einer Oktave, schliesst sich aber trotz dieser grösseren Zahl doch möglichst eng an die althergebrachte Form an, so dass relativ geringe Uebung genügt, um sich auf dem Instrumente zurecht zu finden. Auch hier hat man zunächst 7 weisse Untertasten in der Oktave, welche die 7 Stufen einer natürlich-harmonischen Dur-Tonleiter geben, z. B.

$$\overset{0}{c},\ \overset{0}{d},\ \overset{-1}{e},\ \overset{0}{f},\ \overset{0}{g},\ \overset{-1}{a},\ \overset{-1}{h}.$$

Ausserdem gibt es 6 schwarze Obertasten, die genau dieselbe Stellung einnehmen, wie die Obertasten beim Klavier. Einige dieser Obertasten theilen sich jedoch in mehrere Theile und haben zum Theil ausserdem als äusserstes Glied eine weisse Unterabtheilung. Die Klaviatur wird am besten durch die beigegebene schematische Darstellung veranschaulicht (s. pag. 125).

Die kleinen weissen Obertasten geben $\overset{-1}{d}$, $\overset{0}{e}$, $\overset{-1}{g}$, $\overset{0}{a}$; die vorderen schwarzen Obertasten $\overset{-1}{cis}$ und $\overset{-1}{fis}$. Die hintersten schwarzen Obertasten geben $\overset{-2}{cis}$, $\overset{-2}{dis}$, $\overset{-2}{eis}$, $\overset{-2}{fis}$, $\overset{-2}{gis}$, $\overset{-2}{ais}$. Endlich gibt die vorderste kleine schwarze Obertaste zwischen $\overset{-1}{a}$ und $\overset{-1}{h}$ das $\overset{0}{b}$.

Die hintersten schwarzen Obertasten können je 2 verschiedene Töne geben je nach der Stellung eines Hebels, der sich vorne am Instrument befindet und mit dem Knie bewegt werden kann. Durch einen Druck an diesem Hebel bewirkt man die Ausschaltung der Töne $\overset{-2}{cis}$, $\overset{-2}{dis}$, $\overset{-2}{eis}$, $\overset{-2}{fis}$, $\overset{-2}{gis}$, $\overset{-2}{ais}$ und die Einschaltung der entsprechenden Töne $\overset{+1}{des}$, $\overset{+1}{es}$, $\overset{+1}{f}$, $\overset{+1}{ges}$, $\overset{+1}{as}$, $\overset{+1}{b}$, welche um 34^{a} höher sind. Der harmonische Zusammenhang aller genannten Töne ergibt sich aus folgender Uebersicht:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & \overset{-2}{fis} & & \overset{-2}{cis} & & \overset{-2}{gis} & & \overset{-2}{dis} & & \overset{-2}{ais} & & \overset{-2}{eis} & \\
 & \overset{-1}{g} & & \overset{-1}{d} & & \overset{-1}{a} & & \overset{-1}{e} & & \overset{-1}{h} & & \overset{-1}{fis} & & \overset{-1}{cis} & \\
 & & \overset{0}{b} & & \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} & & \overset{0}{d} & & \overset{0}{a} & & \overset{0}{e} \\
\overset{+1}{ges} & & \overset{+1}{des} & & \overset{+1}{as} & & \overset{+1}{es} & & \overset{+1}{b} & & \overset{+1}{f} & & & &
\end{array}$$

*) Siehe die schon mehrmals zitirte Abhandlung von Tanaka in der Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 1890.

Bei normaler Stellung des Kniehebels sind die 3 oberen Horizontalreihen auf der Klaviatur vertreten. Durch einen Druck am Kniehebel wird die oberste Reihe (die 2. Oberterz-Reihe) ausgeschaltet und es tritt dafür die unterste Reihe (die erste Unterterzreihe) ein. — Wie das Instrument einzustimmen ist, ergibt sich aus dem harmonischen Zusammenhang der Töne von selbst. Aus dem Schema der Klaviatur ergibt sich auch, dass die Spielweise nicht erheblich von derjenigen eines gewöhnlichen Harmoniums abweicht. Die Kreuz-Töne und die Be-Töne stehen an derselben Stelle wie bei der normalen Klaviatur. Die um ein Komma alterirten Töne zu den Tönen $\overset{0}{d}$, $\overset{-1}{e}$, $\overset{0}{g}$, $\overset{-1}{a}$ der natürlich-harmonischen Tonleiter findet man in den kleinen weissen Obertasten und zwar immer in den zunächst oben nach links liegenden Tasten.

Es ist nun weiter an dem Instrument eine Vorrichtung angebracht, welche die Verschiebung der ganzen Klaviatur nach links oder nach rechts und ihre Einstellung auf einen anderen Grundton als $\overset{0}{c}$ gestattet. Es befindet sich nämlich unmittelbar über der Klaviatur ein Hebel, welcher in 12 verschiedenen Stellungen befestigt werden kann. Es war bisher stillschweigend angenommen, der Hebel liege in der Mitte und sei auf *C* gestellt. Bei dieser sog. *C*-Lage der Klaviatur geben die 7 weissen Untertasten die Töne der reinen natürl.-harmonischen $\overset{0}{c}$-dur Tonleiter. Durch Veränderung der Stellung des genannten Hebels werden nun sämmtliche Töne der Klaviatur auf einen andern Grundton transponirt, in der Weise, dass die von den einzelnen Tasten gegebenen Intervalle genau dieselben bleiben und sich nur die absolute Tonhöhe der einzelnen Töne der neuen Stellung des Hebels und der neuen Tonika entsprechend verändert. Steht der Hebel z. B. auf *D*, in sog. *D*-Stellung, so geben die weissen Untertasten die $\overset{0}{d}$-Dur-Tonleiter, die andern Tasten die entsprechenden Zwischenstufen mit Rücksicht auf die neue Tonika $\overset{0}{d}$. Die 12 möglichen Lagen des Hebels entsprechen den 12 folgenden durch Quintenverwandtschaft mit einander verketteten Tönen:

$$\overset{0}{des} \quad \overset{0}{as} \quad \overset{0}{es} \quad \overset{0}{b} \quad \overset{0}{f} \quad \overset{0}{c} \quad \overset{0}{g} \quad \overset{0}{d} \quad \overset{0}{a} \quad \overset{0}{e} \quad \overset{0}{h} \quad \overset{0}{fis}$$

Jeder dieser Töne kann Grundton der Klaviatur werden, wenn der Hebel in der diesem Ton entsprechenden Stellung ist. Geht ein Stück z. B. aus *e*-dur, so wird man den Hebel in die *E*-Lage bringen

und kann dann die ganze natürl.-harmonische *e*-dur Tonleiter auf den weissen Untertasten spielen. Alle übrigen Tasten dienen dazu, um in die nächst verwandten Tonarten zu moduliren. Die Anzahl dieser Tasten wird genügend sein, wenn die Modulationen nicht nach zu sehr entlegenen Tonarten führen. Durch diese Transponir-Vorrichtung ist die Spielweise des Instrumentes ganz bedeutend vereinfacht. Bei Stücken, die aus irgendwelcher Tonart gehen, wird bei passender Hebelstellung das Spielen auf den weissen Untertasten die Regel sein, wenn die Grundtonart nicht allzu oft verlassen wird. —

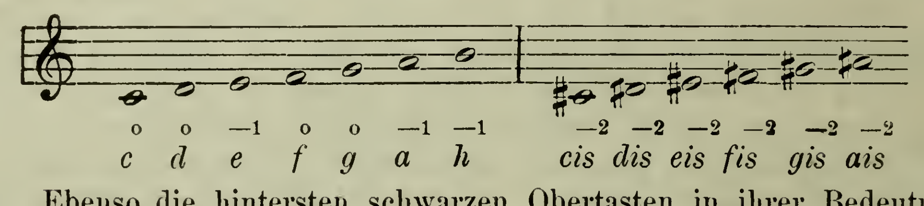
Einer Taste an und für sich kommt zunächst nur eine Bedeutung als Intervall mit Rücksicht auf eine zu wählende Tonika zu. Eine bestimmte absolute Tonhöhe kommt ihr erst nach Wahl einer bestimmten Tonika und bei entsprechender Stellung des Hebels zu. In diesem Sinne soll auch nach Tanaka's Vorschlag die Notirung für sein Instrument erfolgen. Die Note *c* soll nicht einen Ton von bestimmter absoluter Höhe bedeuten, sondern die Tonika der betreffenden Durtonart, aus welcher das zu spielende Stück geht. Ebenso bedeutet *d* stets die Sekunde, *e* die gr. Terz, *f* die Quarte u. s. f. der betreffenden Tonika.

Es ist dies im Grunde dasselbe Prinzip, nach welchem noch jetzt die Notirung für Hörner und andere Blechblasinstrumente geschieht. Bei Durtonarten ist es stets die Note *c*, bei Molltonarten die Note *a*, welche die Bedeutung der Tonika hat. Bei einem Horn in *b*-Stimmung wird z. B. die Note *c* als *b* erklingen, die Note *a* als *g* u. s. f. Die Notenschrift hat für den Hornisten die Bedeutung einer Intervallenschrift, ähnlich wie von den Sängern die Silben *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si* auf jede Dur-Skala angewandt wird, welches auch die absolute Höhe des Ausgangspunktes sei. — Durch diese Notirungsweise erreicht man den Vortheil, alle Stücke in *c*-dur resp. in *a*-moll notiren zu können. Eine kurze Bemerkung zu Beginn des Stückes gibt die absolute Tonart an (z. B. „*E*-Lage der Klaviatur“ u. a.).

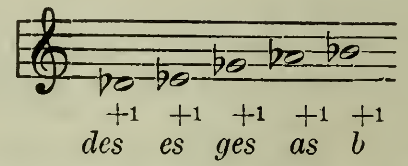
Da nun die Noten an und für sich beim Tanaka'schen Instrument nicht Töne von bestimmter absoluter Höhe, sondern bestimmte Tasten bedeuten, und da die Zahl der Tasten grösser ist als bei der üblichen Klaviatur, so werden auch einige neue Notenbezeichnungen einzuführen sein. Tanaka erreicht seinen Zweck durch Einführung zweier Zeichen: des Akuts /, und des Gravis \, welche vor die betreffenden Noten gesetzt werden. Der Akut bedeutet eine Erhöhung, der Gravis eine Erniedrigung um ein syntonisches Komma. Diese ein-

fachen, schon von Bosanquet angewandten Zeichen reichen, neben den allgemein üblichen ♯ und ♭, für alle Fälle völlig aus. Eine kleine Null o bedeutet Aufhebung einer vorher angezeigten Kommaerhöhung oder Kommaerniedrigung, ebenso wie das gewöhnliche Auflösungszeichen ♮ eine Erhöhung um ein ♯ oder eine Vertiefung um ein ♭ rückgängig macht. — Die Bezeichnung der Tasten durch Notenschrift gestaltet sich wie folgt:

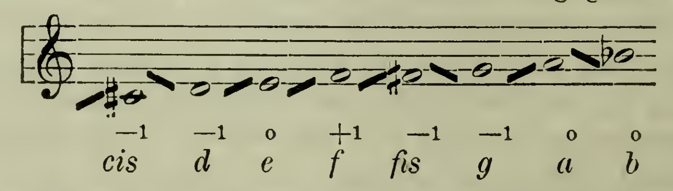
Die weissen Untertasten und die 6 hintersten schwarzen Obertasten in ihrer Bedeutung als Kreuz-Töne werden in gewöhnlicher Weise notirt:



Ebenso die hintersten schwarzen Obertasten in ihrer Bedeutung als *Be*-Töne, mit Ausnahme der kleinen Taste $\overset{+1}{f}$ zwischen den Volltasten $\overset{-1}{e}$ und $\overset{o}{f}$:

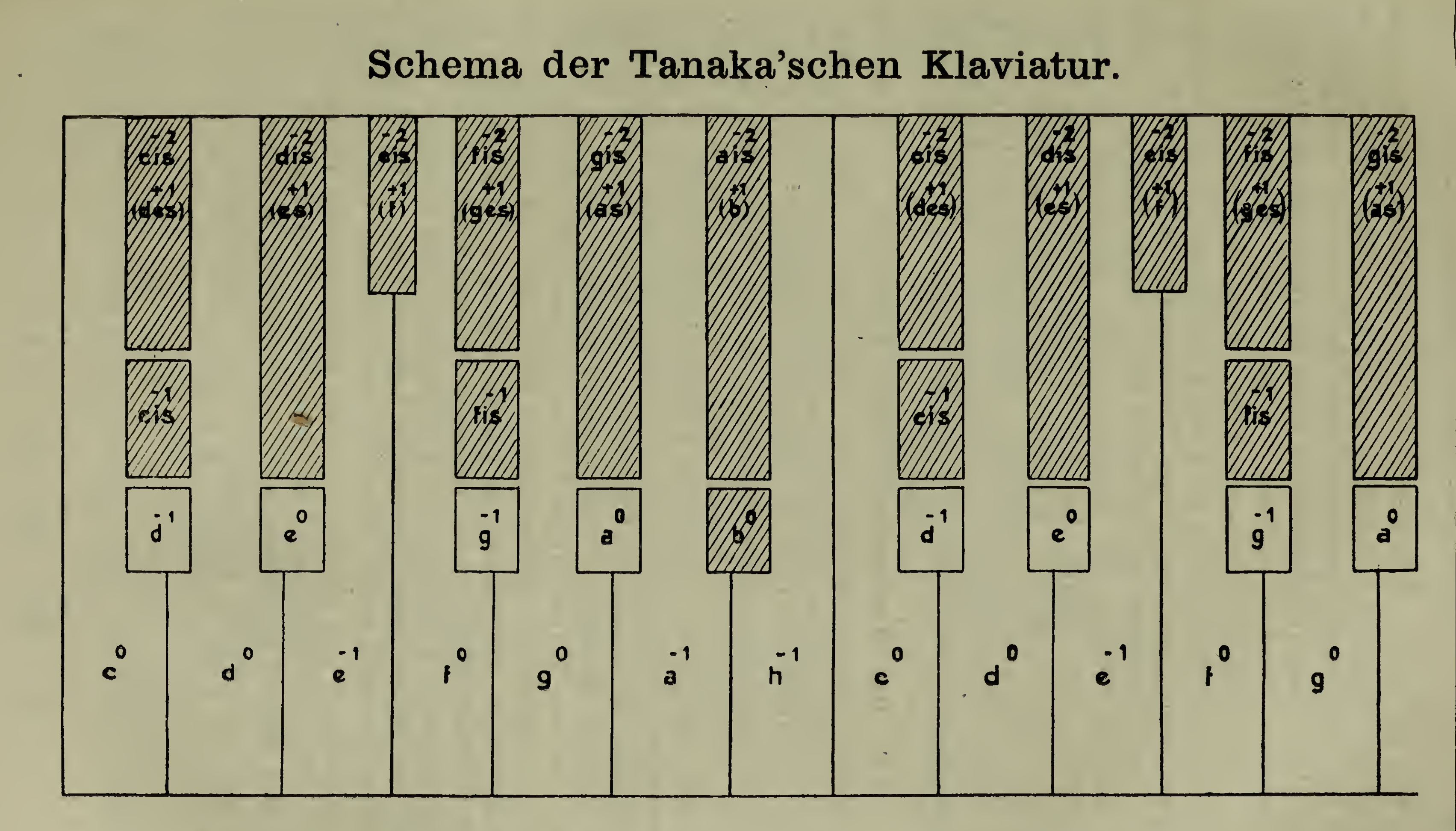


Die Bezeichnung der übrigen 8 Tasten lässt sich mit Hülfe der Zeichen Akut und Gravis leicht aus den eben gegebenen ableiten:



Diese Bezeichnungen reichen für alle Fälle vollkommen aus. — Wenn ein Stück auf dem Tanaka'schen Instrument vorgetragen werden soll, so muss es vorerst in *c*-dur resp. *a*-moll notirt werden. Sodann muss — was übrigens für jedes derartige Instrument unerlässlich ist — eine strenge harmonische Analyse des Stückes vorgenommen werden, auf Grund deren die Zeichen Akut und Gravis nebst zugehörigen Auflösungszeichen an passender Stelle angebracht werden. Beim Spielen selbst braucht zwischen Akut und Gravis nicht unterschieden zu werden, sondern es genügt, nach der nächtsliegenden kleinen Extrataste zu greifen, sobald eines dieser beiden Zeichen erscheint.

Schema der Tanaka'schen Klaviatur.



— Der Gebrauch des Kniehebels, der die Umstimmung der hintersten schwarzen Obertasten (Erhöhung um $34''$) bewirkt, wird durch ein *B* mit angehängter punktirter Linie *B* . . . . angezeigt, wobei die Länge der punktirten Linie die Dauer des auf den Hebel ausgeübten Druckes andeutet. — Der Beweis für die Spielbarkeit des Tanaka'schen Instruments wurde durch den Pianisten G. A. Papendick erbracht, der, wie Tanaka erzählt, nach verhältnissmässig kurzer Uebung Bach'sche Fugen, Mendelssohn'sche Orgelsonaten u. a. auf dem Instrument mit Sicherheit zum Vortrag brachte. — Einer bestimmten Stellung des Transponirhebels entsprechen 26 Zungen innerhalb einer Oktave; bei Verschiebung dieses Hebels um eine Quinte müssen offenbar 4 Zungen ausgeschaltet und dafür 4 neue eingeschaltet werden. Im Ganzen sollten also $26 + 11 \cdot 4$, d. h. 70 Zungen für jede Oktave zur Verfügung stehen. Durch schismatische Verwechslung hat Tanaka die Zahl der Zungen auf 39, bei neueren Instrumenten auf 55 herabgesetzt. —

48. Das Harmonium Steiner-Austerlitz. — In sehr ausgedehntem Maasse und mit einer Objektivität, die wohl als Muster für alle Forschungen innerhalb dieses Gebietes zu betrachten ist, nahm sich Joachim Steiner in Mährisch-Weisskirchen (z. Z. in Wien) des Problems der reinen Stimmung an. Er stellte sich die Aufgabe, Instrumente zu bauen, welche es in der denkbar einfachsten Weise ermöglichen, die beiden wichtigsten Stimmungsprinzipien, das harmonische, auf den reinen Dur-Dreiklang gegründete, und das pythagoräische, mit einander zu vergleichen. Zu diesem Zwecke konstruirte er mehrere Instrumente verschiedenen Systems, von denen wir hier nur das sog. Harmonium Steiner-Austerlitz erwähnen. Vom rein praktischen, spieltechnischen Standpunkt aus fällt bei allen Steiner'schen Instrumenten der Vortheil schwer in die Wagschale, dass die Klaviatur sich von der allgemein gebräuchlichen durchaus nicht unterscheidet, so dass jeder Klavierspieler ohne besondere Uebung sich der Steiner'schen Instrumente bedienen kann. Das Harmonium Steiner-Austerlitz besitzt über der normalgebauten Klaviatur der sog. „Spieltasten“ ein zweites, ebenfalls normalgebautes kleines Manual von 13 sog. „Stimmtasten“ in chromatischer Anordnung. Ist auf dem oberen Manual die Stimmtaste *c* niedergedrückt, so geben die Spieltasten der unteren Klaviatur die sog. „harmonische *Be*-Stimmung von *c*“, d. h. die folgenden 12 Töne

$$\begin{array}{cccccccc} & \overset{-1}{a} & & \overset{-1}{e} & & \overset{-1}{h} & & \overset{-1}{fis} \\ & \overset{0}{f} & & \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} & & \overset{0}{d} \\ \overset{+1}{des} & & \overset{+1}{as} & & \overset{+1}{es} & & \overset{+1}{b} & \end{array}$$

wobei natürlich die Töne genau wie bei der gewöhnlichen Klaviatur nach steigender Höhe chromatisch angeordnet sind. Wird statt der Stimmtaste *c* auf dem oberen Manual die Stimmtaste *g* niedergedrückt, so geben die Spieltasten die sog. „harmonische *Be*-Stimmung von *g*", d. h. die Töne

$$\overset{-1}{e}\qquad \overset{-1}{h}\qquad \overset{-1}{fis}\qquad \overset{-1}{cis}$$
$$\overset{0}{c}\qquad \overset{0}{g}\qquad \overset{0}{d}\qquad \overset{0}{a}$$
$$\overset{+1}{as}\qquad \overset{+1}{es}\qquad \overset{+1}{b}\qquad \overset{+1}{f}$$

indem die Töne $\overset{+1}{des}$, $\overset{0}{f}$ und $\overset{-1}{a}$ der vorigen Stimmung resp. in $\overset{-1}{cis}$, $\overset{+1}{f}$ und $\overset{0}{a}$ umgewandelt werden.

In dieser Weise gehört zu jeder Stimmtaste des oberen Manuals eine besondere Stimmung der Spieltasten. Sehen wir vorerst von der mit *ges* bezeichneten äussersten Stimmtaste links ab, so entspricht jeder der 12 übrigen Stimmtasten eine harmonische *Be*-Stimmung eines bestimmten „Fundamentes" und die 12 Fundamente stehen unter sich im Quintenanschluss

$$\overset{0}{des}\quad \overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}\quad \overset{0}{g}\quad \overset{0}{d}\quad \overset{0}{a}\quad \overset{0}{e}\quad \overset{0}{h}\quad \overset{0}{fis}$$

Unter „Fundament" der „harmonischen *Be*-Stimmung von *c*" ist hierbei das $\overset{0}{c}$ verstanden, ebenso unter „Fundament" der harmonischen *Be*-Stimmung von *g* das $\overset{0}{g}$ u. s. f. — Was die äusserste mit *ges* bezeichnete Stimmtaste links anbetrifft (die sog. „Moll-Taste"), so bewirkt das Niederdrücken derselben, dass die Spieltasten die folgenden 12 durch Quintenverwandtschaft mit einander zusammenhängende Töne geben:

$$\overset{0}{as}\quad \overset{0}{es}\quad \overset{0}{b}\quad \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}\quad \overset{0}{g}\quad \overset{0}{d}\quad \overset{0}{a}\quad \overset{0}{e}\quad \overset{0}{h}\quad \overset{0}{fis}\quad \overset{0}{cis}$$

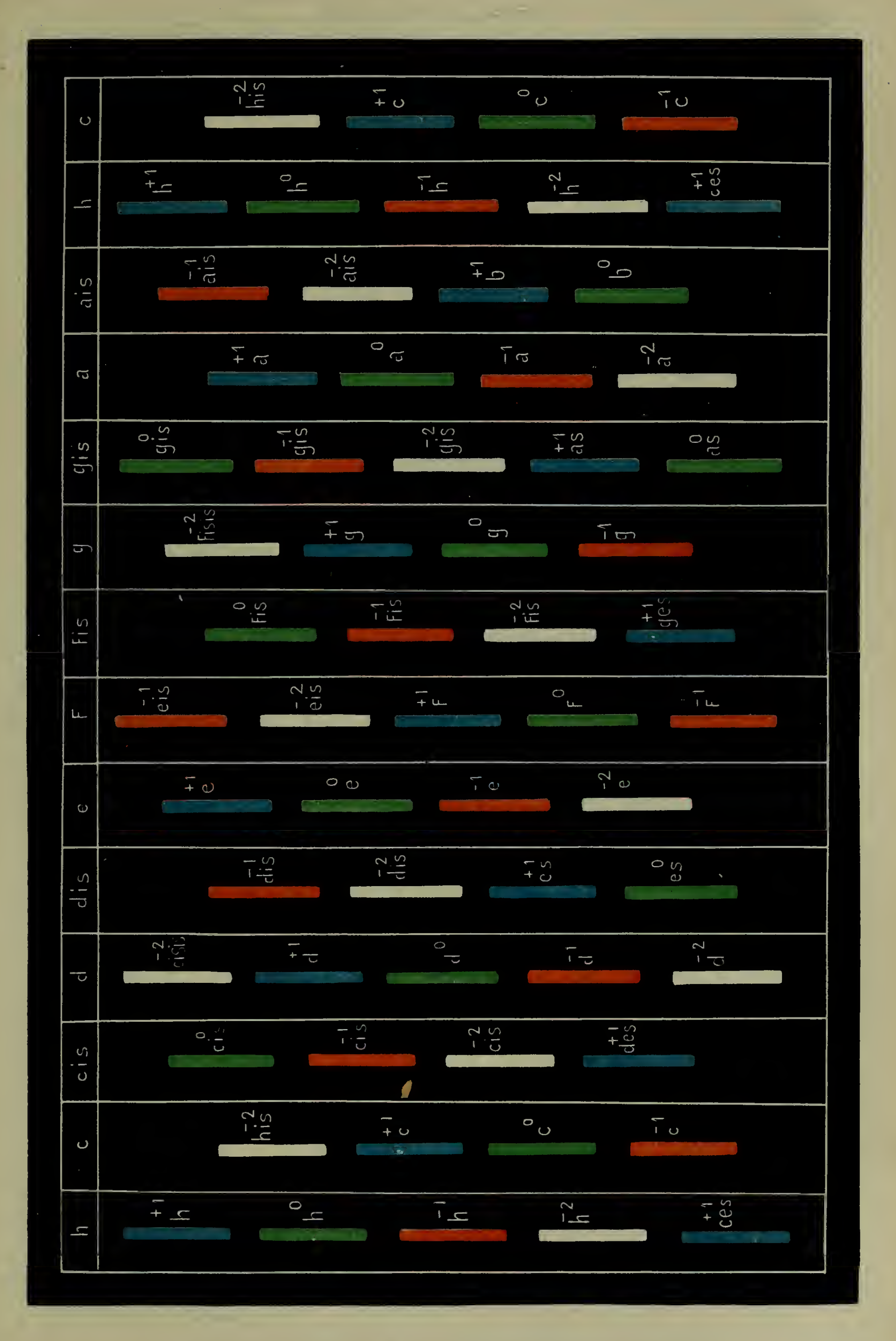
Es ist dies die von Steiner sogenannte „melodische *Be*-Stimmung von *g*". Diese Stimmung ermöglicht es, pythagoräisch abgestimmte Tonleitern und Akkorde zu Gehör zu bringen und Versuche über „melodische" Intonation, d. h. über Intonation in pythagoräischer Stimmung anzustellen.

Das Ziehen eines Registerzuges (vom Erbauer des Harmoniums, Kotykiewicz, „prolongement automatique" genannt) bewirkt, dass eine niedergedrückte Stimmtaste so lange unten bleibt, bis sie durch Drücken auf eine neue Stimmtaste ausgelöst wird. — Für den Mechanismus des Instruments sowie für die andern „Intonations-Instrumente" Joachim Steiner's sei auf dessen geistvolles Buch: „Grundzüge einer neuen Musik-Theorie" (Wien 1891, Alfred Hölder) hingewiesen. —

49. Das Harmonium von Eitz. — Es würde zu weit führen, alle Instrumente zur Darstellung der reinen Stimmung in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, welche in den letzten Jahrzehnten gebaut wurden. Wir erwähnen nur die enharmonische Orgel von Perronet Thompson (Principles and Practice of Just Intonation, illustrated on the Enharmonic Organ. 7th Edition, London 1863), die Orgel von H. W. Poole (American Journal of Science and Arts, Vol XLIV, July 1867), und das Harmonium von G. Appun (siehe G. Engel: „Das mathematische Harmonium", Berlin 1881). Dagegen können wir es uns nicht versagen, ein bisher noch wenig gekanntes Harmonium von Eitz kurz zu besprechen, das ein grösseres Stück des an sich unbegrenzten harmonischen Tongewebes zur Darstellung bringt als alle bisher genannten Instrumente. Für jede Oktave stehen bei dem Eitz'schen Instrumente 104 Zungen und 52 Tasten zur Verfügung. Vom rein spieltechnischen Standpunkt aus betrachtet, ist das Instrument wegen der zwar sehr sinnreich eingerichteten, aber doch sehr komplizirten Klaviatur schwer zu behandeln, als Versuchs- und Demonstrationsinstrument zu wissenschaftlichen Zwecken dagegen dürfte es allen Anforderungen genügen, welche man an ein solches Instrument stellen darf. Das Eitz'sche Harmonium wurde von der Pianofortefabrik Schiedmayer in Stuttgart im Auftrag der preussischen Regierung gebaut und im Institut für theoretische Physik der Universität Berlin aufgestellt. —

Die diesem Abschnitt beigefügte Uebersicht des harmonischen Tongewebes lässt die auf dem Eitz'schen Instrument vorhandenen Töne durch ihre Umgrenzung erkennen. Aus 8 über einander liegenden Horizontalreihen des harmonischen Tonsystems werden je 13 Töne herausgegriffen. Es seien hier nur die äussersten Töne jeder Quintenreihe angegeben und die dazwischen liegenden Quinten durch Punkte angedeutet

$\overset{-4}{gis}$	. . . .	$\overset{-4}{fisisis}$	I	grün
$\overset{-3}{h}$	. . . .	$\overset{-3}{aisis}$	II	blau
$\overset{-2}{d}$	. . . .	$\overset{-2}{cisis}$	III	weiss
$\overset{-1}{f}$	. . . .	$\overset{-1}{eis}$	IV	roth
$\overset{0}{as}$	. . . . $\overset{0}{c}$	$\overset{0}{gis}$	V	grün
$\overset{+1}{ces}$	. . . .	$\overset{+1}{h}$	VI	blau
$\overset{+2}{eses}$	. . . .	$\overset{+2}{d}$	VII	weiss
$\overset{+3}{geses}$	. . . .	$\overset{+3}{f}$	VIII	roth



Klaviatur des Eitz'schen Harmoniums.

Innerhalb einer Oktave hat man also 13 . 8 d. h. 104 verschiedene Töne. Zur Erzeugung dieser 104 Töne dienen 52 Tasten, indem jede Taste auf 2 verschiedene Töne anspricht, je nach dem Register, das gezogen ist. Von diesen 52 Tasten innerhalb einer Oktave sind 13 grün, 13 blau, 13 weiss und 13 roth. Die 13 grünen Tasten geben entweder die Töne der Reihe I oder diejenigen der Reihe V, je nachdem der Registerzug I oder der Registerzug V gezogen ist. Jede grüne Taste gibt zwei correspondirende Töne der Quintenreihen I und V, z. B. $\overset{-4}{gis}$ oder $\overset{0}{as}$, $\overset{-4}{dis}$ oder $\overset{0}{es}$, u. s. f. Ganz ebenso geben die blauen Tasten entweder die Töne der Reihe II oder der Reihe VI, die weissen diejenigen der Reihe III oder der Reihe VII und die rothen entweder die Töne der Reihe IV oder der Reihe VIII. Man hat 8 Registerzüge, von denen jeder einer der 8 Quintenreihen entspricht. Es werden beim Spielen immer 4 neben einander liegende Register gezogen und dadurch 4 benachbarte Quintenreihen eingeschaltet.

Nach ihrer Tonhöhe geordnet, sind die Töne des Eitz'schen Instrumentes folgende (s. umstehend).

Was die Anordnung der Tasten auf dem Manual anbetrifft, so ist dieselbe aus dem beigegebenen Schema zu ersehen, in welchem die Benennung der Töne dem Fall entspricht, wo die mittleren 4 Register III, IV, V, VI gezogen und demnach die 4 mittleren Quintenreihen eingeschaltet sind.

Die Anordnung der Tasten entspricht der bei den gewöhnlichen Klavieren und Harmoniums üblichen insofern, als sie sich nach der Tonhöhe richtet, von links nach rechts steigend, nur mit dem Unterschiede, dass unmittelbar benachbarte und durch ein Komma sich unterscheidende Töne hinter einander liegen, um die Breite einer Oktave nicht zu gross werden zu lassen.

Der Umfang des Instrumentes beträgt $4\frac{1}{2}$ Oktaven, vom Contra-*F* bis zum dreigestrichenen $\overline{\overline{\overline{c}}}$. In jeder Oktave kehren natürlich die entsprechenden 52 Tasten und 104 Töne in derselben Anordnung wieder. — Ausser dem syntonischen Komma findet man auf dem Instrumente das pythagoräische Komma (z. B. $\overset{0}{as}\ \overset{0}{gis}$, $\overset{-1}{f}\ \overset{-1}{eis}$, $\overset{+1}{ces}\ \overset{+1}{h}$, ...) und das Schisma (z. B. $\overset{0}{as}\ \overset{-1}{gis}$, $\overset{+1}{ges}\ \overset{0}{fis}$, $\overset{0}{b}\ \overset{-1}{ais}$, . . .). Auch die in unserem Musiksystem nicht vorkommende sog. natürliche Septime lässt sich wenigstens annähernd wiedergeben; es sind nämlich z. B. die Intervalle $\overset{0}{g}\ \overset{-1}{f}$, $\overset{0}{d}\ \overset{-1}{c}$, ... gleich $812''$, nur um $5''$ grösser

c^{0}	000	*eses*$^{+3}$	204	*f*^{0}	415	*asas*$^{+3}$	619	*ais*$^{-2}$	814
c^{+1}	018	*d*$^{+2}$	206	*eis*$^{-1}$	417	*g*$^{+2}$	621	*b*^{0}	830
deses^{+3}	034	*dis*$^{-3}$	211	*f*$^{+1}$	433	*gis*$^{-3}$	626	*ais*$^{-1}$	832
c^{+2}	036	*dis*$^{-2}$	229	*geses*$^{+3}$	449	*fisisis*$^{-4}$	628	*b*$^{+1}$	848
cis^{-3}	041	*es*^{0}	245	*f*$^{+2}$	451	*gis*$^{-2}$	644	*b*$^{+2}$	866
hisis^{-4}	043	*dis*$^{-1}$	247	*fis*$^{-3}$	456	*as*^{0}	660	*h*$^{-3}$	871
cis^{-2}	059	*es*$^{+1}$	263	*eisis*$^{-4}$	458	*gis*$^{-1}$	662	*aisis*$^{-4}$	873
cis^{-1}	077	*es*$^{+2}$	281	*f*$^{+3}$	469	*as*$^{+1}$	678	*b*$^{+3}$	884
des^{+1}	093	*disis*$^{-4}$	288	*fis*$^{-2}$	474	*gis*^{0}	680	*h*$^{-2}$	889
cis^{0}	095	*es*$^{+3}$	299	*fis*$^{-1}$	492	*as*$^{+2}$	696	*aisis*$^{-3}$	891
des^{+2}	111	*e*$^{-2}$	304	*ges*$^{+1}$	508	*gisis*$^{-4}$	703	*h*$^{-1}$	907
cisis^{-4}	118	*disis*$^{-3}$	306	*fis*^{0}	510	*as*$^{+3}$	714	*ces*$^{+1}$	923
des^{+3}	129	*e*$^{-1}$	322	*ges*$^{+2}$	526	*a*$^{-2}$	719	*h*^{0}	925
d^{-2}	134	*e*^{0}	340	*fisis*$^{-4}$	533	*gisis*$^{-3}$	721	*ces*$^{+2}$	941
cisis^{-3}	136	*fes*$^{+2}$	356	*ges*$^{+3}$	544	*a*$^{-1}$	737	*h*$^{+1}$	943
d^{-1}	152	*e*$^{+1}$	358	*fisis*$^{-3}$	551	*a*^{0}	755	*his*$^{-4}$	948
cisis^{-2}	154	*eis*$^{-4}$	363	*g*$^{-1}$	567	*bb*$^{+2}$	771	*ces*$^{+3}$	959
d^{0}	170	*fes*$^{+3}$	374	*fisis*$^{-2}$	569	*a*$^{+1}$	773	*his*$^{-3}$	966
eses^{+2}	186	*eis*$^{-3}$	381	*g*^{0}	585	*ais*$^{-4}$	778	*c*$^{-1}$	982
d^{+1}	188	*f*$^{-1}$	397	*g*$^{+1}$	603	*bb*$^{+3}$	789	*his*$^{-2}$	984
dis^{-4}	193	*eis*$^{-2}$	399	*gis*$^{-4}$	608	*ais*$^{-3}$	796	*c*^{0}	1000

als die natürliche Septime. (Aus $\frac{7}{4} = 2^x$ findet man nämlich $x = \frac{\log 7 - \log 4}{\log 2} = 0{,}80735\,..$, also natürliche Septime $= 807^u$).

Ferner lassen sich die temperirten Intervalle der 12 stufigen Tonleiter entweder ganz genau oder sehr annähernd wiedergeben. So ist z. B.:

die temp. Quinte $\overset{0}{e}\ \overset{+1}{ces} = \overset{0}{h}\ \overset{+1}{ges} = \ldots\ldots = 583^u$

die temp. gr. Terz $\overset{-3}{gis}\ \overset{+3}{ces} = \overset{-4}{eis}\ \overset{+2}{as} = \ldots\ldots = 333^u$

die temp. kl. Terz $\overset{+1}{e}\ \overset{-4}{gis} = \overset{+1}{h}\ \overset{-4}{dis} = \ldots = 250^u$

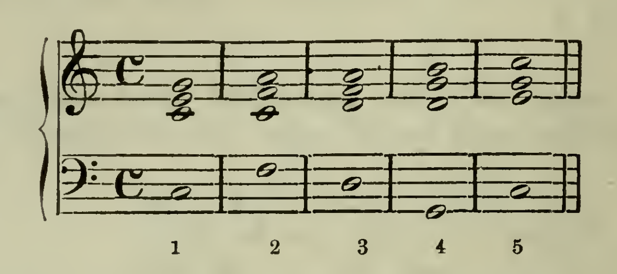
der temp. Halbton $\overset{+3}{eses}\ \overset{-4}{disis} = \overset{+3}{ces}\ \overset{-4}{hisis} = \ldots = 84^u$

u. s. f. — Das Eitz'sche Harmonium eignet sich also vorzüglich zur Vergleichung aller in der Musik auftretenden Intervalle, Akkorde und Tonleitern. —

50—54. Kritik der verschiedenen Stimmungsprinzipien.

50. Die Mängel des harmonischen Prinzips. — Alle Versuche zur Lösung des sog. Problems der reinen Stimmung und zur Herstellung praktisch brauchbarer reingestimmter Tasteninstrumente gingen — mit wenigen Ausnahmen — einzig von der Absicht aus, alle Akkorde, insbesondere alle Dreiklänge, in vollkommener harmonischer Reinheit zur Darstellung zu bringen, in dem Sinne, wie es oben ausführlich auseinandergesetzt wurde. Der absolute ungetrübte Wohllaut rein abgestimmter Dur-Dreiklänge wirkt so bestrickend, dass es erklärlich ist, wenn fast alle Theoretiker, die sich mit dieser Frage befassen, das harmonische Prinzip des reinen Dur-Dreiklangs, das in seiner weiteren Entwicklung zum Aufbau des harmonischen Tonsystems führt, als das einzig massgebende betrachten. Bei consequenter Befolgung dieses Prinzips und bei eingehender Prüfung aller sich daraus ergebender Folgerungen konnten aber dem vorurtheilsfreien Musiker die Mängel nicht verborgen bleiben, welche diesem Prinzipe anhaften und die eine consequente Durchführung desselben — ganz abgesehen von rein praktisch-technischen Schwierigkeiten — als unmöglich erscheinen lassen.

Man betrachte z. B. die folgende Akkordfolge vom Standpunkt der absoluten harmonischen Reinheit der einzelnen Dreiklänge aus:



Diese Akkordfolge besteht aus lauter Dreiklängen in der Grundstellung, die nach den Regeln der Harmonielehre mit einander verbunden sind. Ausgangspunkt ist der *c*-dur-Dreiklang und den Schluss bildet wieder derselbe Dreiklang. Je zwei aufeinanderfolgende Dreiklänge haben entweder einen Ton oder zwei Töne gemein. Nimmt man alle Dreiklänge harmonisch vollkommen rein, indem man die einzelnen Stimmen so führt, dass sie sich nach dem Tone richten, der beim Fortschreiten von einem Dreiklange zum nächstfolgenden unverändert bleibt, so stellt es sich heraus, dass der *c*-dur-Dreiklang am Schlusse sehr merklich, um ein synt. Komma tiefer ist als der Ausgangs-Akkord. Im Verlaufe von nur 5 Akkorden ist man um ein ganzes Komma gesunken. Der Versuch kann an jedem reingestimmten Tasteninstrumente vorgenommen werden und ist für den Nicht-Eingeweihten verblüffend. Der Schlussakkord steht so bedeutend tiefer als der Ausgangsakkord, dass Jeder den Unterschied hört, der überhaupt über musikalisches Tongehör verfügt. — Der Grund des Sinkens ist leicht einzusehen. Die einzelnen Dreiklänge lassen sich in Buchstabenschrift folgendermassen wiedergeben:

$$\begin{array}{lllll} & & & \overset{-2}{h} & \overset{-2}{e} \\ \overset{-1}{e} & \overset{-1}{a} & \overset{-1}{d}\quad \overset{-1}{a} & \overset{-1}{g}\quad \overset{-1}{d}, & \overset{-1}{c}\quad \overset{-1}{g}, \\ \overset{0}{c}.\quad \overset{0}{g}, & \overset{0}{f}\quad \overset{0}{c}, & \overset{0}{f}, & & \end{array}$$

Beim Uebergange vom Akkord 1 zum Akkord 2 bleibt der Ton $\overset{0}{c}$ liegen; beim Uebergange von 2 zu 3 bleiben die Töne $\overset{0}{f}$ und $\overset{-1}{a}$ liegen; von 3 zu 4 der Ton $\overset{-1}{d}$, und von 4 zu 5 der Ton $\overset{-1}{g}$. Man

gelangt also in der That vom Dreiklange $\begin{smallmatrix} & \overset{-1}{e} & \\ \overset{0}{c} & & \overset{0}{g} \end{smallmatrix}$ nach dem um ein Komma tieferen $\begin{smallmatrix} & \overset{-2}{e} & \\ \overset{-1}{c} & & \overset{-1}{g} \end{smallmatrix}$.

Der Grund des Sinkens liegt im Dreiklange 3. Vom Standpunkte der Tonart *c*-dur aus betrachtet, ist dies der Dreiklang der 2. Stufe, von dem wir wissen, dass er (in der natürl.-harm. Leiter) kein reiner Dreiklang ist wegen der um ein Komma zu kleinen Quinte. Nimmt man diesen Dreiklang dennoch rein, indem man das in der Ausgangstonart $\overset{0}{c}$-dur liegende $\overset{0}{d}$ durch $\overset{-1}{d}$ ersetzt (d. h. statt $\begin{smallmatrix} \overset{-1}{a} & . & . \\ \overset{0}{f} & . & . & \overset{0}{d} \end{smallmatrix}$ den Dreiklang $\begin{smallmatrix} \overset{-1}{d} & & \overset{-1}{a} \\ & \overset{0}{f} & \end{smallmatrix}$ nimmt), so wird man eben dadurch aus der ursprünglichen Tonart $\overset{0}{c}$-dur nach der um ein Komma tieferen $\overset{-1}{c}$-dur gedrängt. Will man dieses Sinken vermeiden, so bleibt nichts anderes übrig, als vom Prinzipe der harmonischen Reinheit irgendwo abzuweichen. Dies kann aber in verschiedener Weise geschehen. Das Nächstliegende wäre, den Dreiklang der 2. Stufe so zu nehmen, wie es durch die Tonart $\overset{0}{c}$-dur vorgeschrieben ist, d. h. mit der unreinen Quinte $\overset{0}{d}\ \overset{-1}{a}$. Der praktische Versuch zeigt, dass diese Lösung unmöglich ist, indem der Dreiklang $\overset{0}{d}\ \overset{0}{f}\ \overset{-1}{a}$ dem Ohre als unerträgliche Dissonanz erscheint. Es tritt dabei der Dreiklang $\overset{0}{d}\ \overset{0}{f}\ \overset{-1}{a}$ nicht etwa als Dissonanz in musikalischem Sinne auf, wie etwa ein verminderter Dreiklang, sondern als Dreiklang mit verstimmter Quinte, was auf das Ohr einen geradezu widerlichen Eindruck macht. Eine zweite, weit bessere Art der Lösung ist die, den Dreiklang der 2. Stufe ganz als pythagoräischen Dreiklang zu nehmen, d. h. auch das $\overset{-1}{a}$ in $\overset{0}{a}$ umzuwandeln und demgemäss den Dreiklang $\overset{0}{d}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{a}$, der sich harmonisch weit besser ausnimmt, als Dreiklang der 2. Stufe gelten zu lassen.

Die symbolische Darstellung der einzelnen Akkorde ist dann die folgende:

$$\overset{\overset{-1}{e}}{\overset{0}{c}\;\overset{0}{g}},\quad \overset{\overset{-1}{a}}{\overset{0}{f}\;\overset{0}{c}},\quad \overset{0}{f}\;.\;.\;\overset{0}{d}\;\overset{0}{a},\quad \overset{\overset{-1}{h}}{\overset{0}{g}\;\overset{0}{d}},\quad \overset{\overset{-1}{e}}{\overset{0}{c}\;\overset{0}{g}}\;.$$

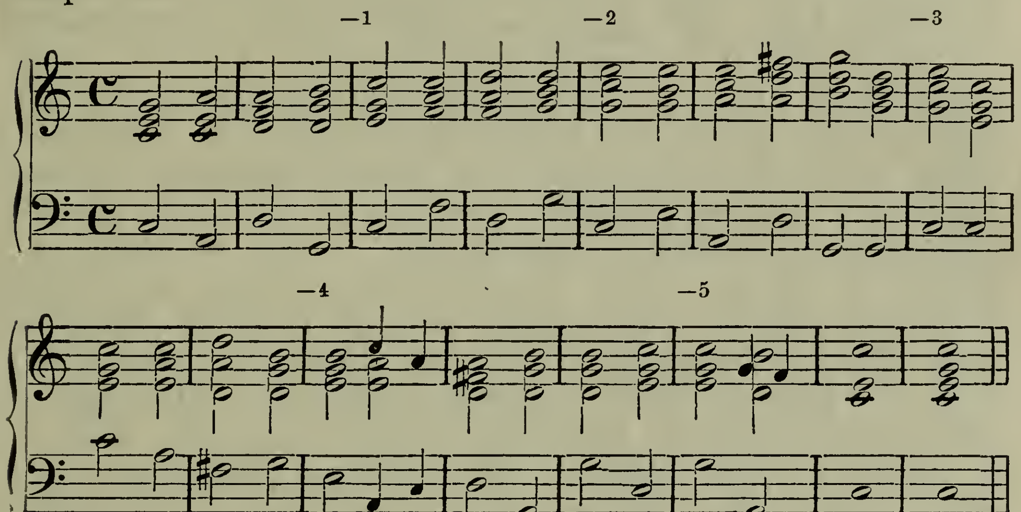
und die Führung der einzelnen Stimmen ergibt sich aus folgender Uebersicht:

Sopran	$\overset{0}{g}$	$\overset{-1}{a}$	$\overset{0}{a}$	$\overset{-1}{h}$	$\overset{0}{c}$
Alt	$\overset{-1}{e}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{g}$
Tenor	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{-1}{e}$
Bass	$\overset{0}{c}$	$\overset{0}{f}$	$\overset{0}{d}$	$\overset{0}{g}$	$\overset{0}{c}$

Der schwache Punkt bei dieser Art der Lösung liegt nicht in der Reinheit der einzelnen Akkorde, sondern in der Stimmführung des Soprans, der beim Uebergange vom 2. zum 3. Akkord von $\overset{-1}{a}$ nach $\overset{0}{a}$ steigen muss. Beim Spielen auf einem reingestimmten Harmonium wirkt dieser kommatische Sprung unschön, da er völlig unvermittelt erfolgt und um so klarer zu Tage tritt, als er in der exponirten Stimme des Soprans liegt. Würde das obige Beispiel gesungen oder von Streichinstrumenten gespielt, so könnte man das $\overset{-1}{a}$ allmählich zu $\overset{0}{a}$ anspannen und den sprungweisen Uebergang durch einen kontinuirlichen ersetzen. Oder man kann von vornherein im Sopran das $\overset{-1}{a}$ durch $\overset{0}{a}$ ersetzen, d. h. den Sprung durch sog. anticipirte Intonation vermeiden. Trotzdem der zweite Dreiklang dadurch eine etwas zu scharfe und gespannte Terz erhält, ist diese Art der Lösung für ein reingestimmtes Harmonium die beste, wie der Versuch zeigt. Will man endlich der melodischen Stimmführung im Sopran noch eine Concession durch Anwendung des pythagoräischen Leittonschrittes machen, so hat man im Dominant-Dreiklange 4 die natürl. Terz $\overset{-1}{h}$ durch $\overset{0}{h}$ zu ersetzen. Dadurch erhält dieser Dreiklang eine gewisse Spannung, die ihn als auflösungsbedürftig erscheinen lässt und ihn als Ueberleitungsakkord zum Dreiklange der Tonika kennzeichnet.

Aus dem einfachen Beispiele, das wir soeben betrachteten, lassen sich mancherlei bemerkenswerthe Schlüsse ziehen. Vor Allem zeigt es sich, dass das Prinzip der reinen Harmonik nicht immer in

Einklang zu bringen ist mit dem Prinzip der Erhaltung der Tonika. Wenn schon die obige Folge von nur 5 Dreiklängen bei consequenter Befolgung des rein harmonischen Prinzips ein Sinken der Tonika um ein ganzes Komma mit sich bringt, so lässt sich daraus schliessen, wie leicht es vorkommen kann, dass im Verlaufe eines längeren Tonstückes die Tonika um mehrere Kommata sinkt oder steigt. Wendet man das streng harmonische Prinzip auf das folgende Beispiel an:



so ergibt sich, dass der *c*-dur-Dreiklang am Schlusse um volle 5 Kommata tiefer steht als der *c*-dur-Dreiklang, von dem man ausging. (Bezeichnen wir, der kürzeren Darstellung wegen, einen Dreiklang nur durch seinen Grundton, und kennzeichnen wir ferner einen Dur-Dreiklang durch ein beigefügtes $\wedge$, einen Moll-Dreiklang durch ein beigefügtes $\vee$, so ist die Analyse des vorstehenden Beispiels in folgender Darstellung enthalten: $\overset{0}{\underset{\wedge}{c}}$, $\overset{-1}{\underset{\vee}{a}}$, $\overset{-1}{\underset{\vee}{d}}$, $\overset{-1}{\underset{\wedge}{g}}$, $\overset{-1}{\underset{\wedge}{c}}$, $\overset{-1}{\underset{\wedge}{f}}$, $\overset{-2}{\underset{\vee}{d}}$, $\overset{-2}{\underset{\wedge}{g}}$, $\overset{-2}{\underset{\wedge}{c}}$, $\overset{-3}{\underset{\vee}{e}}$, $\overset{-3}{\underset{\vee}{a}}$, $\overset{-3}{\underset{\wedge}{d}}$, $\overset{-3}{\underset{\wedge}{g}}$, $\overset{-3}{\underset{\wedge}{c}}$, $\overset{-4}{\underset{\vee}{a}}$, $\overset{-4}{\underset{\wedge}{d}}$, $\overset{-4}{\underset{\wedge}{\bar{g}}}$, $\overset{-5}{\underset{\vee}{e}}$, $\overset{-5}{\underset{\vee}{a}}$, $\overset{-5}{\underset{\wedge}{d}}$, $\overset{-5}{\underset{\wedge}{g}}$, $\overset{-5}{\underset{\wedge}{c}}$). Fünf syntonische Kommata zusammengenommen machen aber nahezu einen grossen Halbton aus (5 . 18 = 90). Im Verlaufe von nur 16 Takten (und 22 von einander verschiedenen Dreiklängen) ist also die Tonika um einen vollen halben Ton gesunken. Es ist klar, dass in der praktischen Musik ein Sinken oder Steigen um so grosse Intervalle, zumal innerhalb eines so kurzen Sätzchens, absolut undenkbar wäre. Trotzdem jeder einzelne Dreiklang nach streng harmonischen Prinzipien völlig rein wäre, würde sich selbst ein

wenig empfindliches Ohr gegen ein so rasches Sinken oder Steigen der Tonika energisch auflehnen.

Es würden in einem solchen Falle Bedürfnisse gebieterisch Berücksichtigung verlangen, die in direktem Widerspruch zum streng harmonischen Prinzipe stehen. Denken wir uns das vorstehende Beispiel von vier verschiedenen Stimmen gesungen, so wäre gewiss kein Sopran der Welt im Stande, seine Stimme so zu singen, wie es bei starrer Befolgung des rein harmonischen Prinzips sein müsste. Der Sopran hätte meist in kleinen Ganztonschritten fortzuschreiten ($\overset{0}{g}\ \overset{-1}{a},\ \overset{-1}{a}\ \overset{-2}{h},\ .\ .\ ,\ \overset{-1}{c}\ \overset{-2}{d},\ \overset{-2}{d}\ \overset{-3}{e},\ .\ .\ .\ .\ .\ .$), und erfahrungsgemäss klingt der kleine Ganztonschritt, als melodischer Schritt, matt und charakterlos. Die streng harmonische Reinheit verträgt sich in diesem Beispiele absolut nicht mit einer das Ohr befriedigenden melodischen Stimmführung. — Nun ist freilich das Beispiel, an das sich unsere Beobachtungen knüpfen, mit Absicht so gewählt, dass die Abweichungen stets in demselben Sinne erfolgen und sich summiren, so dass das Resultat ein verblüffendes ist, und es kann mit Recht der Einwand erhoben werden, dass bei guten Kompositionen ein derartiger Fall nicht so oft und kaum in so auffälliger Weise eintreten wird. Indessen reicht doch ein solches Beispiel hin, um den Beweis zu erbringen, dass das rein harmonische Prinzip nicht in allen Fällen das allein massgebende sein kann. Und übrigens fehlt es in der Musiklitteratur nicht an Beispielen, aus denen sich genau dieselben Schlüsse ziehen liessen, wie aus dem oben aufgestellten Beispiel. So führt z. B. M. Planck in einer sehr interessanten Studie über „die natürliche Stimmung in der modernen Vokalmusik“ (Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft Bd. IX, 1893, Leipzig, Breitkopf und Härtel) eine Stelle aus einem geistlichen Gesang von Heinrich Schütz für 5stimmigen Chor an, bei welcher der Chor innerhalb weniger Takte merklich sinken muss, wenn er sich ausschliesslich nach harmonischen Grundsätzen richtet. Ferner kann hier auf die mühevollen Untersuchungen G. Engel's über Mozart's Don Juan hingewiesen werden. („Eine mathematisch-harmonische Analyse des Don Giovanni von Mozart“, Vierteljahrsschr. f. Musikw. Bd. III, 1887.) Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dass zwar die einzelnen in sich geschlossenen Tonstücke, aus denen diese Oper besteht, in Bezug auf Tonalität einheitlich sind, d. h. zu demselben Grundtone zurückkehren. Eine Ausnahme bildet einzig das Quartett des ersten Akts, das um ein Komma steigt. Die die einzelnen Tonstücke verbindenden Secco-

Recitative dagegen, mit Ausnahme des (begleiteten) Recitativs vor der Rache-Arie, sinken fast alle um ein oder mehrere Kommata, und alle diese Komma-Erniedrigungen summiren sich am Schlusse der Oper auf 32 Kommata. Das Recitativ vor der Rache-Arie steigt um 2 Kommata und ausserdem, in Folge einer enharmonischen Verwechslung, um die kleine Diësis ($34''$). Engel wundert sich freilich mit Recht über den feinen Instinkt Mozarts, der sich darin äussert, dass in allen als abgeschlossenes Ganzes zu betrachtenden Tonstücken, mit einer einzigen Ausnahme, die Einheitlichkeit in Bezug auf Tonalität vollkommen gewahrt ist. Indessen lässt sich dennoch die Thatsache nicht leugnen, dass bei lückenloser Aneinanderreihung sämmtlicher einzelnen Stücke mit Einschluss der verbindenden Recitative die Tonika am Schlusse der Oper ganz beträchtlich tiefer stehen würde als am Anfange. Der Unterschied würde $32 . 18 - (18 + 36 + 34) = 488''$, d. h. nahezu eine übermässige Quarte betragen. Gewiss war es nicht Mozart's Absicht, die Oper um eine übermässige Quarte tiefer schliessen zu lassen als sie beginnt, und Mozart würde ohne Zweifel auf das starre Festhalten am harmonischen Prinzipe zu Gunsten der Aufrechterhaltung der Tonika verzichtet haben, wenn man ihm die in ihrem Wesen allerdings theoretische Frage vorgelegt hätte, ob er die consequente Durchführung des harmonischen Prinzips trotz der damit verknüpften Uebelstände wünsche oder nicht. —

51. Prüfung der verschiedenen Durtonleitern vom Standpunkte der Melodik, mit Hülfe eines reingestimmten Harmoniums oder der Violine. — Wenn man eine nach harmonischem Prinzipe abgestimmte Durtonleiter, z. B. die Leiter $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{-1}{e}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{-1}{a}\ \overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$ auf einem reingestimmten Harmonium spielt und seine Aufmerksamkeit auf die einzelnen Tonschritte lenkt, so sind es 3 Schritte, die dem unbefangenen Beobachter auffallen: In erster Linie der kleine Ganztonschritt $\overset{0}{d}\ \overset{-1}{e}$ von der Sekunde zur Terz, der überraschend matt und charakterlos klingt; zweitens der durchaus gleichartige Schritt $\overset{0}{g}\ \overset{-1}{a}$ von der Quinte zur Sexte, der sich bei Melodien in *c*-dur als auffallend klein, fast unbrauchbar erweist; und drittens der Leittonschritt $\overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$, von dem schon oft die Rede war und der in der reinen Melodie bei freier Intonation stets wesentlich enger, ungefähr gleich $\overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$ genommen wird.

Einem Geiger, der die Tonleiter $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{-1}{e}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{-1}{a}\ \overset{-1}{h}\ \overset{0}{c}$ spielen würde, würde ohne allen Zweifel der Vorwurf gemacht werden, er spiele falsch. Verbessert man die 3 genannten auffallenden Tonschritte dadurch, dass man Terz, Sexte und Septime um je ein Komma erhöht, also $\overset{-1}{e}$, $\overset{-1}{a}$, $\overset{-1}{h}$ durch $\overset{0}{e}$, $\overset{0}{a}$, $\overset{0}{h}$ ersetzt, so ist der Uebergang von der natürlich-harmonischen zur pythagoräischen Tonleiter $\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{e}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{a}\ \overset{0}{h}\ \overset{0}{c}$ vollzogen. Die pythagoräische Tonleiter macht auf das Ohr einen ungleich viel befriedigenderen Eindruck als die harmonische. Jeder Musiker, dem der Verfasser einerseits die harmonische, andrerseits die pythagoräische Durtonleiter vorspielte, entschied sich sofort und ohne Schwanken für letztere. Es wurde höchstens bei eingehender Prüfung der Einwand erhoben, dass allenfalls die Terz $\overset{0}{e}$ etwas weniger scharf sein dürfte und ausserdem höchstens die Sexte. Will man aber dieser letzteren Forderung Rechnung tragen, so geräth man unvermerkt in das System der 12stufigen gleichschwebend temperirten Stimmung. Die temperirte Durtonleiter nähert sich sehr der pythagoräischen; die grosse Terz und Sexte entsprechen völlig der Forderung wesentlich schärfer zu sein als die natürlichen Intervalle, und doch nicht ganz so scharf wie die pythagoräischen.

Die folgende Zusammenstellung der 3 Durtonleitern in den 3 verschiedenen Systemen lässt ihr gegenseitiges Verhältniss deutlich erkennen:

	c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*
Natürlich-harmonisch	0	170	322	415	585	737	907	1000
Temperirt	0	$166\frac{2}{3}$	$333\frac{1}{3}$	$416\frac{2}{3}$	$583\frac{1}{3}$	750	$916\frac{2}{3}$	1000
Pythagoräisch	0	170	340	415	585	755	925	1000

Die temperirte Dur-Terz ist ungefähr um $\frac{1}{3}$ Komma tiefer als die pythagoräische; die temp. grosse Sexte um nur 5^{u} tiefer als die pythagoräische. Während bei ungebundener Intonation die temperirte Dur-Terz, die einen wirklich glücklichen Mittelwerth zwischen der allzu milden harmonischen und der zwar sehr ausdrucksfähigen aber etwas scharfen pythagoräischen Terz einnimmt, zweifellos praktisch vielfach, vielleicht sogar in der Regel angewandt wird, ist die Anwendung der temperirten gr. Sexte an Stelle der pythagoräischen weniger naheliegend und zweifelhafter, da letztere immerhin die naturgemässe Mitte zwischen der reinen Quinte und dem in der Melodik zur Anwendung kommenden Leitton bildet. Die Abweichungen

der temperirten Skala von der pythagoräischen sind verhältnissmässig so klein, dass es nicht immer leicht ist genau festzustellen, welche der beiden Skalen bei melodischer Intonation vorzugsweise zur Anwendung kommt. Da unser Ohr von Jugend auf an die gleichschwebend temperirte Stimmung gewöhnt ist, so ist es natürlich und sogar wahrscheinlich, dass wir von den temperirten Intervallen häufig Gebrauch machen, ohne uns dessen bewusst zu sein. Andrerseits drängt aber die kaum zweifelhafte Anwendung des pythagoräischen Leittons sowie der reinen Quinte, Quarte und Sekunde entschieden nach dem pythagoräischen System hin, und wo es sich um schärfere Ausprägung gewisser Stellen handelt, werden auch die charaktervollen pythagoräischen Terzen und Sexten in der Melodik zur Anwendung kommen.

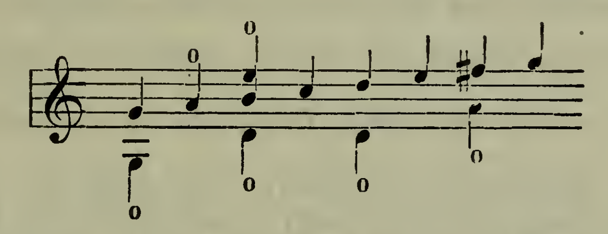
Es ist natürlich ein Ding der Unmöglichkeit, durch Worte allein feinere Tonunterschiede scharf zu charakterisiren; Zahlen geben zwar ein weit klareres und bestimmteres Bild von Tonverhältnissen, als Worte, aber auch sie vermögen keinen vollkommenen Ersatz für wirkliches Hören zu bieten. Reingestimmte Harmoniums, deren Zungen eine sehr genaue und sehr konstante Stimmung zulassen, sind die geeignetsten Instrumente zu Versuchen über reine Stimmung und was damit zusammenhängt; aber nur einer relativ kleinen Zahl von Solchen, die sich für diesen Gegenstand interessiren, sind derartige Instrumente zugänglich, und auch Monochorde, Systeme abgestimmter Stimmgabeln und ähnliche Veranschaulichungsmittel werden stets mehr zum Inventar des Physikers als zu demjenigen des Musikers gehören. Dagegen steht wohl jedem Musiker ein Streichinstrument zur Verfügung. Eine Violine kann dazu dienen, wenigstens einen annähernden Begriff von den Tonunterschieden zu geben, die hier in Frage kommen. Ein grosser Uebelstand ist hierbei freilich der, dass die zu vergleichenden Töne und Intervalle nicht fertig gebildet zur Verfügung stehen, sondern erst eingestimmt werden müssen. Die 4 leeren Saiten müssen als absolut rein gestimmt vorausgesetzt werden und alle Töne, die zur Vergleichung herangezogen werden, müssen in irgendwelche direkte oder indirekte nahe Beziehung zu einem der 4 festen Stützpunkte, d. h. zu einer der leeren Saiten gesetzt werden, weil sonst eine zuverlässige Kontrolle für die absolute Reinheit fehlt. Dadurch wird aber die Aufmerksamkeit von dem eigentlichen Hauptpunkt, auf den man achten will, abgelenkt, und es schleichen sich leicht Fehler ein, die das Experiment vereiteln. Immerhin mag der Leser versuchen, ungefähr in folgender Weise vorzugehen:

Man spiele auf einer Violine die *g*-dur-Tonleiter vom einge-

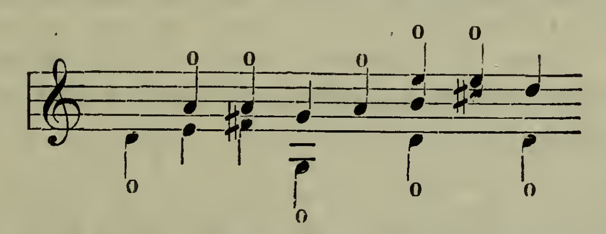
strichenen bis zum zweigestrichenen *g* (in der 1. Lage) in völlig ungezwungener Weise, wie es Einem vom Gehör diktirt wird. Nur versichere man sich vorher, dass der Ausgangspunkt, das eingestrichene *g*, die reine Oktave der leeren *g*-Saite ist. Es ist nicht schwer, sich dann zunächst darüber klar zu werden, ob die vom Ohr verlangte Tonleiter mit der natürlich-harmonischen übereinstimmt oder nicht. Nimmt man (— fast alle Geiger werden es thun —) in dieser Tonleiter als 2. Stufe die leere *a*-Saite, als 6. die leere *e*-Saite, so ist man schon in einem Punkt von der natürlich-harmonischen Leiter abgewichen; das *e* der leeren Saite ist nicht die natürliche, sondern die pythagoräische grosse Sexte der Tonika *g*, und die Quinte der 2. Stufe *a—e* hat man als reine Quinte genommen, während sie sich im natürl.-harmon. System dadurch, dass man das *e* mit dem 4. Finger auf der *a*-Saite zu greifen und um ein Komma tiefer zu nehmen hätte, als „unreine" präsentiren würde. Gewiss wird kein Geiger sich sträuben, das *e* mit dem 4. Finger auf der *a*-Saite zu spielen, er würde es aber als eine widersinnige Zumuthung empfinden, das gegriffene *e* absichtlich tiefer zu nehmen, als das *e* der leeren Saite; die harmonische Beziehung zum Grundtone, die bei andern Tonverbindungen zweifellos oft ihre Rechte geltend macht, wird hier, bei melodischer Folge, völlig in den Hintergrund treten. — Quarte *c* und Quinte *d* werden von dem Geiger zweifellos als reine Intervalle zum Grundton genommen, sonst trifft ihn eben der Vorwurf des Falschspielens. Es bleiben also nur mehr 2 Tonstufen: die Terz *h* und die Septime *fis*. Ob die Terz mehr dem harmonischen oder mehr dem pythagoräischen System entsprechend gegriffen wird, kann der Geiger kontrolliren, wenn er beim Spielen der Tonleiter bei *h* innehält und dieses *h* einerseits mit der leeren *d*-Saite, andrerseits mit der leeren *e*-Saite vergleicht. War das *h* als natürliche grosse Terz zum Grundton *g* gegriffen, so muss es auch mit der leeren *d*-Saite eine natürliche grosse Sexte bilden; war es aber als pythagoräische Terz genommen, so muss es mit der leeren *e*-Saite eine reine Quarte bilden. Ist weder das eine noch das andere genau der Fall und liegt das *h* zwischen den beiden genannten Grenzen, so ist wohl ein Einfluss der temperirten Stimmung anzunehmen. Ohne das Urtheil des Lesers beeinflussen zu wollen, bemerken wir, dass uns der erste Fall als ausgeschlossen erscheint und dass es sich für uns, in diesem Zusammenhange wenigstens, nur entweder um die temperirte oder um die pythagoräische Terz handeln kann. Es scheint uns sogar, dass die bewusste Absicht der Geiger mehr nach letzterer als nach ersterer

hinneigt. Ganz ähnlich verhält es sich mit der Septime, dem Leitton *fis*. Würde dieser harmonisch, d. h. als reine grosse Terz der Dominante, genommen, so müsste er mit der *a*-Saite eine natürl. gr. Sexte bilden. Der Versuch wird hier noch zweifelloser ergeben, dass dies nicht der Fall ist und dass der Leitton *fis* sehr merklich nach der Seite des Auflösungstons *g* hin verschoben wird. Es wurde schon oben erwähnt, dass unserem Geschmacke der pythagoräische Leittonschritt in melodischer Beziehung am meisten zusagt. —

Kürzer als in Worten lässt sich die oben auseinandergesetzte Art die Tonleiter zu analysiren in Noten ausdrücken:



Die ausserhalb der *g*-dur-Tonleiter stehenden Noten bedeuten die zur Kontrolle heranzuziehenden Töne der leeren Saiten. — Natürlich können auch andere Tonleitern in analoger Weise analysirt werden; z. B. eignet sich hierzu auch die *d*-dur-Tonleiter sehr gut:



Auch hier bedeuten die ausserhalb der *d*-dur-Tonleiter stehenden Noten die Kontroll-Töne der leeren Saiten. Man wird finden, dass das *fis* mit der *a*-Saite keine reine kleine Terz bildet, sondern höher gegriffen wird; ebenso dass *h* keine reine grosse Sexte mit der *d*-Saite und *cis* keine reine kleine Terz mit der leeren *e*-Saite bildet. Dies Alles müsste aber der Fall sein, wenn der Geiger die natürlich-harmonische Tonleiter spielen würde. Ob *h* als pythagoräische Sexte genommen ist, entscheidet der Zusammenklang mit der leeren *e*-Saite, denn in diesem Falle muss *h*—*e* eine reine Quarte sein. — In dieser und ähnlicher Weise kann der Geiger sich wenigstens ein ungefähres Urtheil über das gegenseitige Verhältniss der verschiedenen Abstimmungsprinzipien bilden; er kann den grossen Ganzton mit dem kleinen vergleichen, den natürlich-harmonischen Leittonschritt ($\frac{16}{15}$) mit dem seinem Geschmacke am meisten zusagenden, u. a. m. —

52. Analoge Prüfung der Molltonleitern. — Wenden wir uns von der Betrachtung der Durtonleiter zu derjenigen der Molltonleiter. Die sog. aufsteigend-melodische und absteigend-melodische *c*-moll-Leiter der Theorie ist

$$\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{+1}{es}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{-1}{a}\ \overset{-1}{h}\ \overset{0}{c} \quad \text{und} \quad \overset{0}{c}\ \overset{+1}{b}\ \overset{+1}{as}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{f}\ \overset{+1}{es}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{c}$$

Beim Spielen dieser Skalen auf einem reingestimmten Harmonium fällt bei beiden Leitern sehr stark auf, dass die Mollterz $\overset{+1}{es}$ zu hoch ist. Wem auch der Verfasser diese Skalen vorspielte, niemand wollte es glauben, dass dies die theoretisch richtigen Molltonleitern seien. Vor allem wurde die zu hohe Mollterz $\overset{+1}{es}$ beanstandet, aber ausserdem in nicht geringerem Grade die zu hohe Septime $\overset{+1}{b}$ und Sexte $\overset{+1}{as}$ der absteigenden Tonleiter. Alle erschienen dem düsteren Charakter des Mollgeschlechts direkt widersprechend, zu hoch, geradezu falsch. Die obere Hälfte der aufsteigenden Molltonleiter traf derselbe Vorwurf wie die entsprechende Durtonleiter, mit der sie ja auch übereinstimmt: $\overset{-1}{a}$ und $\overset{-1}{h}$ wurden als zu tief befunden. Werden diese Einwendungen berücksichtigt, indem man die als zu hoch erkannten Töne $\overset{+1}{b}$, $\overset{+1}{as}$, $\overset{+1}{es}$ um ein Komma tiefer, die zu tiefen $\overset{-1}{a}$ und $\overset{-1}{h}$ um ein Komma höher nimmt, so stehen wieder die rein pythagoräischen Molltonleitern da:

$$\overset{0}{c}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{es}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{a}\ \overset{0}{h}\ \overset{0}{c} \quad \text{und} \quad \overset{0}{c}\ \overset{0}{b}\ \overset{0}{as}\ \overset{0}{g}\ \overset{0}{f}\ \overset{0}{es}\ \overset{0}{d}\ \overset{0}{c}$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass keine dieser pythag. Leitern auch nur im geringsten beanstandet wurde. Es waren Geiger der Joachim'schen Schule, welche der Verfasser einlud, diese verschiedenen Skalen vorurtheilsfrei zu prüfen. Alle erklärten übereinstimmend, dass die pythagoräischen Molltonleitern derjenigen Intonation entsprechen, die in der künstlerischen Praxis, bei gänzlicher Freiheit der Intonation, angestrebt wird. — Auch die Molltonleitern sind auf der Violine einer ähnlichen Analyse zugänglich wie die Durtonleitern. Das folgende Notenbeispiel gibt die dazu nöthige Anweisung:



Man wird finden, dass bei ganz ungezwungener Intonation der Tonleiter die Terz *f—a* zu gross, also *f* etwas tiefer ist, als es nach streng harmonischem Prinzip sein sollte. Ganz ebenso wird man bei der absteigenden Leiter die Terz *c—e* zu gross finden, dagegen die kleine Sexte *d—b* zu eng. Dadurch ist der Beweis erbracht, dass es nicht die Molltonleiter der modernen Theorie ist, welche in der Praxis intonirt wird.

Der Schritt von *b* nach *a*, sowie derjenige von *f* nach *e* in der absteigenden *d*-moll-Tonleiter ist ein absteigender Leittonschritt, für den dasselbe melodische Gesetz gilt wie für den aufsteigenden Leitton: er wird durch Annäherung des Leittons an den Auflösungston kleiner gemacht, als das harmonische Prinzip es verlangt. Es ist der Schritt von der Parhypate zur Hypate des antiken dorischen Tetrachords, der auch heute noch ebenso lebensfähig ist wie vor 2500 Jahren.

Es soll nochmals betont werden, dass die Versuche an der Violine nicht so schlagend sind wie diejenigen an einem reingestimmten Harmonium, da sich leicht Fehler einschleichen, welche die Reinheit des Versuchs trüben; als theilweiser Ersatz für Besseres sind sie aber immerhin brauchbar. Endlich sei bemerkt, dass es gut ist, die Skalen erst einigemal glatt durchzuspielen und dann erst gelegentlich, gleichsam unvorhergesehen, bei einem der zu kontrollirenden Töne anzuhalten und die entsprechende leere Saite zur Kontrolle heranzuziehen.

53. Die Tonleitern vom Standpunkte der Harmoniebildung aus betrachtet. Der Dur-Dreiklang und der Moll-Dreiklang. — Nachdem wir die nach harmonischem Prinzipe abgestimmten Tonleitern der modernen Musiktheorie, sowie die pythagoräischen Skalen vom melodischen Standpunkte aus einer Kritik unterworfen und die Ueberlegenheit der letzteren in melodischer Beziehung konstatirt haben, müssen wir dieselben Tonleitern, wenn uns nicht der Vorwurf der Einseitigkeit treffen soll, auch vom Standpunkte der Harmonie aus kritisch betrachten.

Wir haben oben schon erkannt, dass die konsequente Durchführung des rein harmonischen Prinzips Missstände mit sich bringen kann, welche eine Abweichung von demselben unter Umständen gebieterisch verlangen. Der Hauptmangel der natürlich-harmonischen Durtonleiter ist in harmonischer Beziehung die unreine Quinte der zweiten Stufe, welche den Dreiklang der 2. Stufe einer Durtonleiter musikalisch absolut unbrauchbar macht.

Es ist dies ein sehr folgenschwerer Mangel, der, wie wir sahen, unter Umständen sehr leicht ganz wider Willen aus der ursprüng-

lichen Stimmung hinaus auf Abwege führt, oder dann zu allerlei Kunstgriffen, zu unschönen kommatischen Verrückungen, dem sog. „Kommatisiren“, nöthigt. (Man sehe z. B. die von Tanaka in seiner schon mehrfach erwähnten Abhandlung auf pag. 32 und 48 gegebenen Musterbeispiele, in denen einige kommatische Verrückungen zwar erträglich, andere aber musikalisch ganz sinnwidrig sind.) Auf der andern Seite ist aber die absolute Reinheit der 3 Dur-Dreiklänge der Tonika, der Oberdominante und der Unterdominante ein so schwerwiegender Vorzug, dass die natürlich-harmonische Durtonleiter ihre Existenzberechtigung nie völlig einbüssen wird. In Bezug auf den reinen Wohlklang der Dur-Dreiklänge kann weder die pythagoräische noch die temperirte Durtonleiter der natürlich-harmonischen den Rang ablaufen. Die temperirte und besonders die pythagoräische grosse Terz verleiht einem Dur-Dreiklang immer eine gewisse Unruhe, welche sehr häufig — wenn auch freilich nicht unter allen Umständen — entschieden störend ist. Die temperirte und die pythagoräische Durterz klingen im Dreiklang zu scharf; sie geben Anlass zur Bildung sog. Schwebungen (s. später) und trüben die Klarheit des Zusammenklangs. Erniedrigt man die zu hohe Terz allmählich, so wird der Klang immer milder und ruhiger, und in dem Moment, wo man die natürliche reine grosse Terz erreicht hat, tritt vollkommene Verschmelzung zu einem einheitlichen wohlklingenden Ganzen ein. Sieht man auf reinen harmonischen Wohllaut, so ist die Ueberlegenheit des reinen Dur-Dreiklangs über den temperirten oder pythagoräischen über jeden Zweifel erhaben. — Anders, weit unklarer und unbestimmter ist das gegenseitige Verhältniss des reinen, des temperirten und des pythagoräischen Moll-Dreiklangs. An den Wohllaut eines Moll-Dreiklangs wird man nie so strenge Ansprüche stellen dürfen, wie an denjenigen eines Dur-Dreiklangs. Lassen wir auf einem Harmonium nach einander einen reinen, einen temperirten und einen pythagoräischen Moll-Dreiklang erklingen, so fühlen wir uns von dem erstgenannten am allerwenigsten befriedigt. Die reine natürliche Mollterz (rein 263", temperirt 250", pythagoräisch 245") erscheint uns nicht nur in melodischem, sondern auch in harmonischem Zusammenklang als zu gross, zu freundlich, zu dur-ähnlich. Bei genauerem Hinhören bemerken wir auch, dass sowohl auf dem Harmonium als bei der Violine, namentlich in höheren Tonlagen, sich zu einer reinen kleinen Terz ein tieferer Ton hinzugesellt, der die kleine Terz nicht als selbständige Mollterz, sondern als Bestandtheil eines zwar nahverwandten, aber immerhin fremden Dur-Dreiklanges erscheinen lässt. Dieser tiefere Ton ist ein sog. Combi-

nationston (Differenzton, s. N. 86). Spielen wir z. B. auf einem reingestimmten Harmonium oder auf einer Violine die reine kleine Terz $\bar{\bar{f}}$ — $\overline{\overline{as}}$, in der Absicht, *f*-moll erklingen zu lassen, so werden wir bei mässiger Stärke und bei völliger Reinheit der Terz sehr deutlich das tiefe *des* mitklingen hören, und nun empfinden wir die Terz $\bar{\bar{f}}$ — $\overline{\overline{as}}$ nicht als selbständige Mollterz, sondern als Bestandtheil des *des*-Dur-Dreiklanges.

Ebenso ergeht es uns mit dem vollständigen Moll-Dreiklange $\bar{\bar{f}}$ — $\overline{as}$ — $\bar{\bar{c}}$, wenn wir darin die absolut reine Mollterz nehmen: er erscheint uns als ein durchaus unselbständiger Akkord, nicht dazu geeignet, eine Molltonart entschieden zu charakterisiren; er weist nach der Tonart *des*-Dur hin, in welche dann freilich das fremde Element $\bar{\bar{c}}$ nicht hineinpasst. — Besser, wenigstens viel charaktervoller und weniger zwitterhaft als der reine, muthet uns der temperirte und der pythagoräische Moll-Dreiklang an. Von Wohlklang in dem Sinne, wie man bei einem Dur-Dreiklange von Wohlklang sprechen kann, wird man zwar auch hier nicht sprechen können. Der pythagoräische Moll-Dreiklang mit seiner kleinen pythag. Terz ($245''$) hat etwas sehr Herbes an sich und eignet sich in Folge dessen sehr wohl, um den Gegensatz zwischen Dur und Moll scharf hervorzuheben. Der Unterschied zwischen der reinen Durterz und der reinen Mollterz ist nur ein kleiner Halbton ($59''$), der viel richtiger als Drittelton bezeichnet werden sollte; diese Differenz ist viel zu gering, um den Gegensatz der beiden Tongeschlechter auszuprägen. Es ist musikalisch widersinnig, dass der Schritt von der Mollterz zur Durterz noch bedeutend kleiner sein soll als der kleinste in der Melodik übliche Leittonschritt. Bei der gegensätzlichen Nebeneinanderstellung von Dur und Moll wird man nicht die reine Mollterz der reinen Durterz gegenüberstellen, sondern die pythagoräische der reinen ($77''$), oder die temperirte der temperirten ($83\frac{1}{3}''$), oder in ganz extremen Fällen die pythagoräische der pythagoräischen ($95''$, Apotome). — Wo es nicht auf scharfe Charakterisirung eines Gegensatzes ankommt, befriedigt ein Moll-Dreiklang mit temperirter Terz unser Ohr relativ am besten. Hieran hat wohl ohne Zweifel die Gewöhnung unseres Ohrs an die temperirte Stimmung grossen Antheil. Im Gegensatz hierzu ist es kennzeichnend, dass auf dem Gebiete des reinen Dur-Dreiklanges die Gewohnheit unser Urtheil nicht zu trüben vermag. Während die natürlich-harmonische Durtonleiter wenigstens in harmonischer Beziehung Vorzüge hat, kann dasselbe von der entsprechenden

Molltonleiter nicht behauptet werden. In der künstlerischen Praxis wird Moll entweder temperirt oder pythagoräisch intonirt. Dass wir einen temperirten oder pythagoräischen Moll-Dreiklang als musikalisch selbständig anerkennen und ihn, wenn auch nicht als absolut wohlklingend, so doch sicherlich nicht als auflösungsbedürftig, dissonirend empfinden, ist eine Thatsache, die sich nicht leugnen lässt. Dass es nicht von jeher so war, zeigt die Scheu älterer Komponisten, ein Stück, auch wenn es in Moll ging, mit einem Molldreiklange abzuschliessen.

Warum der Moll-Dreiklang in musikalischem Sinne eine Consonanz, ein „verharrungsfähiger" Akkord ist, weiss im Grunde — seien wir ganz ehrlich — niemand einwandsfrei zu begründen. Es existiren zwar sehr schöne, sogar sehr geistreiche Theorien des Mollgeschlechts, aber leider beziehen sie sich nicht auf denjenigen Moll-Dreiklang, der in der musikalischen Praxis zur Anwendung kommt. Und auch vereinzelte Versuche, den pythagoräischen Moll-Dreiklang akustisch-theoretisch zu rechtfertigen, sind als sehr mangelhaft zu bezeichnen. Wir müssen uns einstweilen — und vielleicht noch sehr lange — mit der blossen Kenntniss der Thatsache begnügen, dass der temperirte und der pythagoräische Moll-Dreiklang als musikalische Consonanzen zu gebrauchen sind*).

54. Zusammenfassung der gewonnenen Resultate und Schlussfolgerungen daraus. Gegensatz zwischen Melodie und Harmonie, Bewegung und Ruhe. Beispiele. Homogene und heterogene Polyphonie. Schluss. — Ueberblicken wir den zurückgelegten Weg und suchen wir die Hauptergebnisse unserer Betrachtungen kurz in Worte zu fassen, so ist in erster Linie die gewonnene Erkenntniss zu nennen, dass es kein Abstimmungsprinzip, keine Tonleiter gibt, die nach jeder Richtung hin vollkommen wäre und Unanfechtbares leisten würde. Melodie und Harmonie sind zwei getrennte Gebiete; sie sind in ihrem Wesen ungefähr ebenso verschieden, wie die Begriffe von Zeit und Raum. Eine Tonleiter, die in melodischer Beziehung Vollkommenes oder wenigstens Hinreichendes leistet, wird stets in harmonischer Beziehung unverkennbare Mängel aufweisen; und umgekehrt darf man von einer nach harmonisch reinen Intervallen abgestimmten Tonleiter

*) Es sei hier auch auf die in der Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft (Jahrg. 1893, 4. Heft) niedergelegten Beobachtungen Engelbert Röntgen's aus der musikalischen Praxis hingewiesen, die — zur Genugthuung des Verfassers — im Wesentlichen mit den vorstehenden Entwicklungen in vollem Einklang sind.

nicht verlangen, dass sie auch zur Melodiebildung ohne Weiteres geeignet sei, ja nicht einmal, dass sie in Bezug auf Harmonie allvermögend sei.

In der Musik, und ganz besonders in der polyphon-harmonischen Musik der Neuzeit, gehen Melodie und Harmonie, wenn auch in ihrem Wesen grundverschieden, einig Hand in Hand neben einander her; der neutrale Boden, auf welchem die beiden Schwestern, unter theilweisem Verzicht auf ihre Selbständigkeit, sich stets gut vertragen und mit einander nicht in Konflikt gerathen werden, ist das Gebiet der temperirten Stimmung. Die Neutralität dieses Gebietes zu verletzen, hiesse einen Krieg heraufbeschwören, der schliesslich doch nothwendig mit erneuter Anerkennung der Neutralität endigen müsste. Die temperirte Stimmung ist einer breiten, gutgepflegten Landstrasse zu vergleichen, die ganz sicher und ohne Gefahren zum Ziele führt. Fussgänger, Radfahrer, Reiter, Fuhrwerke aller Art können bequem auf dieser Strasse verkehren; für schwere Lastwagen ist sie der einzig mögliche Verkehrsweg, nicht aber für leicht bewegliche Fussgänger, welche unter Umständen reizvollere Seitenwege einschlagen können.

Für den komplizirten Apparat eines Orchesters kann als normales Stimmungsprinzip einzig das temperirte gelten. Die Fehler, welche von Einflüssen der Wärme und von allerlei Zufälligkeiten herrühren, sind im Verhältniss zu den Unreinheiten der temperirten Stimmung so gross, dass man ein Orchester, das in Bezug auf Reinheit keine grösseren Mängel aufzuweisen hätte als die der temperirten Stimmung anhaftenden, füglich als ein sehr reinlich musizirendes bezeichnen dürfte.

Absolut ausgeschlossen ist es freilich auch hier nicht, dass gelegentlich feinfühlige Spieler, deren Instrumente ein gewisses Maass von Intonationsfreiheit gewähren, auf harmonisch reine oder auf pythagoräische Intervalle einlenken, wo sich dieselben besser ausnehmen als die temperirten; dieses unbewusste Einlenken wird aber stets nur als Ausnahme zu bezeichnen sein. Ein Orchesterkonzert wird man niemals mit allzu hohen Anforderungen an harmonische Reinheit anhören dürfen. Es scheint sogar, dass zuweilen selbst bedeutende Dirigenten es für überflüssig halten, auch leicht zu vermeidenden groben Unreinheiten aus dem Wege zu gehen. Hatte doch z. B. der Verfasser Gelegenheit, in einem musikalischen Centrum Mittel-Europas ein von einem Dirigenten allerersten Ranges geleitetes Orchesterkonzert zu hören, in welchem das Orchester einen Pianisten begleitete, dessen Instrument bedeutend, wenigstens um ein Komma,

unter der Orchesterstimmung stand! Es war ein Genuss ganz eigener Art, der die Geduld des Publikums und der Kritik im schönsten Lichte erscheinen liess und Angesichts dessen es sich fast komisch ausnimmt, wenn bei andern Anlässen über viel kleinere zufällige Unreinheiten der Stab gebrochen wird. —

Wann und in welchem Grade von der temperirten Stimmung abgewichen werden darf, hängt einerseits von der wiederzugebenden Komposition, andererseits von dem musikalischen Apparat ab, den die Wiedergabe der Komposition erfordert. An eine Komposition, die überhaupt für die temperirte Stimmung gedacht ist und deren Modulationen einzig in dieser Stimmung möglich sind, die „mathematisch-harmonische Sonde“ anzulegen, ist eine Arbeit, deren Lohn in keinem Verhältniss zu der darauf verwandten Mühe steht. Es gibt jedoch ohne Zweifel viele Kompositionen, deren Wirkung dadurch erhöht werden kann, dass man an passender Stelle von der temperirten Stimmung abweicht und entweder in die harmonisch reine Stimmung einlenkt oder zu der pythagoräischen übergeht. Wann und wo dies zu geschehen hat, darüber lassen sich keine allgemein gültigen Regeln aufstellen, das muss von Fall zu Fall entschieden werden und ist mehr oder weniger Sache des musikalischen Geschmacks. Im Allgemeinen lässt sich hierüber nur Folgendes sagen:

Melodie und Harmonie verhalten sich zu einander wie eine fortschreitende Bewegung zu einem ruhenden Zustande. Der ruhende Zustand kann entweder wirkliche innere Ruhe ausdrücken, oder eine gewisse innere Spannung erkennen lassen, die sich in fortschreitende Bewegung umsetzen möchte; der erste Fall entspricht den consonirenden Akkorden, der zweite den harmonischen Dissonanzen. (Man könnte hier, ähnlich wie in der Physik, von einer „Energie der Bewegung“ und einer „Energie der Lage“ sprechen.) In jeder Komposition wird man neben Perioden melodischen oder harmonischen Vorwärts-Drängens auch solche Perioden finden, in denen das Prinzip der Ruhe vorherrscht. Um letzterem passenden Ausdruck zu verleihen, ist, bei reinem Dur, ein Einlenken auf harmonisch absolut reine Intervalle naturgemäss und von wunderbar schöner Wirkung. Wo aber melodische Bewegung einzelner Stimmen die Oberhand über das Prinzip der Ruhe hat oder wo die Harmonie innere Unruhe ausdrücken soll, macht sich der Uebergang von der temperirten zur pythagoräischen Stimmung oft unbewusst und ist dann durchaus gerechtfertigt. Dur-Dreiklänge mit pythagoräischen Terzen werden dann entschieden zu vermeiden sein, wo sie einen Ruhepunkt bezeichnen und das Ohr förmlich darauf hingedrängt wird, auf ihren

Wohlklang zu achten. Innerhalb des musikalischen Zusammenhanges laden aber durchaus nicht alle Dur-Dreiklänge, obschon prinzipiell consonirend, zum Verweilèn ein. Wie ein aus dem Zusammenhange gerissenes Wort oft einen ganz andern Sinn hat, als innerhalb des Zusammenhanges, so erscheinen einzelne aus einer Komposition herausgegriffene Akkorde oft als unmöglich, während sie sich doch als Glieder einer fortlaufenden Kette ganz natürlich ausnehmen können. Dur-Dreiklänge machen mehr als irgendwelche andere Akkorde Anspruch auf absolute harmonische Reinheit ihrer Intervalle, und dennoch ist es durchaus nicht ausgeschlossen, dass innerhalb des musikalischen Zusammenhanges selbst bei ihnen pythagoräische Terzen zulässig oder sogar naturgemäss sind. Was von Dur-Dreiklängen gilt, trifft in erhöhtem Masse auf dissonante Akkorde zu. Z. B. werden der Dominantseptakkord und der verminderte Septimenakkord oft ihrer harmonischen Aufgabe besser gerecht werden, wenn man zu ihrem Aufbau pythagoräische Intervalle verwendet.

Wir möchten den Leser einladen, auf Grund dieser wenigen Fingerzeige sich verschiedene Musikstücke genauer anzusehen. Es würde viel zu weit führen, an dieser Stelle eingehendere Analysen zahlreicher Beispiele mit Rücksicht auf die erörterten Fragen vorzunehmen; es wären auch wohl wenige Leser in der Lage, die Richtigkeit der Ergebnisse solcher Analysen praktisch zu erproben. Immerhin mag es am Platze sein, an ganz wenigen kürzeren Beispielen zu erläutern, wie die obengemachten Bemerkungen zu verstehen sind.

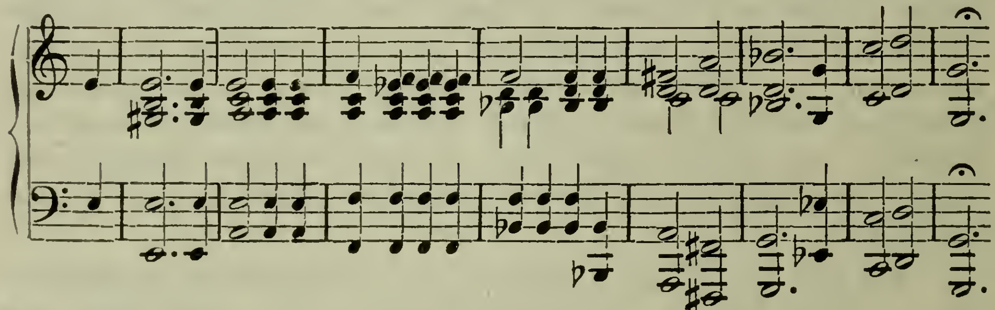
Nehmen wir z. B. den bekannten Beethoven'schen Hymnus: „Die Himmel rühmen des Ewigen Ehre“, der „majestätisch und erhaben“, in klarem *c*-dur anhebt wie folgt:



In dieser 8taktigen Periode hat offenbar das rein harmonische Prinzip des natürlichen Dur-Dreiklangs die Oberhand, wenn auch

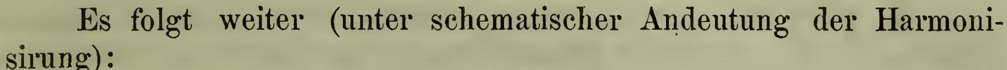
nicht die absolute Alleinherrschaft. Es tritt zunächst der reine $\overset{0}{c}$-dur-Dreiklang in gebrochener Form auf. Sodann erfolgt ein Aufschwung bei den Worten „des Ewigen Ehre"; hierbei verlockt schon das hohe *e* zu einem Uebergang aus der reinen nach der temperirten Stimmung, indem die natürliche Terz $\overset{-1}{e}$ melodisch etwas stumpf und der abwärts führende kleine Ganztonschritt $\overset{-1}{e}$—$\overset{0}{d}$ etwas matt erscheint. Immerhin mag hier der reinen Harmonie die Concession gemacht werden, dass die natürliche Terz $\overset{-1}{e}$ beibehalten wird; beim Spielen auf einer Orgel (bei sog. homogener Polyphonie) wäre z. B. das reine natürliche *e* der temperirten Terz vorzuziehen. Das harmonische $\overset{0}{c}$-dur ist weiter unanfechtbar, mit Ausnahme der Trübung durch den übermässigen Sextakkord im vorletzten Takt, wo das pythagoräische $\overset{0}{as}$ im Bass dem natürlichen $\overset{+1}{as}$ jedenfalls vorzuziehen ist. Nun folgt aber die nachstehende Periode:

ihn rühmt der Erdkreis, ihn preisen die Meere, vernimm, o Mensch, ihr göttlich Wort!



Mit der innern Ruhe ist es hier vorbei; es gibt sich hier unverkennbar ein energisches Drängen kund, das freilich weniger in der Melodie der Oberstimme als in der Modulation liegt. Hier ist die Herrschaft des natürlich-harmonischen Prinzips zu Ende. Schon der erste *c*-dur-Dreiklang macht bei weitem nicht in dem Maasse Anspruch auf absolute harmonische Reinheit aller seiner Intervalle, wie der ihm vorangehende *c*-dur-Akkord der ersten Periode; man kann ihn mit temperirter oder gar mit pythagoräischer Terz nehmen, und der unmittelbar nachfolgende *a*-moll-Dreiklang muss sogar mit temperirter oder pythagoräischer Terz genommen werden, wenn er den Eindruck von wirklichem Moll hervorrufen soll. Auch der Dominantseptakkord mit darauffolgendem *g*-moll-Dreiklang bei den Worten: „Vernimm, o Mensch" wird in pythagoräischer und selbst in temperirter Stimmung ausdrucksfähiger sein als in harmonischer.

Es folgt weiter (unter schematischer Andeutung der Harmonisirung):





Hier findet im Gegensatz zu dem vorhergehenden Moll-Abschluss ein Einlenken nach harmonischem *es*-dur statt: ein Ruhepunkt, der zur Intonation harmonisch reiner Intervalle einladet. Nach wenigen Takten folgt aber durch Vermittlung des Dominantseptakkords der *c*-moll-Dreiklang, mit pythagoräischer oder wenigstens temperirter Intonation, und endlich folgt der Uebergang nach der abschliessenden Periode, die genau denselben harmonischen Dur-Charakter hat wie die erste 8taktige *c*-dur-Periode. — Man sieht aus diesem einen Beispiele, wie der Charakter einer Komposition einen bestimmenden Einfluss auf deren künstlerische Intonation haben kann, und wie der wechselnde musikalische Ausdruck bald nach Seite der harmonischen bald nach der pythagoräischen Stimmung hindrängt.

Natürlich können alle diese feineren Abstufungen in praxi nur da in Betracht kommen, wo man nicht an eine feste Stimmung gebunden ist, also z. B. bei a capella-Chören und bei reiner Streichmusik. Glücklicherweise leistet aber die gleichschwebende Temperatur überall, wenn auch nicht Vollkommenes, so doch Befriedigendes, und wenn auch feinere Intonations-Schattirungen in diesem System unmöglich sind, so hat doch das Ohr die hochzuschätzende Fähigkeit, innerhalb enger Grenzen das Gehörte zu idealisiren und gewissermassen das zu hören, was es hören will.

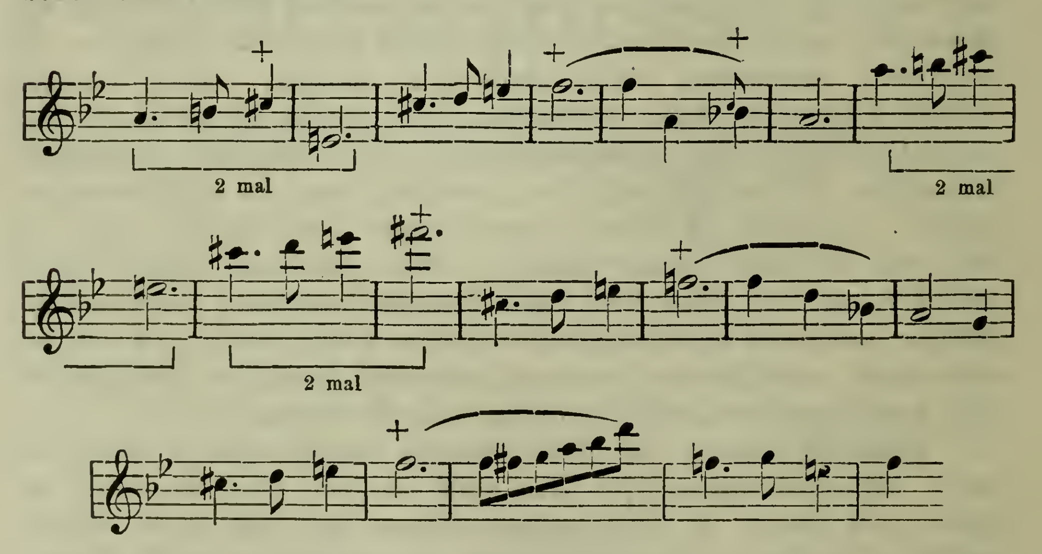
Es seien hier noch 2 Stellen erwähnt, welche deutlich erkennen lassen, wie die melodische Stimmführung unter Umständen entschieden pythagoräische Intonation verlangt.

Das erste Beispiel wird schon von Naumann (in seiner oben erwähnten Abhandlung) angeführt; es ist dem ersten Satze des Mozartschen *g*-moll-Streichquintetts entnommen und lautet, schematisch skizzirt:



Die erste Violine intonirt erst 2 mal *ges*, und so lange fühlt man sich noch in *b*-dur; im dritten Takt nimmt sie drängenden Charakter an, sie intonirt *fis* und strebt nach oben. Ein feinfühliger Musiker wird hier *fis* höher greifen als das vorhergehende *ges*, d. h. er wird nicht temperirte, sondern pythagoräische Intonation befolgen.

Wir fügen noch folgendes Beispiel aus dem 1. Satze des Brahmsschen *b*-dur-Sextetts bei:



Hier findet ein fortwährender Wechsel zwischen Dur und Moll statt, der scharfe Charakterisirung verlangt.

Ein feinfühliger 1. Geiger wird hier die charakteristischen Tonstufen unbewusst pythagoräisch nehmen und den Unterschied zwischen *cis* und *c*, zwischen *fis* und *f* deutlich kennzeichnen. (95″, Apotome.)

Diese wenigen Beispiele mögen wenigstens einen annähernden Begriff davon geben, wie die theoretischen Auseinandersetzungen zu verstehen sind. —

Im Allgemeinen kann man sagen, dass (unter übrigens gleichen Umständen) ein langsames gemessenes Tempo eine Abweichung vom temperirten nach dem harmonischen System begünstigen wird, da das Ohr bei langsamen, getragenen Sätzen vielmehr geneigt sein wird, auf die Reinheit der Akkorde zu achten, als bei einem bewegten Allegro.

Ausserdem kommt, wie bereits gelegentlich angedeutet wurde, nicht unwesentlich in Betracht, ob man es mit sog. „homogener“, oder mit „heterogener Polyphonie“ zu thun hat. Unter homogener Polyphonie versteht man eine Vielstimmigkeit, bei der alle Stimmen gleichartigen Klangcharakter haben, so dass sie leicht zu einem einheitlichen Ganzen verschmelzen. Z. B. wird man bei einem Harmonium, bei einem unbegleiteten Chor, bei einem Streichquartett, bei einem Quartett von Hörnern von homogener Polyphonie sprechen können. Heterogene Polyphonie ist dagegen Vielstimmigkeit, die sich durch ungleichartigen Klangcharakter der einzelnen Stimmen auszeichnet. Ein vollständiges Orchester ist ein heterogen polyphoner Apparat; das Zusammenspiel von Streichinstrumenten mit Klavier gehört ebenfalls zur heterogenen Polyphonie u. s. f. Homogene Polyphonie wird viel eher auf harmonische Reinheit Anspruch machen als heterogene.

Grössere Verschmelzungsfähigkeit bringt grössere Verschmelzungsbedürftigkeit mit sich. Die harmonischen Unreinheiten der temperirten und pythagoräischen Stimmung sind auf einem Harmoninm oder auf der Orgel zum Theil aus diesem Grunde leichter wahrzunehmen, als unter anderen Umständen. Von einem wohlgeschulten *a*-capella-Chor werden wir an passender Stelle harmonisch reine Dur-Dreiklänge erwarten dürfen, und sie werden ihre Wirkung nie verfehlen, wenn auch der Hörer sich nicht Rechenschaft davon ablegt, worauf der eigenartige Reiz eines vollendeten *a*-capella-Gesanges beruht. Den Leitern solcher Chöre fällt eine schwere Aufgabe zu; sie haben scharf über die Intonation zu wachen und vorzuschreiben, wo die temperirte Stimmung zu verlassen und durch eine vollkommenere Intonationsart zu ersetzen ist. Sie gleichen einsichtigen Führern, welche — um bei dem schon gebrauchten Bilde zu bleiben — eine Gesellschaft rüstiger Fussgänger auf einige Zeit von der grossen Heerstrasse abseits auf reizvolle Gebirgspfade führen können, ohne sie in die Gefahr zu bringen, zu verunglücken. — In langsamen

Sätzen eines Streichquartetts werden vier feinmusikalische Spieler öfter unbewusst auf harmonisch reines Dur einlenken, wenn sie auch dadurch zuweilen zu melodisch nicht ganz natürlichen Schritten gezwungen werden. Vier Spieler, von denen jeder für sich ganz sauber und nett spielt, sind oft nicht im Stande, einen langsamen Quartettsatz erträglich zu Gehör zu bringen; sie müssen sich erst die Fähigkeit aneignen, sich gegenseitig Concessionen zu machen und auf harmonisch reine Intervalle einzulenken, wo sie vielleicht, allein spielend, etwas anders greifen würden. Intonationsfreiheit muss stets mit Anpassungsfähigkeit verbunden sein. Der wahre Künstler wird überall, meist unbewusst, den richtigen Weg finden. —

Das Verdienst, die melodische Intonation von der harmonischen begrifflich scharf getrennt und in Wort und Schrift mit allem Nachdruck auf die Verschiedenheit dieser beiden Intonationsarten hingewiesen zu haben, gebührt Joachim Steiner in Wien, dessen schon erwähntes Buch: „Grundzüge einer neuen Musiktheorie“ (Wien, Hölder 1891) der Aufmerksamkeit aller gebildeten denkenden Musiker werth ist.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einem höchst bemerkenswerthen Ausspruch Vincenzo Galilei's (circa 1540—1600, Vater des berühmten Physikers und Astronomen Galileo Galilei), aus dessen „Discorso della musica antica e della moderna“ (Florenz 1581); er lautet in deutscher Uebersetzung folgendermassen:

> „Ich habe durch lange Beobachtung gefunden, dass die natürlichen Stimmen und die künstlichen Instrumente in der modernen Musikpraxis keine Art der antiken Diatonik in ihrer Einfachheit intoniren, sondern die Praktiker gebrauchen, ohne es zu wissen, alle drei verschiedenen zusammengemischt: nämlich das Incitato von Aristoxenos (die 12stufige gleichschwebende Temperatur), das älteste Diatono diatonico (das pythagoräische System), und das Syntono von Ptolemaeus (das natürlich-harmonische System) . . . .“

So war es also schon vor 300 Jahren, so ist es heute, und so wird es voraussichtlich immer bleiben. Diese Erkenntniss ist alt, sie verdient es aber, der Vergessenheit entrissen und ans Tageslicht gezogen zu werden. Alle 3 Stimmungssysteme sind lebensfähig; wenn irgendwo, so dürfte aber hier das Ovid'sche Wort: „Medio tutissimus ibis“ mit Rücksicht auf die gleichschwebende Temperatur zutreffend sein. —

Uebersicht des harmonischen Tonsystems.

(Alle Intervalle sind von $\overset{0}{c}$ aus gemessen, und in Tausendtheilen der Oktave ausgedrückt.)

-5	eis 345	his 930	fisis 515	cisis 100	gisis 685	disis 270	aisis 855	eisis 440	hisis 25	fisisis 610	cisisis 195	gisisis 780	disisis 365	aisisis 950	eisisis 535	hisisis 120	fisisisis 705	
-4	cis 23	gis 808	dis 193	ais 778	eis 363	his 948	fisis 533	cisis 118	gisis 703	disis 288	aisis 873	eisis 458	hisis 43	fisisis 628	cisisis 213	gisisis 798	disisis 383	aisisis 968
-3	e 286	h 871	fis 456	cis 41	gis 626	dis 211	ais 796	eis 381	his 966	fisis 551	cisis 136	gisis 721	disis 306	aisis 891	eisis 476	hisis 61	fisisis 646	
-2	c 964	g 549	d 134	a 719	e 304	h 889	fis 474	cis 59	gis 644	dis 229	ais 814	eis 399	his 984	fisis 569	cisis 154	gisis 739	disis 324	aisis 909
-1	es 227	b 812	f 397	c 982	g 567	d 152	a 737	e 322	h 907	fis 492	cis 77	gis 662	dis 247	ais 832	eis 417	his 2	fisis 587	
0	ces 905	ges 490	des 75	as 660	es 245	b 830	f 415	c 000	g 585	d 170	a 755	e 340	h 925	fis 510	cis 95	gis 680	dis 265	ais 850
+1	eses 168	bb 753	fes 338	ces 923	ges 508	des 93	as 678	es 263	b 848	f 433	c 18	g 603	d 188	a 773	e 358	h 943	fis 528	
+2	ceses 846	geses 431	deses 16	asas 601	eses 186	bb 771	fes 356	ces 941	ges 326	des 111	as 696	es 281	b 866	f 451	c 36	g 621	d 206	a 791
+3	eseses 109	bbb 694	feses 279	ceses 864	geses 449	deses 34	asas 619	eses 204	bb 789	fes 374	ces 959	ges 544	des 129	as 714	es 299	b 884	f 469	
+4	ceseses 787	geseses 372	deseses 957	asasas 542	eseses 127	bbb 712	feses 297	ceses 882	geses 467	deses 52	asas 637	eses 222	bb 807	fes 392	ces 977	ges 562	des 147	as 732

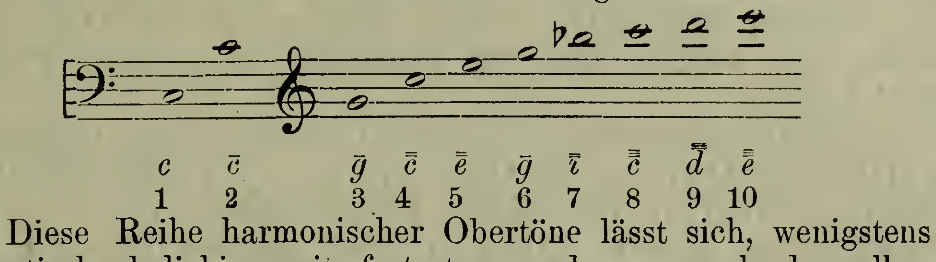
Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von der Klangfarbe und die musikalischen Instrumente.

55. Obertöne oder Partialtöne als Bestandtheile eines Klanges. Die Klangfarbe hängt von den Partialtönen ab. — Wir haben im vorigen Abschnitte den musikalischen Ton einzig und allein in Bezug auf seine hervorragendste Eigenschaft, die Tonhöhe, betrachtet. Es genügte deshalb, die Zahl der den Ton hervorbringenden Schwingungen in Betracht zu ziehen. Wenn wir jedoch tiefer in die Natur des musikalischen Tones eindringen und in das Wesen der Klangfarbe und der Stärke des Tones einen Einblick gewinnen wollen, so sind wir genöthigt, nicht nur die Zahl, sondern auch die Art der den musikalischen Ton erzeugenden Schwingungen einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Es ist daher unsere nächste Aufgabe, den musikalischen Ton einer Analyse zu unterwerfen, ihn in seine Bestandtheile zu zerlegen und diese Bestandtheile näher kennen zu lernen; und hieran wird sich nebenbei die umgekehrte Aufgabe schliessen, die aufgefundenen Bestandtheile womöglich wieder zu einem Ganzen zu vereinigen und damit den Beweis zu erbringen, dass wir die Natur des musikalischen Tones richtig erkannt haben.

Es ist eine sowohl dem Musiker als dem Physiker längst bekannte Thatsache, dass sich bei genauerem Aufmerken die von den üblichen musikalischen Instrumenten oder von einer Singstimme hervorgebrachten Töne als etwas Zusammengesetztes erweisen, das einer Zerlegung in einfachere Bestandtheile fähig ist. Neben dem mit bewusster Absicht hervorgebrachten Grundton lässt sich bei gehörig angespannter Aufmerksamkeit eine

ganze, mehr oder weniger vollständige Reihe sogenannter harmonischer Obertöne unterscheiden, deren Höhen zu derjenigen des Grundtons in einfachen Beziehungen stehen. Ist der Grundton z. B. das sog. „kleine“ *c*, so ist die vollständige Reihe der harmonischen Obertöne die folgende:



Diese Reihe harmonischer Obertöne lässt sich, wenigstens theoretisch, beliebig weit fortsetzen und zwar nach demselben Bildungsgesetze, das oben durch die unter den betreffenden Tönen stehenden Zahlen angedeutet ist.

In derselben Zeit nämlich, innerhalb deren der Grundton 1 Schwingung macht, macht der nächste Oberton deren 2, der nachfolgende 3 u. s. f.; d. h. die relativen Tonhöhen der einzelnen harmonischen Obertöne in Bezug auf den Grundton werden durch die Reihe der natürlichen ganzen Zahlen
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...
dargestellt. Alle in der Musik zur Anwendung kommenden, von einem musikalischen Instrument oder einer Singstimme hervorgebrachten Töne enthalten neben dem Grundton (1) eine grössere oder geringere Zahl von Obertönen (2, 3, 4, 5, 6, 7, ...). Jeder musikalische Ton erweist sich also eigentlich als ein Zusammenklang von einfacheren Tönen, die unter gewöhnlichen Umständen freilich zu einem einheitlichen Ganzen verschmolzen erscheinen, die aber doch unter gewissen Bedingungen als einzelne Bestandtheile erkannt werden können. In physikalischem Sinne bezeichnet man daher auch nach Helmholtz einen musikalischen Ton als Klang, während man die Bezeichnung „Ton“ ausschliesslich auf die einfacheren Bestandtheile anwendet, aus denen sich ein Klang zusammensetzt. Da fast alle musikalisch verwendbaren Töne, wie wir sehen werden, sich auch als Klänge in Helmholtz'schem Sinne erweisen, so könnte man geradezu die Bezeichnungen „musikalischer Ton“ und „Klang“ in demselben Sinne verwenden. Dadurch würde man sich enger an die Sprache der Musiker anschliessen, müsste dabei dann aber scharf unterscheiden zwischen einem „musikalischen“ Ton und einem „Ton“ schlechthin, indem man diesen

als das Einfache, jenen als das Zusammengesetzte auffassen würde.

Die einzelnen Töne, aus denen sich ein Klang oder ein musikalischer Ton zusammensetzt, nennt man *Obertöne*, *Theiltöne* oder *Partialtöne* (auch Aliquottöne).

Erster Partialton eines Klanges ist der *Grundton* selbst, auf welchen man die Tonhöhen der einzelnen Partialtöne bezieht.

Zweiter Partialton ist die *Oktave* (2) des Grundtons, *dritter* die *Quinte* der Oktave ($3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$) oder die *Duodecime*, *vierter* die nächst höhere Oktave ($4 = 2 \cdot 2$), *fünfter* die *grosse Oberterz* der letzteren ($5 = 4 \cdot \frac{5}{4}$), und *sechster* die *Quinte* der zweithöhern Oktave des Grundtons ($6 = 4 \cdot \frac{3}{2}$). Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in den 6 ersten Partialtönen eines Klanges der vollständige reine Durdreiklang enthalten ist. Die Partialtöne 4, 5, 6 bilden einen reinen Durdreiklang in sog. enger Lage. Der Partialton 4 ist der Grundton, der Partialton $5 = 4 \cdot \frac{5}{4}$ die grosse Terz und der Partialton $6 = 4 \cdot \frac{3}{2}$ die Quinte dieses Dreiklanges. Als Grundtöne desselben Dreiklanges können (im Sinne der Harmonielehre) ausser dem Partialtone 4 die tieferen Oktaven desselben, d. h. die Partialtöne 1 und 2, oder auch die höheren Partialtöne $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, u. s. f. aufgefasst werden.

Ausser dem reinen Durdreiklange geben die 6 ersten Partialtöne alle in der Musik als „consonirend" bezeichneten Intervalle (Oktave 2 : 1, Quinte 3 : 2, Quarte 4 : 3, grosse Sexte 5 : 3, grosse Terz 5 : 4, kleine Terz 6 : 5); nur die kleine Sexte 8 : 5 fehlt, sie findet sich jedoch auch in der Reihe der Partialtöne, wenn wir mit Uebergehung des siebenten zum achten Partialton schreiten.

Der erste der harmonischen Obertöne, der uns etwas fremdartig berührt und nicht völlig in unser Harmoniesystem passen will, ist der 7. Partialton. Ist, wie im obigen Notenbeispiel, der Grundton oder 1. Partialton das kleine *c*, so ist der siebente etwas tiefer als das zweigestrichene $\bar{\bar{b}}$; er wird (nach Kirnberger) häufig mit dem Buchstaben *i* bezeichnet, in unserem Falle also genauer mit $\bar{\bar{i}}$. Vom Standpunkte des 4. Partialtons $\bar{\bar{c}}$ aus betrachtet ist dieser Ton etwas tiefer als die engere kleine Septime (s. pag. 64). (Das Intervall $\bar{\bar{c}}\ \bar{\bar{i}}$ ist nämlich $= \frac{7}{4}$, das

Intervall $\bar{\bar{c}}\ \bar{\bar{\bar{b}}}$ als engere kleine Septime $= \frac{16}{9}$, also um $\frac{16}{9} : \frac{7}{4}$ oder $\frac{64}{63}$ grösser als ersteres.) Der Ton i, oder überhaupt der 7. Partialton wird daher die natürliche Septime genannt, „natürlich“ aus dem Grunde, weil sie durch die Natur als 7. Partialton eines Klanges gegeben ist.

Beim Horn z. B. entsprechen den harmonischen Obertönen die sog. Naturtöne; sie können bis zum 16. Partialton hinauf durch passendes Anblasen erzeugt werden und zeichnen sich vor den andern Tönen durch helleren Klangcharakter aus. Die Naturtöne sind zwar selbst noch keine einfachen Töne; aber ihre Uebereinstimmung mit den Tönen der harmonischen Obertonreihe weist doch deutlich auf den Zusammenhang hin, der zwischen den Naturtönen einerseits und den einzelnen Partialtönen des Grundklanges andrerseits besteht.

Aehnlich verhält es sich mit den sog. Flageolet-Tönen der Streichinstrumente. Wenn man den Finger lose auf der Mitte der Saite aufsetzt, so hört man beim Anstreichen die höhere Oktave (2) des Grundtons, wobei jede der beiden Hälften der Saite Schwingungen ausführt. Setzt man den Finger um $\frac{1}{3}$ der ganzen Saitenlänge vom Sattel entfernt lose auf, so hört man die Duodecime 3, entsprechend dem 3. Partialton des Grundklanges der Saite; mit genau demselben Erfolge hätte man den Finger auf den Theilpunkt $\frac{2}{3}$ der ganzen Saitenlänge (vom Sattel aus gemessen) lose aufsetzen können. In diesen beiden Fällen theilt sich die Saite in 3 unter sich gleiche schwingende Unterabtheilungen.

Ueberhaupt ergibt sich beim losen Aufsetzen eines Fingers auf die (stets vom Sattel aus gemessenen) Theilpunkte

$\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ der Saitenlänge der 3. Partialton (Duodecime)
$\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ „ der 4. Partialton (zweite Oktave)
$\frac{1}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ „ der 5. Partialton (gr. Terz d. 4. Partialt.)
$\frac{1}{6}$ oder $\frac{5}{6}$ „ der 6. Partialton (Quinte d. 4. Partialtons)
$\frac{1}{7}$ oder $\frac{6}{7}$ „ der 7. Partialton (die natürl. Septime)
u. s. f.

Man kann auf diese Weise bei vorsichtigem und passendem Anstreichen leicht die den 10 oder 12 ersten Partialtönen entsprechenden Töne erzeugen. Wenn man während des Anstreichens den Finger lose über die Saite gleiten lässt, so wird man successive die ganze Reihe der harmonischen Obertöne hören bis zu einer von der Länge und der Steifigkeit der Saite abhängigen Grenze. In welcher Weise die Saite in den einzelnen oben angeführten Fällen schwingt und sich in schwingende Unterabtheilungen theilt, ist in den folgenden Figuren schematisch angedeutet. Die ausgezogene Linie gibt

die Lage der Saite in einem Momente an, in welchem ihre Punkte die äusserste Entfernung von der Gleichgewichtslage erreicht haben; die punktirte Linie gibt die entgegengesetzte äusserste Lage an. Zwischen diesen beiden äussersten Lagen schwingt die Saite hin und her, in je zwei benachbarten schwingenden Unterabtheilungen in entgegengesetzter Richtung. Diejenigen Punkte, in welchen sich die ausgezogene und die punktirte Linie schneiden, bleiben während der ganzen Dauer der Schwingung in Ruhe; sie werden **Knotenpunkte** genannt (α; β_1, β_2; γ_1, γ_2, γ_3; . . .). Je zwei benachbarte Unterabtheilungen sind durch einen Knotenpunkt von einander getrennt. In der Mitte zwischen je zwei Knotenpunkten finden sich sog. **Schwingungsbäuche** (λ; μ_1, μ_2; ν_1, ν_2, ν_3; . . .), welche die grösste hin- und hergehende Bewegung machen. Knotenpunkte und Schwingungsbäuche können durch aufgesetzte kleine Papierreiter kenntlich gemacht werden; an den Knotenpunkten bleiben die Reiter liegen, an den Schwingungsbäuchen werden sie abgeworfen, wenn die Saite schwingt.

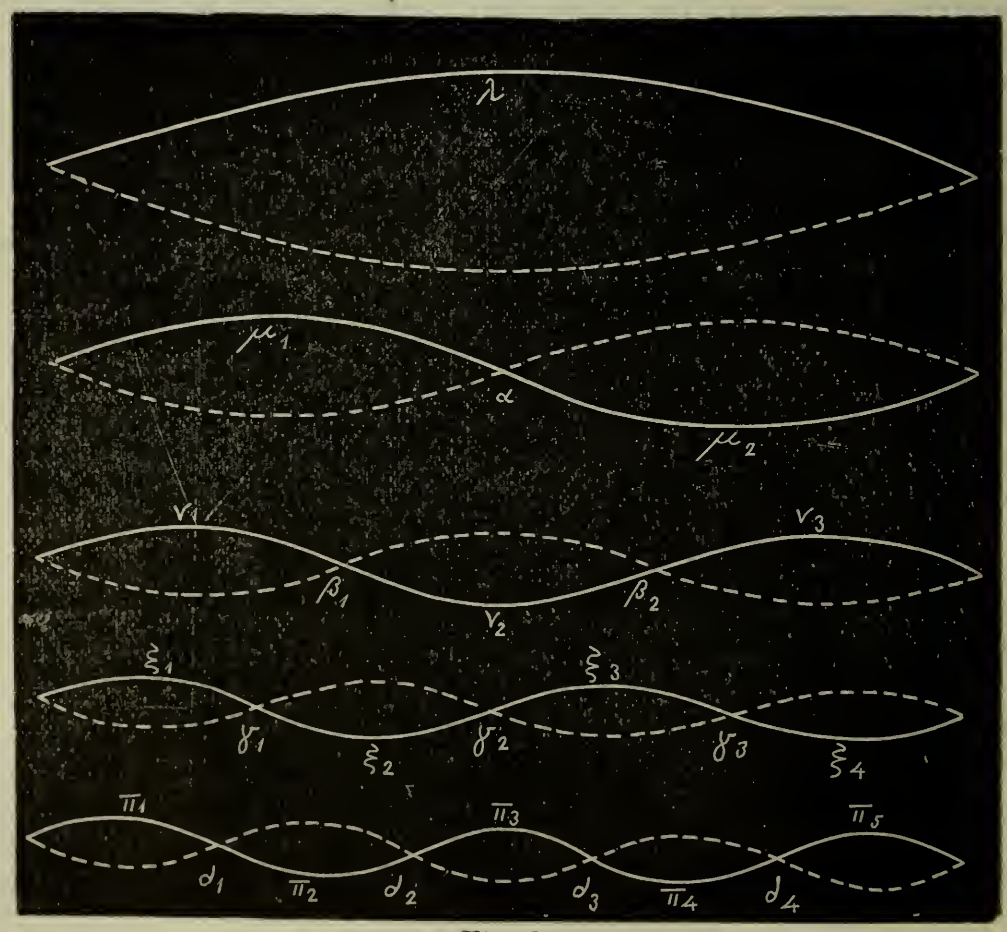


Fig. 2.

Die erste Figur entspricht dem Grundton, die zweite der Oktave, die dritte der Duodecime, die vierte der 2. Oktave, die fünfte der nächst höheren grossen Terz. Bei der Duodecime ist es gleichgültig, ob man den Finger auf β_1 oder auf β_2 aufsetzt; bei der grossen Terz kann man den Finger mit demselben Erfolge auf jeden der Theilpunkte δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 setzen. —

Es ist ausdrücklich zu betonen, dass das Aufsetzen des Fingers in einem Knotenpunkt lose zu geschehen hat; wird der Finger fest aufgesetzt, so ändert sich der Sachverhalt wesentlich, indem das zwischen dem aufgesetzten Finger und dem Sattel liegende Stück der Saite nun an den Schwingungen der Saite keinen Antheil mehr nimmt und nur der übrige Theil der Saite schwingt.

Aehnlich wie die Naturtöne beim Horn, so sind auch die sog. Flageolet-Töne der Streichinstrumente (und der Saiteninstrumente überhaupt) im Allgemeinen noch keine eigentlichen einfachen Töne. Dementsprechend sind auch die den einzelnen Flageolet-Tönen entsprechenden Schwingungsfiguren der Saite nur in Bezug auf die Art der Theilung der Saite und die Lage der Knotenpunkte in Uebereinstimmung mit den obigen Figuren, denen also im Wesentlichen eine rein schematische Bedeutung zukommt. Aber auch hier ist es sehr bemerkenswerth, dass die Töne, welche die schwingende Saite durch die oben gekennzeichneten verschiedenen Arten ihrer Schwingungen zu geben vermag, mit der Reihe der harmonischen Obertöne des Grundtons der Saite genau übereinstimmen.

Es ist nun die Aufgabe des Nächstfolgenden, nachzuweisen, in welchem Zusammenhange der Klangcharakter oder die Klangfarbe eines musikalischen Tones mit der Zahl und Stärke der in ihm enthaltenen Obertöne steht. Das Verdienst, diesen Zusammenhang erkannt und ins richtige Licht gesetzt zu haben, gebührt Helmholtz. Vor Helmholtz betrachtete man die Obertöne mehr als ein physikalisches Curiosum, ohne deren wirkliche Bedeutung zu ahnen. Helmholtz erkannte die Obertöne als grundlegende Elemente der Klangfarbe eines musikalischen Tones und baute auf ihnen die Grundzüge seiner physikalisch-physiologischen Musiktheorie auf. —

Bevor wir uns an den Nachweis des erwähnten Zusammenhanges zwischen Obertönen und Klangfarbe wagen dürfen, müssen wir jedoch im Stande sein, Obertöne als solche zu erkennen, einen Klang in seine Obertöne zu zerlegen. Wir müssen uns deshalb mit den wichtigsten Methoden der Beobachtung der Obertöne vertraut machen.

56. Analyse der Klänge. Methoden der Beobachtung von Obertönen. Mittönen, Resonanz. Membranen und Resonatoren. — Die nächstliegende Methode der Beobachtung von Obertönen besteht darin, einen gegebenen Klang mit gespannter Aufmerksamkeit auf seine Partialtöne zu untersuchen. Dies erscheint freilich als sehr einfach, ist aber durchaus nicht leicht, und das ungeübte Ohr bedarf zunächst einiger Unterstützung, um zum Ziele zu gelangen.

Man schlage auf dem Klavier z. B. das kleine *f* an, dessen dritter Partialton das zweigestrichene $\bar{\bar{c}}$ ist. Man lasse die Taste niedergedrückt, so dass der angeschlagene Ton ausklingen kann; dann wird es einem an die Beobachtung der Obertöne gewöhnten Ohre gelingen, das $\bar{\bar{c}}$ als Partialton aus dem Klange des angeschlagenen *f* herauszuhören, einem ungeübten Ohre aber vielleicht nur dann, wenn das angeschlagene *f* am Verklingen ist, wobei die Obertöne des *f* etwas stärker hervorzutreten pflegen. Sicher wird dieser Versuch auch dem ungeübten Beobachter dann gelingen, wenn man zuerst das $\bar{\bar{c}}$ auf dem Klavier angibt, die niedergedrückte Taste loslässt, so dass das $\bar{\bar{c}}$ erlischt, und gleichzeitig stark das *f* anschlägt. Dann wird man in dem Klange des *f* deutlich das $\bar{\bar{c}}$ hören. Da das direkt angeschlagene $\bar{\bar{c}}$ wegen des Loslassens der entsprechenden Taste erloschen sein muss, so kann das $\bar{\bar{c}}$, das man noch hört, nur aus dem Klange des *f* stammen. Da man jedoch bei diesem Versuche vermuthen könnte, das Hören des dritten Partialtons $\bar{\bar{c}}$ beruhe nur auf Einbildung, weil man vorher denselben Ton einzeln gehört habe, so kann man den Versuch in der Weise vornehmen, dass man statt des $\bar{\bar{c}}$ das $\bar{\bar{a}}$ anschlägt und hernach unter Loslassen der Taste $\bar{\bar{a}}$ das *f* stark anschlägt. $\bar{\bar{a}}$ ist 5. Partialton von *f*; man wird nun aus dem Klange des *f* das $\bar{\bar{a}}$ heraushören, aber dieses $\bar{\bar{a}}$ wird nun etwas tiefer sein als das direkt angeschlagene $\bar{\bar{a}}$. Diese auffallende Erscheinung ist sehr charakteristisch und für den Versuch entscheidend. Sie rührt daher, dass das im Klange von *f* gehörte $\bar{\bar{a}}$ die natürliche grosse Terz von *f* ist, während das angeschlagene $\bar{\bar{a}}$ die temperirte grosse Terz von *f* ist. Die temperirte grosse Terz ist aber, wie wir wissen, höher als die reine; daher die Differenz zwischen dem direkt angeschlagenen $\bar{\bar{a}}$ und dem 5. Partialton von *f*. Dieser Versuch beweist schlagend, dass von einer Sinnestäuschung hier nicht die Rede sein kann, indem das eine $\bar{\bar{a}}$ nicht als Fortsetzung des andern gelten kann. Es muss dabei jedoch vorausgesetzt werden, dass die temperirte

Stimmung des betreffenden Klaviers eine wirklich gleichschwebende sei.

Durch Uebung lässt sich die Fähigkeit, Obertöne mit unbewaffnetem Ohre zu hören, ziemlich weit entwickeln. G. Engel berichtet in seiner Abhandlung über „die Bedeutung der Zahlenverhältnisse für die Tonempfindung“ (Dresden 1892, pag. 15), dass er erst Mühe hatte, sich die Fähigkeit des direkten Hörens der Obertöne bei Gesangstönen anzueignen, dann aber die erlangte Fähigkeit sich wieder abgewöhnen musste, weil sie ihn in seiner eigentlichen Berufsthätigkeit als Gesanglehrer störte.

Die zuverlässigsten Methoden zur Beobachtung von Obertönen beruhen auf einer Erscheinung, welche man als „Mittönen oder auch als Resonanz“ bezeichnet. Das Phänomen des Mittönens besteht darin, dass ein Körper, der fähig ist, regelmässige Schwingungen auszuführen und dadurch einen Klang zu erzeugen, zum Tönen angeregt wird, wenn in seiner Nähe ein Ton von übereinstimmender Höhe angegeben wird. — Wenn man z. B. irgend eine Taste des Klaviers leise niederdrückt, so dass der betreffende Ton nicht erklingt, sondern nur die Dämpfung aufgehoben wird, so wird die von der Dämpfung befreite Klaviersaite deutlich hörbar erklingen, sobald man den ihr entsprechenden Ton mit lauter Stimme in das Klavier hinein singt. Das Fortklingen der Klaviersaite hört sofort auf, sobald man durch Loslassen der Taste die Dämpfung in Funktion treten lässt; damit ist bewiesen, dass es wirklich die betreffende Klaviersaite war, welche durch den gesungenen Ton zum Erklingen gebracht wurde.

Wenn man ferner auf der Violine das $\bar{\bar{e}}$ (z. B. mit dem 4. Finger) auf der *a*-Saite greift und kräftig anstreicht, so wird die leere *e*-Saite sehr merkbar mitklingen, vorausgesetzt, dass das gegriffene $\bar{\bar{e}}$ mit dem $\bar{\bar{e}}$ der leeren Saite genau übereinstimmte.

Aehnliche Beispiele wird ein aufmerksamer Beobachter leicht in grosser Zahl auffinden.

Am auffallendsten lässt sich die Erscheinung des Mittönens mit Hülfe von Stimmgabeln demonstriren. Man nehme zwei genau gleich gestimmte Stimmgabeln und befestige jede auf einem passend abgestimmten Resonanzkästchen in der Weise wie es die folgende Figur zeigt:

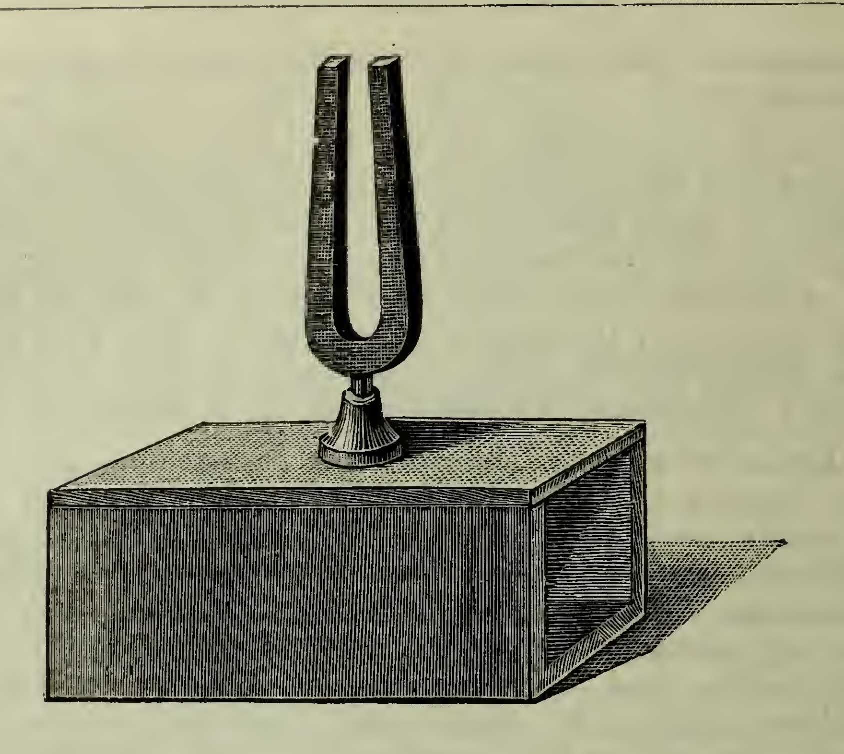


Fig. 3.

Wenn man die eine der beiden Stimmgabeln mit einem Violinbogen anstreicht, so fängt die andere auch an zu tönen, und sie setzt ihre Schwingungen selbst dann noch eine Zeit lang fort, wenn man die Schwingungen der angestrichenen Stimmgabel mit der Hand dämpft.

Vergleicht man die beiden eben angeführten Versuche, so ergibt sich ein bemerkenswerther Unterschied zwischen dem Verhalten von Saiten und demjenigen von Stimmgabeln.

Der Versuch mit der mitklingenden Saite gelingt auch dann, wenn der erregende Ton nur annähernd gleich hoch ist, wie der Eigenton der Saite, allerdings um so weniger, je grösser der Unterschied der beiden Töne ist. Die mitklingende Saite verklingt schon kurz nach Erlöschen des erregenden Tones. Bei der Stimmgabel dagegen gelingt der Versuch nur bei genauer Uebereinstimmung des erregenden Tones mit dem zu erregenden. Die mittönende Stimmgabel tönt aber auch dann noch fort, wenn der erregende Ton schon erloschen ist.

Ueberhaupt werden leichte Körper von geringer Masse wie z. B. gespannte Saiten und Membranen viel leichter zum Mitschwingen gebracht als schwere von grosser Masse; ihre Schwingungen erlöschen aber auch sehr schnell. Stimmgabeln,

Platten und Glocken dagegen, also Körper von bedeutender Masse, werden nur durch andauernde Schwingungen von namhafter Stärke und genau übereinstimmender Schwingungszahl zum Mittönen gebracht, behalten aber dann auch ihren Zustand längere Zeit bei.

Die Erscheinung des Mittönens wird von Helmholtz dem Verständniss näher gebracht, indem er auf die Art aufmerksam macht, in welcher schwere Kirchenglocken angeläutet werden. Der erste Zug am Glockenseil bringt die schwere Glocke kaum merklich aus ihrer Gleichgewichtslage, immerhin muss die Glocke aber in Folge dieses Zuges eine, wenn auch nur kleine hin- und hergehende Bewegung machen. Erfolgt nun der zweite Zug am Glockenseil in dem Augenblicke, wo die Glocke ihre erste hin- und hergehende Bewegung vollendet hat und der Hebel, an dem das Seil befestigt ist, somit seine höchste Stellung erreicht hat, so addirt sich die Wirkung des zweiten Zuges zu derjenigen des ersten, und die zweite hin- und hergehende Bewegung wird schon etwas merklicher werden als die erste. Fährt man genau in derselben Weise weiter, indem man in gleichen Zeitabschnitten, jeweilen nach Vollendung einer hin- und hergehenden Bewegung der Glocke, einen Zug am Glockenseil ausübt, so summiren sich alle diese Wirkungen und die Bewegung der Glocke wird schliesslich so gross, dass der Klöppel an die Glocke schlägt und dieselbe zum Tönen bringt. Es ist beim Anläuten wesentlich, dass die Züge am Glockenseil in einem ganz bestimmten Tempo erfolgen, nach jeder hin- und hergehenden Bewegung der Glocke ein Zug.

Die Zahl der Züge in einer bestimmten Zeit muss mit der Zahl der hin- und hergehenden Bewegungen der Glocke in derselben Zeit genau übereinstimmen. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann es bei hinreichender Ausdauer selbst einem Knaben gelingen, eine schwere Kirchenglocke anzuläuten, während sich bei Missachtung dieser Regel selbst der kräftigste Mann vergeblich bemühen wird, zum Ziele zu gelangen.

Vollkommen analog verhält es sich mit der Art und Weise, wie sich die Schwingungen des tonerregenden Körpers durch Vermittlung der Luft auf den mittönenden übertragen. Die einzelnen Impulse der Luft sind nur schwach, sie erfolgen aber in genau demselben Tempo, das den eigenen Schwingungen des mittönenden Körpers entspricht, ihre Wirkungen summiren sich daher, und so gelingt es durch blosse Vermittlung der Luft, selbst auf nennenswerthe Entfernung hin, sogar einen so massiven Körper wie eine

Stimmgabel in Schwingung zu versetzen. Wie die Glocke ihre Schwingungen noch eine Zeitlang fortsetzt, nachdem man aufgehört hat, am Seil zu ziehen, so tönt die Stimmgabel noch eine Zeit lang fort, nachdem der erregende Ton verklungen ist.

Je kleiner und leichter eine Glocke ist, um so weniger scharf wird man beim Anläuten die oben gegebene Regel zu beobachten haben. Dieser Fall entspricht dem Mittönen der leichteren Saiten und Membranen.

Gehen wir noch um einen Schritt weiter, indem wir den extremen Fall annehmen, dass ein kräftiger Mann ein aufgehängtes kleines Glöckchen durch Ziehen anläute, so ist dieser Mann offenbar an keine Bewegungsperiode mehr gebunden; er kann nach Belieben ziehen, wann er will, das Glöckchen wird immer erklingen. Auch diesem Falle entsprechen Analoga. Eine massive Stimmgabel, an deren einer Zinke eine nicht zu straff gespannte dünne Saite befestigt ist, wird, in starke Schwingungen versetzt, die Saite zwingen, diese Schwingungen mitzumachen, auch wenn der Eigenton der Saite nicht mit dem Stimmgabelton übereinstimmt.

In solchen Fällen spricht man wohl auch von „erzwungenen“ Schwingungen.

Von dieser Art sind z. B. die durch Töne veranlassten Schwingungen des Trommelfells im Ohre. Vermöge seiner Spannung würde dem Trommelfell streng genommen ein bestimmter Eigenton zukommen, allein dieser erlischt, wenn er überhaupt zu Stande kommt, bald, und die auf die feine Membran einwirkenden Schallwellen zwingen dieselbe, sich ihrer Schwingungsperiode anzupassen.

Gespannte Membranen sind ebenso wie gespannte Saiten fähig, in Schwingung zu gerathen und Töne zu erzeugen. Wie eine Saite, so ist auch eine Membran im Stande, sich auf verschiedene Arten in schwingende Unterabtheilungen zu theilen, und dementsprechend verschiedene Töne zu geben, welche man die „Eigentöne“ der Membran nennt. Ein Unterschied zwischen den Eigentönen von Membranen und Saiten besteht nur insofern, als die Eigentöne der Saiten mit den harmonischen Obertönen des Grundklanges der Saite übereinstimmen, während dies bei gespannten Membranen im Allgemeinen nicht der Fall ist. Die Schwingungen von Membranen haben den Vortheil, dass ihre Wirkungen sichtbar gemacht werden können, indem man auf die Membran feinen Sand aufstreut. Je nach den verschiedenen Schwingungsarten der Membran ordnet sich der Sand in verschiedener Weise in sog. Knotenlinien an, d. h. in Linien,

welche bei der betreffenden Schwingungsart in Ruhe bleiben, ähnlich wie die Knotenpunkte bei schwingenden Saiten.

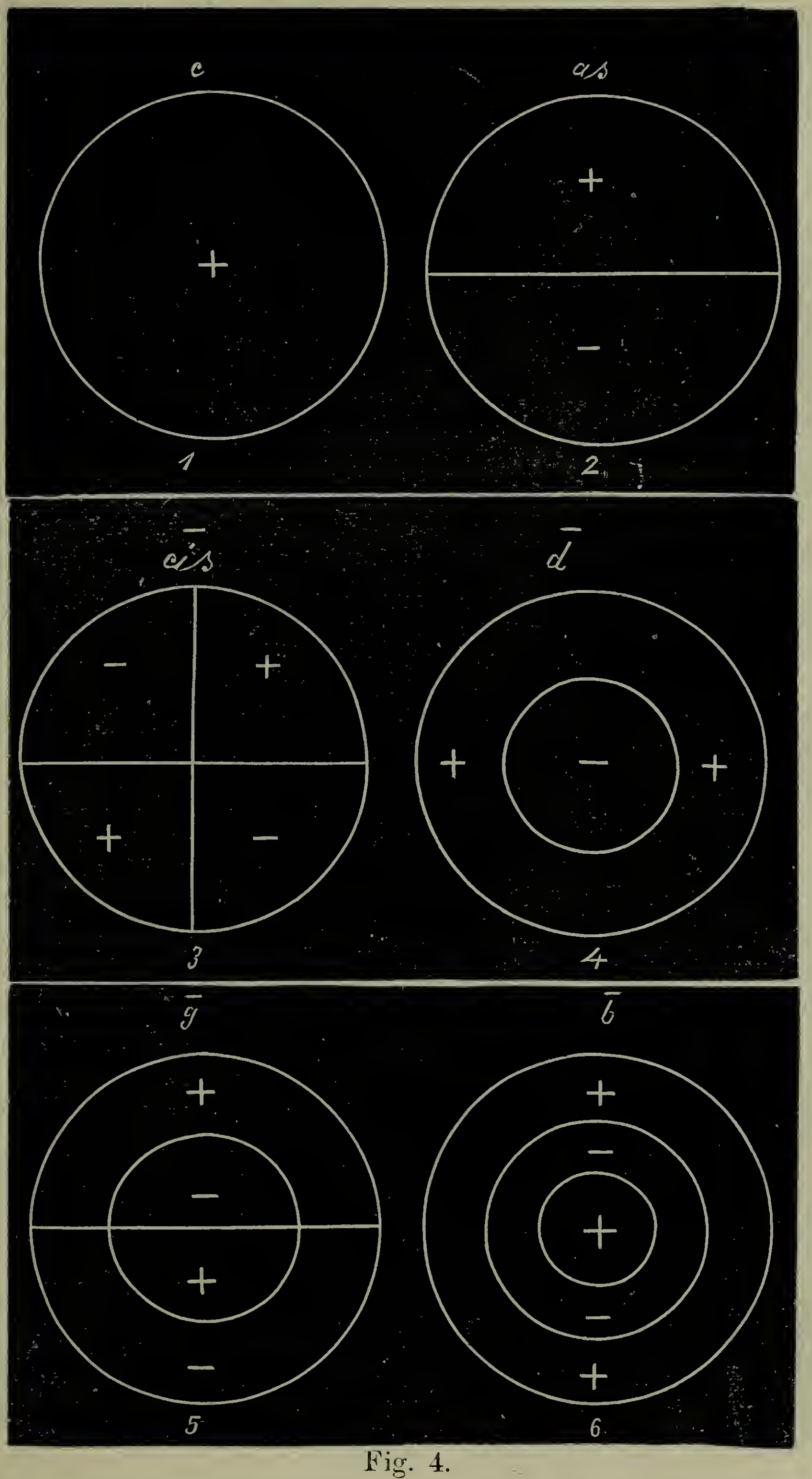


Fig. 4.

Die vorstehenden Figuren lassen die Lage der Knotenlinien bei einer über einen kreisförmigen Rahmen gleichmässig gespannten Membran erkennen, wenn dieselbe die einfacheren möglichen Schwingungsarten ausführt.

In je 2 benachbarten, durch Knotenlinien von einander getrennten Abtheilungen der Membran ist der Schwingungszustand ein entgegengesetzter, in dem Sinne, dass die mit + bezeichneten Theile aufwärts schwingen, während die mit — bezeichneten Theile sich gleichzeitig abwärts bewegen, und umgekehrt.

Bei der Schwingungsfigur 1 schwingt die Membran als Ganzes ohne Unterabtheilungen, nur der Rand selbst muss eine Knotenlinie sein, da die Membran über einen festen Rahmen ausgespannt ist. In diesem Falle gibt die Membran ihren tiefsten Eigenton, der je nach der Grösse, der Spannung und der materiellen Beschaffenheit der Membran ein anderer sein kann. Nehmen wir z. B. an, die Membran gebe als tiefsten Eigenton das *c*. Dann entsprechen den Figuren 2, 3, 4, 5, 6 beziehungsweise die Eigentöne: *as*, $\overline{cis}$, $\bar{d}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$ (annähernd).

Nehmen wir nun an, über die Membran sei gleichmässig feiner Sand gestreut und es werde in unmittelbarer Nähe kräftig und anhaltend ein Ton angegeben, der dem tiefsten Eigentone der Membran entspricht, in unserem Falle also *c*. Dann tönt die Membran mit, entsprechend der Schwingungsfigur 1, d. h. der Sand sammelt sich am Rande der Membran an. Lässt man statt *c* den nächst höheren Eigenton *as* der Membran erklingen, so ordnet sich der Sand entsprechend der Schwingungsfigur 2 in einem Durchmesser an. Ueberhaupt lässt sich jede der obigen Schwingungsfiguren dadurch erzeugen, dass man den entsprechenden Eigenton der Membran in der Nähe kräftig und andauernd erklingen und direkt auf die Membran einwirken lässt*).

Sehr viel empfindlicher als die Membranen und leichter zum Mittönen zu bringen sind Luftsäulen, die in Hohlräume eingeschlossen sind. Man nehme z. B. eine kleine Flasche mit engem Hals und lasse quer über die Oeffnung einen Luftstrom

*) Die Schwingungsfiguren schwingender Membranen und Platten wurden von Chladni, dem Begründer der modernen experimentellen Akustik (1756 Wittenberg — 1827 Breslau), sehr eingehend studirt; sie sind bekannt unter dem Namen der Chladni'schen Klangfiguren. Das Hauptwerk Chladni's ist seine im Jahre 1802 bei Breitkopf und Härtel in Leipzig erschienene „Akustik“.

streichen, d. h. man bringe die in der Flasche eingeschlossene Luft durch Anblasen zum Tönen. Dann findet man den der Flasche zukommenden Eigenton.

Hält man die Zinken einer Stimmgabel, welche angeschlagen denselben Ton gibt, über die Mündung der Flasche, so wird der Stimmgabelton durch das Mitschwingen der Luft in der Flasche, durch Resonanz bedeutend verstärkt. Der Eigenton der Flasche lässt sich durch Eingiessen von Wasser erhöhen und dadurch innerhalb gewisser Grenzen dem Tone einer gegebenen Stimmgabel anpassen, wodurch der Versuch Jedem ermöglicht wird, der über eine Flasche und eine Stimmgabel verfügt.

Auf diesem Prinzipe beruht die Anwendung der von Helmholtz konstruirten sog. Resonatoren, d. h. metallener oder gläserner Hohlkugeln oder Röhren mit 2 Oeffnungen von der beistehend abgebildeten Form.

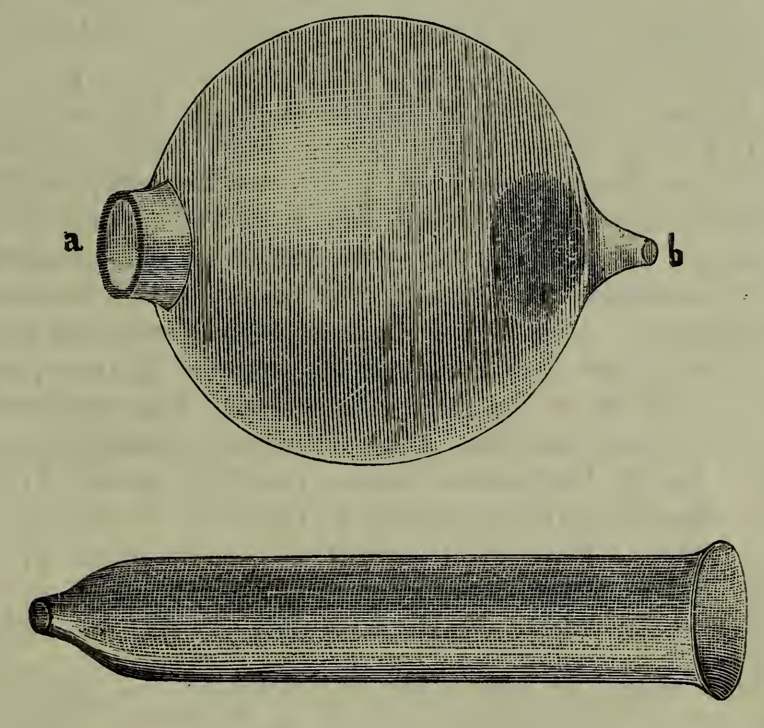


Fig. 5.

Die Ränder der Oeffnung a sind scharf abgeschnitten; die Oeffnung b ist so geformt, dass sie beim Einsetzen ins Ohr den Gehörgang möglichst eng abschliesst. Einem solchen Resonator entsprechen, ähnlich wie einer Membran, bestimmte Eigentöne, von denen der tiefste am leichtesten und kräftigsten

anspricht und durch Mittönen am leichtesten hervorzurufen ist. Die andern Eigentöne sind alle viel höher und schwächer*).

Wenn man nun einen solchen Resonator ans Ohr setzt und irgend eine Reihe von musikalischen Tönen spielen oder singen lässt, während man das andere Ohr verschliesst, so wird jedesmal die Luft im Resonator in Schwingungen gerathen, sobald der mit dem Eigentone des Resonators übereinstimmende Ton erklingt. Aus einer ganzen Klangmasse wird man gerade diesen einzelnen Ton sehr stark, fast gellend hervortreten hören, vorausgesetzt, dass er eben im Gesammtklange vorhanden war. Dagegen hört man alle andern Töne verhältnissmässig nur schwach, da sie die Luft im Resonator nicht in Mitschwingung zu setzen vermögen. Das Ansetzen eines Resonators an das Ohr entscheidet darüber, ob der diesem Resonator entsprechende Ton in einer Klangmasse enthalten ist oder nicht.

Es liegt nun auf der Hand, in welcher Weise Membranen und Resonatoren nicht nur zur Analyse von Klanggemischen, sondern von einzelnen musikalischen Tönen verwendet werden können. Haben wir nämlich einen Resonator, der z. B. auf den Ton $\bar{a}$ abgestimmt ist, so wird nicht nur der Ton $\bar{a}$ die Luft im Resonator zum Mittönen bringen, sondern jeder musikalische Ton, in welchem das $\bar{a}$ als Oberton oder Partialton enthalten ist. Nicht nur der Grundton, sondern jeder Oberton eines Klanges kann einen gleichgestimmten Resonator zum Tönen anregen. Der auf $\bar{a}$ abgestimmte Resonator reagirt also nicht nur auf $\bar{a}$, sondern auch auf die tiefere Oktave a, ferner auf d, auf A, auf F u. s. f., vorausgesetzt, dass in den Klängen von a, d, A, F, etc. das $\bar{a}$ als Oberton enthalten ist. Es ist dann $\bar{a}$ der 2. Partialton von a ($\bar{a} = 1$, $a = \frac{1}{2}$)
der 3. Partialton von d ($\bar{a} = 1$, $d = \frac{1}{3}$)
der 4. Partialton von A ($\bar{a} = 1$, $A = \frac{1}{4}$)
der 5. Partialton von F ($\bar{a} = 1$, $F = \frac{1}{5}$)
u. s. w.**) Ganz ebenso verhält es sich mit der mitschwingenden

*) Statt metallener oder gläserner Resonatoren von oben abgebildeter Form können auch kegelförmige Röhren aus Zinkblech (Appun) oder in einander verschiebbare Cylinder (König) angewandt werden. Am leichtesten und billigsten sind solche Resonatoren aus Pappe herzustellen. Auf Resonatoren bezügliche Maasse findet man bei Helmholtz, Tonempfindungen 4. Aufl. pag. 602 und 608.

**) Man bezeichnet eine solche Reihe von Tönen, deren Schwingungszahlen zu derjenigen des Ausgangstones in dem Verhältnisse von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ stehen, als harmonische Untertöne des Ausgangstones. Es sind also a, d, A, F, D, ... harmonische Untertöne von $\bar{a}$.

Membran. Jeder musikalische Ton, der einen Partialton von derselben Höhe, wie einer der Eigentöne der Membran, enthält, vermag die Membran in Schwingung zu versetzen und die entsprechende Schwingungsfigur zu erzeugen. Die Obertöne vermögen also mechanische, durch das Auge kontrolirbare Wirkungen hervorzubringen. Dadurch ist ihre Existenz, unabhängig vom Ohr, bewiesen.

Bei experimentellen Untersuchungen über Obertöne, bei Analysen von Klängen und Klanggemischen bedient man sich einer ganzen Reihe von Resonatoren verschiedener Form und Grösse, wobei jeder Resonator auf eine bestimmte Tonhöhe abgestimmt ist. Je vollständiger die Reihe der Resonatoren ist, um so besser wird man zu derartigen Untersuchungen ausgerüstet sein.

Nachdem wir die technischen Hülfsmittel und Untersuchungsmethoden zur Analyse von Klängen kennen gelernt haben, besprechen wir nun in möglichster Kürze die Resultate dieser Analyse, soweit sie für den Musiker von Interesse sind.

57. Die Stimmgabel. — Einfache Töne. — Wenn eine Stimmgabel angeschlagen wird, so hören wir im ersten Augenblick einen hohen hellen Klang, der alsbald erlischt, und es bleibt ein klar vernehmbarer tieferer Ton, den man deutlich hört, wenn man die Gabel dem Ohre nähert. Der helle Klang beim Anschlagen kommt von hohen unharmonischen Nebentönen her, die rasch verklingen und deren niedrigster schon ungefähr 6 mal so viel Schwingungen macht als der tiefere anhaltende Stimmgabelton. Dieser letztere selbst erweist sich bei der Analyse als frei von jeglichen Obertönen, vorausgesetzt, dass die Schwingungen der Gabel nicht zu kräftig sind. Wir haben also im Tone einer Stimmgabel das Urbild eines einfachen Tones, das Element, aus welchem sich musikalische Töne zusammensetzen lassen. Die einzelnen Partialtöne oder Obertöne eines Klanges sind als einfache Töne in diesem Sinne aufzufassen.

Wenn wir an einer Stimmgabel (senkrecht zur Ebene ihrer Zinken) einen Schreibstift befestigen und die Gabel, nachdem sie in Schwingungen versetzt ist, über eine berusste Fläche hinwegschieben, wie es die folgende Figur zeigt:

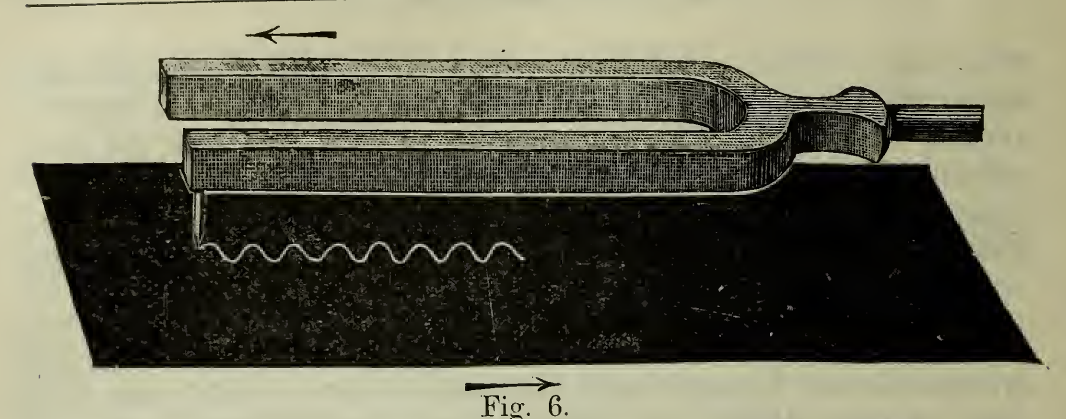


Fig. 6.

so zeichnet der Stift die Schwingungen des betreffenden Punktes der Stimmgabel auf die Unterlage. Die aufgezeichnete Wellenlinie hat in vergrössertem Massstabe die folgende Gestalt:

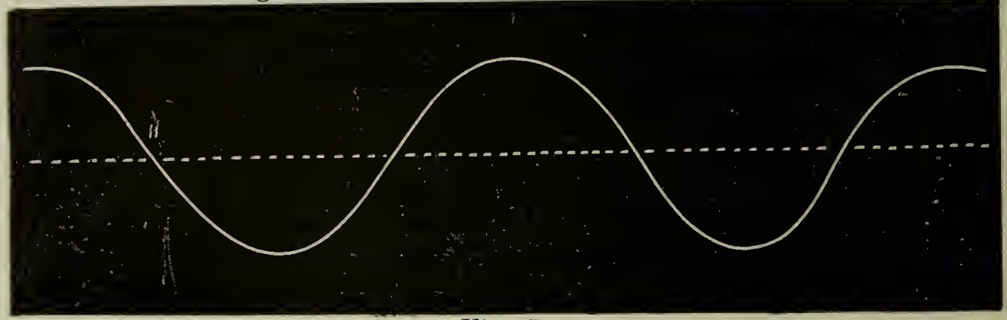


Fig. 7.

Es ist, vom geometrischen Standpunkte aus betrachtet, die einfachste Art von Wellenlinie (eine sog. „Sinus-Kurve“), welche der Stift aufzeichnet und die einfachste Art von Schwingungen („Sinus-Schwingungen“), welche der betreffende Punkt der Stimmgabel ausführt. Helmholtz nennt diese Art von Schwingungen „pendelartige“ Schwingungen, wegen ihrer Aehnlichkeit mit den Schwingungen eines Pendels.

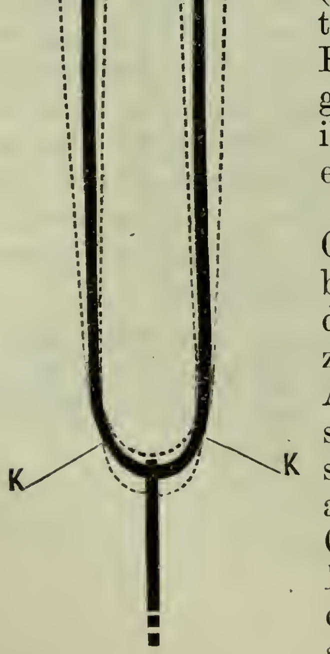


Fig. 8.

Die Art, wie eine Stimmgabel, als Ganzes betrachtet, schwingt, ergibt sich aus beistehender Figur. Die beiden Zinken der Gabel schwingen entweder gleichzeitig nach Innen oder gleichzeitig nach Aussen. Schwingen sie nach Innen, so senkt sich der Stiel der Stimmgabel; schwingen sie nach Aussen, so hebt er sich. Nahe am unteren Ende bei der Biegung der Gabel befindet sich beiderseits je ein Knoten K (da wo sich die ausgezogene Linie mit den punktirten kreuzt). Setzt man die schwingende Stimmgabel mit ihrem Stiele

auf irgend eine elastische feste Unterlage, z. B. auf die Tischplatte auf, so wird diese in erzwungene Schwingungen versetzt, die Schwingungen theilen sich einer grösseren Fläche mit und der Ton wird verstärkt. Am bedeutendsten ist die Verstärkung, wenn der Stimmgabelton mit einem Eigenton der in Mitschwingung versetzten Unterlage übereinstimmt, wie z. B., wenn die Gabel auf ein Resonanzkästchen gesetzt wird, das auf den Gabelton abgestimmt ist. In letzterem Falle hat man eine wirkliche Resonanzerscheinung, im Allgemeinen dagegen nur ein erzwungenes Mitschwingen vor sich. —

Die Knotenpunkte der Gabel erkennt man daran, dass die Gabel ungehindert fortklingt, wenn man sie an einem solchen Punkte berührt, während sie sofort aufhört zu schwingen, wenn ihre Zinken mit einem harten Gegenstande in Berührung gelangen.

Der Stimmgabelton lässt sich auch dadurch erheblich verstärken, dass man die Zinken der Gabel vor eine passend abgestimmte Resonanzröhre, vor einen Resonator hält. Die in dem betreffenden Hohlraume eingeschlossene Luft wird dann in Mitschwingung versetzt und man erhält einen ziemlich kräftigen einfachen Ton. Einen einfachen, allerdings von Luft-Reibungsgeräusch begleiteten Ton erhält man auch durch Anblasen einer bauchigen Flasche.

Die Klangfarbe solcher einfacher Töne erweist sich als dumpf, hohl, weich, charakterlos. Die tieferen Töne klingen U-ähnlich dumpf, die hohen weich, zart und doch hell. Von den Klängen musikalischer Instrumente nähern sich diejenigen der Flöte und der weiten gedeckten Orgelpfeifen am meisten den einfachen Tönen.

Zwei einfache Töne können sich von einander nur entweder durch ihre Höhe oder durch ihre Stärke unterscheiden:

Die Höhe hängt von der Schwingungszahl ab, die Stärke von der sog. Schwingungsamplitude, d. h. von der Höhe der Welle oder von der grössten Entfernung des schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage. Die Schwingungsamplitude ist ein physikalisches Maass für die Tonstärke. Je grösser die Schwingungsamplitude ist, um so stärker ist unter sonst gleichen Umständen der Ton. —

Die Klänge fast aller musikalischen Instrumente sind viel komplizirterer Natur als die einfachen Stimmgabeltöne.

Wir beginnen zunächst mit einer kurzen Besprechung der Klänge gespannter Saiten, also der grossen Gruppe der Saiten-

instrumente (Klavier, Harfe, Guitarre, Zither etc.; Streichinstrumente: Violine, Viola, Violoncell, Kontrabass u. a.). Es folgen sodann die Klänge tönender Luftsäulen ohne und mit Zungen (Orgelpfeifen und Blasinstrumente; die menschliche Stimme), und tönender Membranen und Platten, soweit sie für die Musik wesentlich in Betracht kommen. Aus der grossen Fülle von Erscheinungen sollen nur die bemerkenswerthesten herausgegriffen werden.

58—64. Klänge gespannter Saiten.

58. Gesetze schwingender Saiten: Abhängigkeit der Tonhöhe von der Länge, der Spannung, der Dicke und dem Material der Saite. — Die Höhe des Klanges einer schwingenden Saite hängt bekanntlich von verschiedenen Umständen ab: von der Länge, der Spannung, der Dicke und dem Material der Saite. Das Gesetz dieser Abhängigkeit lässt sich in wenigen Sätzen zusammenfassen.

Es wurde schon oben (pag. 159) darauf hingewiesen, dass eine gespannte Saite sich unter Umständen in eine grössere oder geringere Zahl gleicher schwingender Unterabtheilungen zu theilen vermag, wodurch die den natürlichen ganzen Zahlen entsprechenden Flageolet-Töne entstehen. Die Schwingungszahl des Grundtones der Saite, und damit natürlich auch die Höhe der Flageolet-Töne, hängt aber selbst von mehreren Faktoren ab, deren Einfluss jedem praktischen Musiker bekannt ist.

Je länger (bei gegebener Spannung und Dicke) eine Saite ist, um so tiefer ist ihr Ton; je mehr sie verkürzt wird, um so höher wird ihr Ton. Bei den Streichinstrumenten z. B. wird durch Aufsetzen eines Fingers auf die Saite und Niederdrücken auf das Griffbrett der schwingende Theil der Saite verkürzt und dadurch der Ton erhöht. Bei einer Verkürzung auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . der ursprünglichen Saitenlänge steigt die Schwingungszahl auf das 2-, 3-, 4-, . . . -fache.

Je grösser die Spannung einer Saite, um so höher wird unter übrigens gleichen Umständen der Ton. Bei den Streichinstrumenten wird die Spannung bekanntlich durch Drehen der Wirbel regulirt. Um die Schwingungszahl auf das 2-, 3-, 4-, 5-, . . . -fache zu erhöhen, muss die Spannung resp. auf das 4-, 9-, 16-, 25-, . . . -fache gebracht werden.

Je dicker ferner eine Saite ist, um so langsamer wird sie unter übrigens gleichen Umständen schwingen, um so tiefer wird also ihr Ton werden. Wird der Durchmesser einer Saite verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht, so sinkt die Schwingungszahl auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Höhe. Zu tieferen Tönen werden desshalb auch dickere Saiten genommen. Die *e*-Saite der Violine ist z. B. dünner als die *a*-Saite und diese wiederum dünner als die *d*-Saite.

Je schwerer endlich das Material ist, aus welchem die Saite besteht, um so tiefer muss ihr Ton sein, weil die Schwingungen in Folge der grösseren Trägheit der schwingenden Saite langsamer werden müssen. Die tieferen Saiten der Streichinstrumente werden desshalb mit Metalldraht übersponnen. —

† [Alle diese Gesetze lassen sich für den der mathematischen Sprache kundigen Leser in einem einzigen Ausdrucke vereinigen. Bedeutet nämlich z die Schwingungszahl des Grundtons der Saite, l ihre Länge vom Sattel bis zum Steg (in cm ausgedrückt), P die Spannung (das spannende Gewicht) in Grammen, q ihren Querschnitt in □cm, s das spezifische Gewicht des Saitenmaterials und g = 981 cm die Beschleunigung der Schwere, so ist, wie Theorie und Versuch übereinstimmend ergeben: $z = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}}$ (s. Anhang N. 93).

Für das Produkt q . s kann man offenbar das Gewicht eines Saitenstückes von der Länge eines Centimeters setzen. Mit Hülfe dieser Formel, sowie durch direkte experimentelle Messung findet man für die Spannung der 4 Violinsaiten die nachstehenden Durchschnittswerthe] †.—

Für die 4 Saiten einer auf die Normalstimmung eingestimmten Violine ergeben sich die folgenden Werthe der Spannung der einzelnen Saiten: Es entspricht der

e-Saite	eine Spannung	von 8,96	Kilogrammen.
a-Saite	„ „	von 6,87	
d-Saite	„ „	von 6,32	
g-Saite	„ „	von 6,25	

Es ist klar, dass diese Werthe nur als Durchschnittswerthe gelten können, da die Spannung mit der Stärke der Besaitung sich nothwendig verändern muss. Einer stärkeren Besaitung entspricht eine grössere Spannung und umgekehrt. Doch geben obige Zahlen einen ungefähren Begriff von dem Drucke, den die Saiten durch ihre Spannung auf den Steg und die Decke der Violine ausüben. Die Gesammtspannung aller 4 Saiten beträgt ungefähr 28,4 Kilogramm.

Nur ein Theil dieser Kraft drückt auf den Steg, nämlich der Theil, der bei der Zerlegung der Kraft in 2 (unter sich senkrechte) Theilkräfte senkrecht zur Decke wirkt. Dieser Druck beträgt 7—8 Kilogramm. — Ganz ähnlich sind die Verhältnisse für die andern Streichinstrumente. Die Gesammtspannung der vier Saiten der Viola beträgt ungefähr 31 Kilogramm, des Violoncells 45 und des Contrabasses 200 Kilogramm; nur ein Theil der ganzen Spannung wirkt natürlich als Druck auf den Steg. — Bei einem modernen Flügel entspricht die gesammte Spannung aller Saiten sogar der gewaltigen Last von ungefähr 11000 Kilogrammen. —

Die Gesetze der schwingenden Saiten werden am sog. Monochord studirt, einer über einem Resonanzkasten ausgespannten Saite, deren Spannung durch Gewichte regulirt werden kann, während der schwingende Theil der Saite durch einen verschiebbaren Steg begrenzt werden kann. Die Länge des schwingenden Theiles kann an dem unter der Saite befindlichen Maassstabe abgelesen werden. Die hier abgebildete neuere Form des Monochords widerspricht zwar

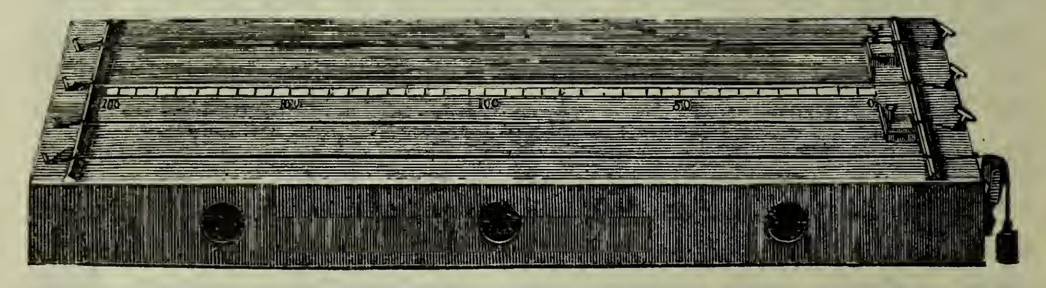


Fig. 9.

dem Namen „Monochord", da sie nicht nur eine Saite, sondern deren vier hat; sie kann jedoch dazu dienen, die Tonhöhen verschieden dicker und aus verschiedenem Material bestehender Saiten unter denselben Bedingungen unmittelbar mit einander zu vergleichen.

Die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Saitenlänge war, wie oben erwähnt, schon den Alten (Pythagoras) bekannt; aber erst der Minorit Mersenne (1588—1648 Paris) erkannte den Zusammenhang zwischen Tonhöhe und Schwingungszahl. Mersenne stellte die Gesetze schwingender Saiten auf dem Wege des Experiments fest. Durch die Einführung des Begriffes der Schwingungszahl und durch die Erkenntniss des Abhängigkeitsgesetzes zwischen der Schwingungszahl einerseits, der Saitenlänge (und der andern Faktoren) andrerseits, war es ermöglicht, den Zusammenhang zwischen den Saitenlängen und den consonanten Intervallen auf die Schwingungszahlen zu übertragen und diesem Zusammenhange dadurch erweiterte Gültigkeit zu verleihen. Während man früher nur wusste, dass $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der

Saitenlänge die Oktave, Duodecime, Doppeloktave gibt, konnte man nun sagen, dass die 2, 3, 4 fache Schwingungszahl die genannten Intervalle gibt. Dadurch wurden die erkannten Gesetze auf Töne beliebiger Instrumente anwendbar, nicht nur auf schwingende Saiten. — Das „Problem der schwingenden Saite“ bildete ein berühmtes mathematisches Problem, das von Daniel Bernoulli (1771) zu einem gewissen Abschluss gebracht wurde. (S. Anhang N. 93.) —

Auf einen Punkt sei hier nebenbei hingewiesen. Mit wachsender Dicke einer Saite wird ihr Ton tiefer, man muss desshalb, wenn man dieselbe Tonhöhe beibehalten will (bei unveränderter Spannung), die Saite verkürzen. Daraus lässt sich folgender Schluss ziehen: Wenn eine Violinsaite nicht in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig dick ist, sondern z. B. gegen das Sattel-Ende zu dünner als gegen das Steg-Ende, so wird die Oktave ihres Grundtons nicht in der Mitte zwischen Sattel und Steg liegen, sondern näher am Steg. Denn der obere schwingende Theil der Saite muss wegen seiner grössern Dicke kürzer sein, um die gewünschte Oktave des Grundtons zu geben. Aus demselben Grunde müssen alle Töne etwas höher gegriffen werden, als dies bei vollkommen gleichmässiger Dicke der Saite der Fall wäre. Umgekehrt werden alle Töne etwas tiefer als unter normalen Verhältnissen gegriffen werden müssen, wenn die Dicke der Saite gegen den Sattel zu wächst. Natürlich kann es sich in praxi nur um geringe Ungleichmässigkeiten in der Dicke handeln, da gröbere Abweichungen die Saite überhaupt unbrauchbar machen würden. — Wenn von zwei benachbarten Saiten (z. B. *a* und *e* der Violine) die eine vollkommen gleichmässig, die andere aber gegen das eine Ende zu dicker ist, als gegen das andere, so können sie nicht „quintenrein“ sein, da auf der ersten Saite die Töne in regulärer, auf der zweiten in etwas abgeänderter Weise, höher oder tiefer, gegriffen werden müssen. Sind beide Saiten in dem Sinne ungleichmässig, dass ihre Dicke von einem Ende gegen das andere hin stetig wächst, so werden die Saiten entschieden nicht „quintenrein“ sein, wenn bei der einen das dickere Ende gegen den Sattel, bei der andern gegen den Steg zu liegt; denn dann werden bei der einen Saite die Töne etwas tiefer, bei der andern etwas höher gegriffen werden müssen, als unter normalen Verhältnissen, der Fehler wird sich also beim Greifen reiner Quinten summiren müssen. Wendet man aber die eine der beiden Saiten um, so dass dann bei beiden Saiten die Zunahme der Dicke nach derselben Richtung hin erfolgt, so kann dadurch unter Umständen die Quintenreinheit hergestellt werden. Denn dann sind auf beiden

Saiten die Töne ganz wenig höher oder tiefer zu greifen als bei gleichmässiger Saitendicke, und wenn diese Abweichung bei beiden Saiten gleich gross ist, so müssen natürlich die gegriffenen Quinten wieder rein sein. Dadurch erklärt es sich, dass es so häufig gelingt, durch Umkehrung einer Saite die gestörte Quintenreinheit herzustellen.

59. Zusammensetzung und Zerlegung von Saitenschwingungen. Das Prinzip der Superposition. — Wenn eine Saite auf irgend eine Weise in Schwingungen gesetzt wird, so wird die Art ihrer Schwingungen, das Bild, das die schwingende Saite dem Auge darbieten würde, wenn dieses den Schwingungen zu folgen vermöchte, im Allgemeinen nicht sehr einfacher Natur sein. Wir haben freilich gesehen, dass eine Saite sich in 2, 3, 4, 5 und mehr gleiche schwingende Unterabtheilungen zu theilen vermag, unter Bildung von Knotenpunkten, welche bei der Schwingung in Ruhe bleiben; allein die Bildung von so einfachen Schwingungen, wie wir sie oben (pag. 160) darstellten, wird zu den Ausnahmen zu zählen sein. In der Regel werden sich gleichzeitig mehrere der erwähnten einfachen Schwingungsarten bilden in der Weise, dass die wirkliche Bewegung, welche die Saite macht, aus der Uebereinanderlagerung mehrerer einfacher Wellen entsteht und als Summe jener einzelnen einfachen Schwingungen aufgefasst werden kann. Je zahlreicher und je weniger einfach die einzelnen Summanden, d. h. die elementaren Schwingungsfiguren der skizzirten Art sind, aus denen sich die wirkliche Bewegung zusammensetzt, um so verwickelter muss auch die Summe, d. h. die Gesammtbewegung der schwingenden Saite, sich gestalten. — Dieser Schluss lässt sich direkt umkehren. Jede schwingende Bewegung einer Saite kann man sich zusammengesetzt denken aus einer grösseren oder kleineren Zahl von Schwingungsfiguren, wie sie auf pag. 160 abgebildet sind. Je komplizirter die Bewegung der Saite ist, um so zahlreicher und weniger einfach werden die Bestandtheile sein, in welche sich die Bewegung zerlegen lässt. Insbesondere zeigt es sich, dass die Form, welche eine aus ihrer Gleichgewichtslage gebrachte und hernach sich selbst überlassene Saite in dem Augenblicke hatte, als man sie frei liess und sie ihre schwingende Bewegung begann, entscheidend ist für die elementaren Bestandtheile, in welche sich die schwingende Bewegung der Saite zerlegen lässt. Je geringer die Rundung ist, welche diese Form aufweist, je mehr und je schärfere Ecken

(sog. „Discontinuitäten“) sie zeigt, um so zahlreicher und weniger einfach werden die einfachen Bestandtheile selbst sein, welche die Zerlegung der Schwingungen ergibt.

Diese nur durch höhere Analysis völlig klar zu legenden Sätze lassen sich in eine dem Musiker zugänglichere Sprache kleiden und durch Experimente bestätigen.

Den einzelnen Schwingungsfiguren auf pag. 160 (den Summanden) entsprechen die einzelnen Obertöne oder Partialtöne des Klanges der Saite, der Gesammtbewegung der Saite (der Summe) entspricht dagegen ihr Klang.

Wenn eine Saite irgendwie in Schwingung gesetzt wird, so wird ihr Klang im Allgemeinen nicht als einfacher Ton bezeichnet werden können, sondern er wird eine geringere oder grössere Zahl von Obertönen von verschiedener Stärke enthalten. Aus der Form, welche die Saite beim Beginne ihrer Schwingungen einnahm, ergibt sich genau die Zahl und Stärke der einzelnen Obertöne. Je eckiger diese Form ist, je weniger sie als rund zu bezeichnen ist, um so zahlreicher und höher sind die im Klange enthaltenen Obertöne, um so spitzer, schärfer, klimpernder ist der Klang.

Die oben skizzirte Art der Zusammensetzung der Schwingungen ist in der Weise zu verstehen, dass die Entfernungen von der Gleichgewichtslage, welche einem schwingenden Punkte in einem gegebenen Momente entsprechen würden, wenn man jede elementare Schwingungsart als allein bestehend betrachten würde, einfach zu addiren sind, um die resultirende wirkliche Entfernung des Punktes von der Gleichgewichtslage zu finden. Dieses „Prinzip der Superposition einfacher Schwingungen“ ist von fundamentaler Wichtigkeit, darf jedoch nur dann als streng gültig betrachtet werden, wenn die zu summirenden Einzelschwingungen nicht zu stark sind. Die Consequenzen dieses Prinzips in ihre Einzelheiten zu verfolgen ist Sache der höheren Mathematik. Ebenso fällt dieser Wissenschaft die Aufgabe zu, nachzuweisen, dass die Zerlegung der Bewegung einer schwingenden Saite in ihre elementaren Bestandtheile nur in einer einzigen Weise erfolgen kann. Auf der andern Seite führen alle experimentellen Klanganalysen mit Hülfe der oben besprochenen Methoden zu dem Schlusse, dass die Zerlegung eines Klanges in Partialtöne oder Obertöne durch das Ohr nur in einer einzigen Weise geschieht (Ohm'sches Gesetz). Die völlige Uebereinstimmung der theoretischen Betrachtungsweise mit den Re-

sultaten der experimentellen Klanganalyse beweist, dass die theoretisch-mathematische Zerlegung und Zusammensetzung von Schwingungen einen realen Hintergrund hat und dass die Obertöne wirklich den sog. einfachen oder „pendelartigen" Schwingungen entsprechen von der Art, wie wir sie bei den Stimmgabeln kennen lernten.

Das Prinzip der Superposition einfacher Schwingungen, auch „Prinzip der Coëxistenz der Wellenbewegungen" genannt, lässt sich dem Verständniss dadurch näher bringen, dass man die Wellenbewegung betrachtet, welche ein ins Wasser geworfener Stein in demselben hervorruft. Der Punkt, wo der Stein ins Wasser fiel, wird zum Mittelpunkt einer Wellenbewegung, welche sich in konzentrischen Kreisen fortpflanzt. Die einzelnen Wassertheilchen nehmen an der fortschreitenden Bewegung der Welle keinen Antheil, sie machen aber eine auf- und abwärts gehende schwingende Bewegung um diejenige Gleichgewichtslage, welche sie bei ruhendem Wasser einnahmen. Die Wellenberge sind um so höher und die Wellenthäler um so tiefer, je näher sie beim Mittelpunkt der Wellenbewegung sind; nach Aussen hin nimmt die Bewegung allmählich ab und verliert sich schliesslich ganz. — Wenn nun statt eines Steines zwei Steine an verschiedenen Orten ins Wasser geworfen werden, so bilden sich auch zwei Systeme von konzentrischen Kreisen, die sich gegenseitig durchkreuzen. Treffen zwei Wellenberge zusammen, so wird die resultirende Welle um so höher; trifft dagegen ein Wellenberg mit einem Wellenthal zusammen, so kann sich ihre Wirkung umgekehrt aufheben, wenn die Höhe des Wellenbergs ebenso gross ist wie die Tiefe des Wellenthals. Man nennt diese Erscheinung „Interferenz" und sagt von den sich durchkreuzenden Wellensystemen, dass sie „interferiren". Die resultirende Bewegung ist auch hier die Summe aller Einzelbewegungen.

(Die Flüssigkeitswellen der eben betrachteten Art sind eine Wirkung der Schwerkraft und hängen in keiner Weise mit der Elastizität der Flüssigkeit zusammen. In diesem Punkte unterscheiden sie sich wesentlich von den Schallwellen, welche immer auf die Wirkung elastischer Kräfte zurückzuführen sind. Der Vergleich zwischen Schallwellen und Flüssigkeitswellen ist daher auch nur bis zu einem gewissen Punkte zutreffend. Das Prinzip der Ausbreitung, der Interferenz und Superposition, sowie gewisse andere Gesetze sind freilich für beide Arten von Wellenbewegung in gleicher Weise gültig, so dass das vielgebrauchte Bild der Wasserwellen innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen zulässig ist.)

60. Abhängigkeit der Klangfarbe vom Material und von der Art der Erregung; gezupfte und geschlagene Saiten. — Die Klangfarbe eines durch Schwingungen einer Saite erzeugten musikalischen Tones hängt von verschiedenen Umständen ab, die zum Theil schon oben angedeutet wurden.

Das Material einer Saite beeinflusst ihren Klang insofern, als die Steifigkeit und Elastizität der Saite in innigem Zusammenhange mit ihrer Fähigkeit steht, sich in schwingende Unterabtheilungen zu theilen, d. h. Obertöne zu erzeugen.

Je grösser die Steifigkeit einer Saite ist, um so grösseren Widerstand wird sie der Bildung schwingender Unterabtheilungen entgegensetzen. Jeder Violinspieler weiss z. B., dass auf dicken steifen Darmsaiten Flageolettöne viel schwerer ansprechen als auf dünnen. In dem Klange einer steifen Saite werden sich daher auch weniger leicht hohe Obertöne bilden, als bei weniger steifen Saiten.

Die höheren Obertöne, ungefähr vom 7. an, bewirken nun bei Klängen von gezupften oder geschlagenen Saiten die spezielle Klangfarbe, welche man als „klimpernd“ zu bezeichnen pflegt. Vom 8. Partialton an liegen je 2 benachbarte Obertöne um einen ganzen Ton oder noch weniger von einander entfernt, und das gleichzeitige Erklingen so benachbarter Töne berührt das Ohr erfahrungsgemäss unangenehm.

Lange dünne Metallsaiten sind zur Bildung hoher Obertöne sehr geeignet, sie geben bei passender Erregungsweise daher auch leicht einen klimpernden Klang. Auch kürzere dünne Metallsaiten geben noch höhere Obertöne, wenn auch nicht so viele und so hohe wie lange Saiten. Diesen Obertönen verdanken die Klänge der Zither wenigstens zum Theil ihren näselnden Charakter. Will man die Entstehung höherer Obertöne möglichst verhindern, so thut man gut, steife und dicke Saiten zu wählen, welche sich nur schwer in eine grössere Zahl schwingender Unterabtheilungen theilen. Solche Saiten verlangen dann aber auch eine entsprechend grössere Spannung, wenn sie denselben Grundton geben sollen wie dünnere. Die grössere Tonfülle der modernen Klaviere und Flügel beruht zum grossen Theil auf der starken Besaitung und grossen Spannung.

Darmsaiten sind zwar dehnbarer, aber weniger elastisch als Metallsaiten. Die Schwingungen der Partialtöne, zumal der höheren, erlöschen daher auch rascher. Darauf ist es wahrscheinlich zurückzuführen, dass gerissene Darmsaiten weniger klimpernd klingen als gerissene Metallsaiten.

Sehen wir vom Material und der speziellen Beschaffenheit der Saiten ab, so sind es hauptsächlich 2 Punkte, welche den Klangcharakter einer schwingenden Saite beeinflussen. Einerseits die Art, wie die Saite in Schwingung gesetzt wird, andrerseits die Wahl des Angriffspunktes, d. h. der Stelle, wo die Saite gerissen, geschlagen oder gestrichen wird.

In Betreff der Art der Erregung sind die verschiedenen möglichen Arten soeben genannt worden: die Erregung kann durch Zupfen, durch Schlagen und durch Streichen stattfinden.

Wird eine Saite gezupft oder gerissen, so hängt ihr Klang davon ab, auf welche Weise dies geschieht, ob mit dem weichen Finger oder mit einem metallenen Stifte. Es ist bekannt und lässt sich durch den Versuch leicht bestätigen, dass eine mit dem weichen Finger gerissene Saite viel voller und weicher klingt, als eine mit einem metallenen Stifte gerissene. Die experimentelle Analyse ergibt, dass der Klang der Saite im zweiten Falle zahlreichere und höhere Obertöne enthält als im ersten. Mit diesem Resultate stimmen die Folgerungen der Theorie überein. Nach einer oben gemachten Bemerkung ist die Zahl und Stärke der Obertöne bestimmt, wenn die Lage, von welcher aus die Saite ihre schwingende Bewegung begann, gegeben ist. Je mehr und je schärfere Ecken die Saite in dieser Lage hatte, um so mehr und um so schärfere und höhere Partialtöne müssen in ihrem Klange enthalten sein. Eine Ecke bildet sich beim Zupfen einer Saite da, wo die Saite durch den zupfenden Finger oder Stift zur Seite gebogen wird. Diese Ecke ist natürlich bei einem spitzen Stifte schärfer als beim weichen Finger. Desshalb wird der Klang einer mit dem Stifte gerissenen Saite mehr hohe Obertöne enthalten, als derjenige einer Saite, die mit dem weichen Finger gezupft wurde. Im ersten Falle ist der Klang spitz und klimpernd, im zweiten Falle voller und weicher. In beiden Fällen überwiegt aber die Stärke des Grundtons diejenige aller Obertöne. — Zu den Instrumenten, welche bei dieser Art der Erregung in Betracht kommen, gehören Harfe, Guitarre, Mandoline, Zither u. a. Auch das „Pizzicato“ der Streichinstrumente ist natürlich hierher zu rechnen. —

Wird eine Saite durch Anschlag mit einem hammerähnlichen Instrumente in Bewegung gesetzt, so hängt der Klang von der Beschaffenheit des Hammers und von der Dauer des

Anschlags ab. Schlägt man mit einem harten scharfkantigen Hammer kurz und stark an, so bildet sich bei dem angeschlagenen Punkte eine scharfe Ecke. Während der Dauer des Anschlags fand die Bewegung keine Zeit, sich auf die ganze Saite zu übertragen, es wurde zunächst nur der direkt angeschlagene Punkt und dessen engste Umgebung aus der Gleichgewichtslage gebracht, und es bildete sich daher eine Discontinuität. Die Folge davon ist die Entstehung zahlreicher hoher Obertöne, welche in diesem speziellen Falle den Grundton an Stärke zum Theil überwiegen. Der Klang wird dann leer. — Ist der Hammer weich und elastisch, so ist der Stoss kein so plötzlicher, der Hammer legt sich in einer messbaren Zeit der Saite an und löst sich von derselben durch die elastische Rückwirkung ebenso wieder los. Während dieser Zeit konnte sich die Bewegung des angeschlagenen Punktes der ganzen Saite mittheilen und die Zustandsänderung der Saite war keine so plötzliche. Dementsprechend treten auch die höheren Obertöne bedeutend zurück. — Es erklärt sich hieraus, warum die Hämmer eines Klaviers mit weichem Filz überzogen werden. Die äussersten Filzlagen sind weicher als die inneren. Die weichen Lagen ermöglichen das allmähliche Anlegen des Hammers an die Saite, die härteren geben die elastische Kraft des Rückstosses. Durch die Qualität der Befilzung und die Schwere der Hämmer lässt sich die Art des Anschlags und die Klangfarbe mannigfach verändern. Die Piano-Fabrikanten sind durch die Erfahrung dazu gekommen, die für die Praxis zweckmässigsten Verhältnisse zu finden. Natürlich ist hier dem Geschmack ein gewisser Spielraum gelassen. Der verschiedenartige Klangcharakter der Instrumente verschiedener Pianofabriken ist zum grossen Theil auf die verschiedenartige Konstruktion und Beschaffenheit der Hämmer und die damit verbundene Verschiedenartigkeit des Anschlags zurückzuführen. Im Allgemeinen sind die Pianofabrikanten darin einig, in den tieferen Lagen schwerere Hämmer mit dickeren Filzlagen zu verwenden als in höheren Lagen. Die Klanganalyse ergibt, dass in den tieferen und mittleren Lagen die 5 oder 6 ersten Partialtöne noch deutlich zur Geltung kommen und dass der 2. und 3. Partialton den Grundton an Stärke sogar überwiegen. In den höheren Lagen dagegen sind schon der 4. und 5. Partialton sehr schwach und der Grundton überwiegt die andern Partialtöne an Stärke.

61. Einfluss des Ortes der Erregung. — Was endlich den Einfluss der Stelle des Anschlags oder der Erregung überhaupt betrifft, so ergibt sowohl eine einfache Ueberlegung als die strenge analytische Betrachtung, dass der Klang einer schwingenden Saite nur solche Partialtöne enthalten kann, welche an dem Orte der Erregung keinen Knotenpunkt haben. Die Erregungsstelle muss jedenfalls eine hin- und hergehende Bewegung machen, deren Grösse der Stärke der Erregung entspricht. Diejenigen Partialtöne, deren Schwingungsfiguren nach pag. 160 an der Stelle der Erregung einen Knotenpunkt beanspruchen würden, können sich natürlich im Gesammtklange der Saite nicht entwickeln. Dagegen werden alle diejenigen Partialtöne zur Geltung kommen, deren Schwingungsfiguren an der Stelle der Erregung einen Schwingungsbauch aufweisen.

Wird eine Saite in der Mitte ihrer Länge gerissen oder geschlagen, so müssen in ihrem Klange der 2., 4., 6., 8., . . . Partialton, d. h. alle Partialtöne geraden Ranges fehlen, denn alle diese Partialtöne würden in der Mitte der Saite einen Schwingungsknoten beanspruchen. Dass diese Partialtöne wirklich fehlen, erkennt man daran, dass eine in der Mitte angeschlagene Saite ganz zur Ruhe kommt, wenn man sie in der Mitte leise berührt, während gerade der 2., 4., 6., . . . Partialton bei der Berührung in der Mitte hervortreten würden, wenn sie im ursprünglichen Klange der Saite vorhanden wären. — Reisst man eine Saite in $\frac{1}{3}$ ihrer Länge, so wird der 3., 6., 9., 12., . . . Partialton nicht zu Stande kommen können, da alle diese Töne an der Stelle der Erregung einen Schwingungsknoten beanspruchen. Beim Anschlagen oder Reissen in $\frac{1}{4}$ der Länge fehlt der 4., 8., 12., 16., . . . Partialton u. s. w. Das Fehlen der geradzahligen Partialtöne gibt dem Klange etwas Hohles und Näselndes; ähnlich, aber in weit geringerem Maasse, wirkt das Fehlen der Partialtöne ungeraden Ranges. — Wenn man mit der Stelle des Anschlages dem Ende der Saite nahe rückt, so begünstigt man dadurch das Entstehen derjenigen Obertöne, denen an der Stelle des Anschlages ein Schwingungsbauch zukommen würde, d. h. das Entstehen höherer Partialtöne. — Bei den Pianos verlegt man die Anschlagstelle in der Regel auf $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{9}$ der Länge der Saite. Man erreicht dadurch das Wegfallen des 7. oder 9. Partialtons, während das Entstehen anderer höherer Partialtöne, wie oben angedeutet, schon durch die Art des Anschlages vermieden wird oder vermieden werden kann. Die 6

ersten Partialtöne bilden, wie wir sahen, einen reinen Dur-Dreiklang; erst vom 7. Partialton an treten störende Elemente auf und diese werden eben durch Stelle und Art des Anschlags ausgeschaltet. Natürlich hat man es in der Hand, das Hervortreten höherer Partialtöne zu begünstigen und den Klang dadurch schärfer zu machen. Manche Pianofabrikanten lieben es, den höheren Tönen einen hellen, etwas durchdringenden Klang zu geben; sie erreichen dies dadurch, dass sie in den höheren Lagen die Anschlagstelle noch näher gegen das Ende hin verlegen.

62. Gestrichene Saiten. Wirkung des Bogens, des Ortes und der Art des Streichens. — Noch haben wir es unterlassen, von den Schwingungen gestrichener Saiten zu sprechen.

Von den Schwingungen gezupfter oder geschlagener Saiten unterscheiden sich diejenigen gestrichener Saiten in einem wesentlichen Punkte: im ersten Falle haben wir es mit frei verlaufenden Schwingungen zu thun, die vom Anfangszustande der Saite beim Beginne der Bewegung abhängen und in Folge ihrer Uebertragung an die Luft rasch an Stärke verlieren, während bei den gestrichenen Saiten die Schwingungen durch eine dauernde Krafteinwirkung von aussen mittels des Bogens aufrecht erhalten werden. Die Wirkung des Bogens hat man sich in der Weise zu denken, dass der angestrichene Punkt der Saite zunächst an den harzigen Bogenhaaren klebt und sich mit dem Bogen in der Richtung des Striches bewegt, bis die wachsende Spannung der Saite eine gewisse Grösse erreicht hat. Dann reisst sich der Punkt vom Bogen los und schwingt, entgegen der Bewegung des Bogens und unter starker Reibung gegen die Haare desselben, zurück, um dann von Neuem vom Bogen erfasst zu werden und seine Bewegung von vorne zu beginnen. So lange der Punkt am Bogen haftet und sich in der Richtung des Striches bewegt, stimmt seine Geschwindigkeit mit derjenigen des Bogens überein; nachdem er sich losgerissen hat, springt er mit sehr grosser Geschwindigkeit zurück. Die Reibung gegen den Bogen vermag diese rückgängige Bewegung nicht zu hemmen, sondern bewirkt nur, dass die beschleunigte Bewegung, welche der Punkt ohne die Reibung annehmen würde, sich in eine gleichförmige, von konstanter aber grosser Geschwindigkeit verwandelt. Diese Auffassungsweise der Bogenwirkung stimmt mit den Resultaten sorgfältiger experimenteller Untersuchungen überein (s. unten).

Nach Allem, was wir oben über Saitenschwingungen im Allgemeinen sagten, ist es klar, dass der Ort, wo die Saite angestrichen wird, den Klangcharakter beeinflussen wird. Würde die Saite z. B. in der Mitte gestrichen, so müssten nach dem oben erwähnten allgemeinen Gesetze alle Partialtöne geraden Ranges ausfallen und die Saite würde matt und dumpf klingen. Man verlegt desshalb auch bei den Streichinstrumenten die Stelle, wo gestrichen wird, näher ans Ende der Saite, ungefähr um $\frac{1}{10}$ der Saitenlänge vom Steg entfernt.

Neuere Untersuchungen von Krigar-Menzel und Raps über Saitenschwingungen*) beweisen, dass gerade diejenigen Partialschwingungen, welche in der Nähe der Streichstelle einen Knoten haben, verhältnissmässig stark entwickelt sind, während diese Partialschwingungen plötzlich ganz ausfallen, wenn die Streichstelle genau in den Knoten rückt. Es spielen daher in den Klängen der Streichinstrumente die höheren Partialtöne ungefär zwischen dem 6. und 10. eine nicht unbedeutende Rolle. Sie treten nicht so stark hervor, um eine unharmonische, dissonirende Wirkung hervorzubringen, sondern sie geben dem Klange nur einen gewissen Grad von Schärfe, welche man als Glanz des Tones bezeichnet. Der Grundton überwiegt alle Obertöne an Stärke und gibt dadurch dem Klang seine Fülle. Verhältnissmässig schwächer sind in der Regel die niedrigeren Obertöne. Nähert man sich beim Streichen dem Steg, so tritt der Grundton mehr zurück und der 2. bis 6. Partialton, zuweilen auch der 8., werden hörbar; insbesondere tritt der 2. Partialton, also die Oktave des Grundtons, leicht in den Vordergrund, namentlich bei schnellem und leichtem Streichen. Der Ton wird dadurch etwas pfeifend. (Diese Art zu spielen wird dann und wann zur Erzielung einer bestimmten Klangwirkung ausdrücklich vorgeschrieben und mit der Bezeichnung „sul ponticello“ angedeutet.) Nähert man sich beim Streichen dagegen dem Griffbrett, so wird der Klang ärmer an Obertönen und dadurch dumpfer.

Von grösstem Einfluss auf die Qualität des Tones bei Streichinstrumenten ist bekanntlich die Art, den Bogen zu führen. Die Klangschönheit ist in innigem Zusammenhang mit

*) O. Krigar-Menzel und A. Raps: „Ueber Saitenschwingungen“. Sitzungsberichte der k. Akademie d. Wissenschaften in Berlin. Sitzung der physikal.-math. Klasse vom 25. Juni 1891.

der Gleichmässigkeit und Geschmeidigkeit des Bogenstriches. Jede Unregelmässigkeit in der Bogenführung bringt eine Unstetigkeit, eine sog. Discontinuität in der Bewegung der Saite mit sich, wodurch ein kratzendes Geräusch entsteht. Wie ein musikalischer Ton sich von einem Geräusche durch die vollkommene Gleichmässigkeit (Periodicität) der Schwingungen unterscheidet, so unterscheidet sich der auf einer Violine durch Meisterhand erzeugte Ton von dem kratzenden Tone eines Anfängers durch die Abwesenheit jeder Unregelmässigkeit und Unstetigkeit der schwingenden Bewegung, d. h. jeden Geräusches, welches den spezifisch musikalischen Charakter des Tones beeinträchtigt.

63. Einfluss des Resonanzkörpers, des Alters und der Eigentöne der Streichinstrumente. — Es wurde bei den bisherigen Betrachtungen über Schwingungen von Saiten zunächst ganz abgesehen von der Wirkung des sog. Resonanzkörpers oder Resonanzbodens, der bei keinem in der Musik gebräuchlichen Saiteninstrumente fehlt. Die beiden Endpunkte des schwingenden Theiles einer Saite sind freilich Knotenpunkte, aber nur in relativem Sinne. Absolut unbeweglich sind sie nicht, sondern sie haben bei zwar kaum messbarer Bewegungsamplitude doch eine so grosse Energie der Bewegung, dass sie die Lager, in denen sie befestigt sind, oder den Steg, auf dem sie ruhen, in Schwingungen zu setzen vermögen, vorausgesetzt dass diese einen hinreichenden Grad von Elastizität besitzen. Bei den Streichinstrumenten speziell werden die Schwingungen der Saiten durch den Steg auf die Decke des Resonanzkörpers übertragen. Unter dem rechten Fusse des Steges, bei der Violine ungefähr 6 mm hinter demselben gegen den Saitenhalter zu, steht die sog. Stimme, ein cylindrisches Stäbchen, das die Verbindung zwischen der Decke und dem Boden des Resonanzkörpers herstellt und die Bestimmung hat, einerseits die Schwingungen der Saiten und des Steges auch auf den Boden zu übertragen, andrerseits den Druck, der von den Saiten auf den Steg und die Decke ausgeübt wird, tragen zu helfen. Die Beschaffenheit und Stellung der Stimme (von den Franzosen sehr treffend „l'âme“, „die Seele“ genannt) beeinflusst den Ton wesentlich. Unter der Decke, in der Längsrichtung der Geige, direkt unter den tieferen Saiten des Instrumentes befindet sich der sog. Balken, auch Bass-Balken genannt, der den auf dem linken Fusse des Steges lastenden Druck tragen

hilft. Saiten, Steg, Resonanzdecke, Stimme, Balken, Boden und die im Resonanzkörper eingeschlossene, durch die F-Löcher mit der Aussenwelt in Verbindung stehende Luft bilden ein zusammenhängendes schwingendes Ganzes, das die umgebende Luft mit viel grösserer Kraft in Schwingungen versetzt, als die schwingenden Saiten allein es zu thun vermöchten. Eine schwingende Saite an und für sich gibt nur einen schwachen Ton, indem sie eine zu geringe Flächenausdehnung hat, um ihre Bewegung an die umgebende Luft merklich zu übertragen. Bringt man sie aber in passender Weise mit einem Resonanzkörper in Verbindung, den sie in sog. „erzwungene“ Schwingungen versetzt, so wird ihr Klang dadurch bedeutend verstärkt, indem der ganze mitschwingende Resonanzapparat der umgebenden Luft eine viel grössere Oberfläche darbietet als eine einfache schwingende Saite. Die Qualität eines Resonanzkörpers hängt wesentlich davon ab, in welchem Grade er die einzelnen Partialtöne des Saitenklanges zu verstärken vermag. Von einem guten Resonanzkörper muss verlangt werden, dass er alle Töne gleichmässig verstärkt. In welchem Maasse jeder einzelne mitschwingende Theil sich an der Verstärkung betheiligt, ist nur in grossen Zügen bekannt. Sicher ist es, dass bei den Streichinstrumenten die Decke als der Theil zu betrachten ist, der zur tonverstärkenden Wirkung am meisten beiträgt. Aber selbst so unscheinbaren Theilen, wie dem Steg und der Stimme, fällt eine wichtige Rolle zu. Wird der Steg zu schwer oder zu leicht gemacht, verändert man willkürlich seine übliche Form, die auf der Erfahrung von Jahrhunderten beruht, so wird dadurch der Klang benachtheiligt. Hemmt man die Schwingungen des Steges durch Aufsetzen eines Dämpfers (sordino), so kann die verstärkende Wirkung des Resonanzkörpers nicht zur vollen Geltung kommen, der Ton wird geschwächt und erhält eine andere Färbung. Verschiebt man die Stimme, so wird auch dadurch eine Veränderung des Klanges herbeigeführt, und es gehört unter Umständen grosse Geduld und Ausdauer dazu, um die passendste Stellung der Stimme zu finden. Der Klang eines Streichinstrumentes ist von so vielen Faktoren abhängig und das Abhängigkeitsverhältniss ist ein so verwickeltes, dass die Geigenmacherkunst ihre Bezeichnung als „Kunst“ in vollem Maasse verdient. Alle den Klang eines Instrumentes beeinflussenden Faktoren bilden eine zusammenhängende Kette von wichtigen und weniger wichtigen

Gliedern. Fehlt in dieser Kette nur ein Glied, und sei es auch das unscheinbarste, so ist der Zusammenhang unterbrochen. Keiner ausgebildeten Theorie, sondern der Erfahrung vieler Jahrhunderte, der unermüdlichen Ausdauer und dem Scharfblick einzelner hervorragender Männer verdanken wir die Meisterinstrumente, die jedem Geigenmacher und jedem Künstler als kaum erreichbares Ideal erscheinen. Der Wissenschaft aber, die sich nicht mit der blossen Kenntniss von Thatsachen begnügen darf, sondern alle Erscheinungen auf die einfachsten zu Grunde liegenden Ursachen zurückzuführen hat, stellt die Kunst der Geigenmacher Probleme, deren Lösung zum grossen Theil einer nicht allzu nahen Zeit vorbehalten sein dürfte. —

Eine sehr bekannte Thatsache ist es, dass, abgesehen von dem Material und der Bauart eines Streichinstrumentes, sein Alter auch nicht unerheblich in Betracht kommt. D. h. nicht das Alter allein ist es, das ausschlaggebend ist, sondern die Zahl der Jahre, während deren das Instrument in praktischem Gebrauch war, und die Art, wie es gespielt wurde. Zum Bau der Streichinstrumente oder vielmehr derjenigen Theile, die bei den Schwingungen vorzugsweise in Betracht kommen, wird freilich Holz von möglichst vollkommener Elastizität gewählt, aber auch solches Holz wird den Schwingungen, zu denen es gezwungen wird, vorerst einen gewissen Widerstand entgegensetzen. Durch die Schwingungen werden die kleinsten Theilchen (Moleküle) des Holzes in Bewegung gesetzt, und diese einzelnen Bewegungen werden um so geringeren Widerstand finden, je öfter die schwingenden Theilchen gezwungen waren, diese Bewegungen auszuführen. Daraus erklärt es sich, dass langjähriges gutes Spielen einem Instrumente nur förderlich sein kann, insofern, als dadurch die Elastizität des Holzes gerade in der Richtung geweckt und ausgebildet wird, in der sie ausgebildet sein muss, um die gewünschten Schwingungen zu ermöglichen. Spieler und Instrument beeinflussen sich gegenseitig. Ein guter Spieler, der seinem Instrumente nur Schwingungen zumuthet, die bei einem guten Spiele in Betracht kommen, wird sein Instrument auch vorzugsweise zu diesen Schwingungen befähigen. Und umgekehrt wird ein gutes Instrument es auch dem Spieler erleichtern, einen schönen, von kratzenden Nebengeräuschen freien Ton daraus zu ziehen und mit grösserer Kraft darauf zu spielen, ohne in Gefahr zu kommen, unschön zu werden. —

Wie schon oben angedeutet, gehören die Schwingungen

des Resonanzkörpers im Allgemeinen zur Klasse der sog. erzwungenen Schwingungen (s. pag. 166), indem der Resonanzkörper durch alle von der schwingenden Saite gegebenen Töne zum Mitschwingen gezwungen wird. Doch kommen dem Resonanzkörper auch bestimmte Eigentöne zu, wie dies bei jedem Körper der Fall sein muss, der periodischer elastischer Schwingungen fähig ist. Nach dem allgemeinen Gesetze des Mitschwingens werden diese Eigentöne vorzugsweise durch solche Töne angeregt werden, deren Höhe mit derjenigen der Eigentöne übereinstimmt. Wenn man das Ohr an den Boden einer Violine drückt und sich eine ganze Tonskala vorsingen oder vorspielen lässt, so findet man, dass vorzugsweise 2 Töne merklich hervortreten; der eine liegt in der Gegend von $\bar{c}$ oder $\overline{cis}$, der andere um eine Sexte oder eine Septime höher, etwa zwischen $\bar{a}$ und $\bar{b}$. Diese Töne stärkster Resonanz sind die Eigentöne des Resonanzkörpers. Dieselben Töne können auch durch Anblasen der *F*-Löcher erzeugt werden. Für die Bratsche liegen die Eigentöne um ungefähr einen Ganzton tiefer als für die Violine. Für das Violoncell liegt der tiefste Eigenton in der Gegend von *F* oder *G*.

Die Eigentöne der Streichinstrumente tragen zur Verstärkung der ihnen nahe liegenden Töne der Saiten bei und sind desshalb nicht ohne Einfluss auf den Klangcharakter des Instrumentes. Während sowohl bei dem Violoncell als bei der Violine der tiefste Eigenton des Resonanzkörpers annähernd um eine Quarte oder Quinte höher liegt als der Grundton der tiefsten Saite, liegt der tiefere Eigenton der Bratsche, das *b* oder *h*, ungefähr um eine Septime höher als das *c* der leeren *c*-Saite. Damit scheint, wie Helmholtz hervorhebt, der eigenthümliche Klangcharakter der Bratsche zusammenzuhängen. Immerhin darf der Einfluss der Eigentöne nicht überschätzt werden; wenn er sehr scharf ausgeprägt wäre, so müsste er der Gleichmässigkeit des Klanges in den verschiedenen Tonlagen des Instrumentes sehr nachtheilig sein.

64. Schwingungsformen gestrichener und gezupfter Saiten. — Für die Stimmgabel wurde oben ein Verfahren skizzirt, das es ermöglicht, die Schwingungen eines Stimmgabelpunktes direkt dem Auge zu veranschaulichen. Die Methode bestand darin, dass man den Punkt seine Schwingungen direkt aufzeichnen liess, indem man die mit einem Schreibstift versehene schwingende Stimmgabel über eine Unterlage hinschob, oder umgekehrt, die Unterlage unter

der schwingenden Stimmgabel wegzog. Die wellenförmige Kurve, die man durch dieses Verfahren erhält, nennt man die Schwingungsform des Stimmgabelpunktes. Sie stellt die Abhängigkeit der Excursionen des schwingenden Punktes von der Zeit dar. Diese Schwingungsform ist für die Punkte einer Stimmgabel charakteristisch.

Genau in demselben Sinne kann man nun auch von der Schwingungsform irgend eines Punktes einer schwingenden Saite sprechen, nur wird naturgemäss hier die Art der Beobachtung eine andere sein müssen. Helmholtz verwandte zu seinen Untersuchungen ein sog. Vibrationsmikroskop, mit Hülfe dessen er die (aus den Schwingungen eines Saitenpunktes und denjenigen einer Stimmgabel kombinirten) Bewegungsfiguren direkt mit dem Auge beobachtete. In Bezug auf die Konstruktion und die Anwendung dieses Apparates muss auf das Helmholtz'sche Werk verwiesen werden.

Eine einfachere und wegen ihrer Objektivität vorzuziehende Methode wurde von Krigar-Menzel und Raps zur Anwendung gebracht. Sie besteht darin, dass die Schwingungen des zu beobachtenden Punktes auf photographischem Wege fixirt werden. Das Bild des z. B. vertikal auf und abwärts schwingenden Punktes wird durch ein Linsen-System auf eine vertikalstehende cylinderförmige Trommel geworfen, die mit photographischem Papier überzogen ist. Bei stillstehender Trommel würde das Bild des Saitenpunktes auf der Trommel nur einen vertikalen Strich hervorbringen, dessen Länge der Schwingungsweite oder Amplitude des schwingenden Punktes entsprechen würde. Dreht sich aber die Trommel rasch und gleichförmig um ihre Axe, so erhält man auf dem photographischen Papier ein Kurve, deren Bedeutung genau derjenigen der oben erwähnten Stimmgabelkurven entspricht. Die so entstehende objektiv fixirte Kurve ist die Schwingungsform des schwingenden Punktes der Saite.

Die auf diese Weise gewonnenen Schwingungsformen gestrichener Saiten haben nun verschiedenes Aussehen, je nach der Wahl der Streichstelle einerseits und des Beobachtungspunktes andrerseits. Als Grundtypus ist eine Zickzacklinie zu betrachten, die aus zwei geraden Linien besteht und ungefähr die folgende Gestalt hat:

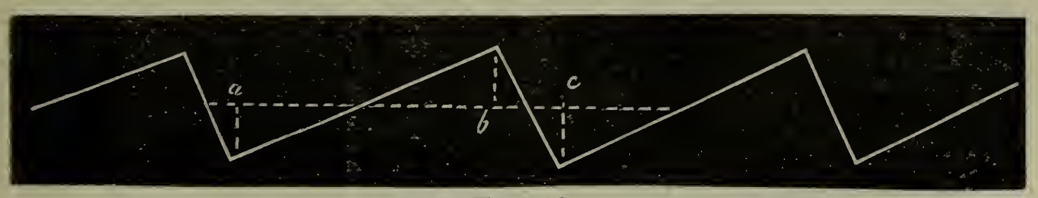


Fig. 10.

Diese Figur stellt die Schwingungsform für einen gestrichenen Punkt dar, der um ungefähr $\frac{1}{4}$ der Saitenlänge vom Ende entfernt ist.

Aehnliche Zickzacklinien erhält man stets dann, wenn der Beobachtungspunkt mit der Streichstelle zusammenfällt, d. h. für die gestrichene Stelle selbst. Wird die Mitte der Saite gestrichen, so ist der aufsteigende Theil der Zickzacklinie gleich steil wie der absteigende. In unmittelbarer Nähe des Endes der Saite fallen die absteigenden Strecken sehr steil ab. Liegt die Streichstelle nahe am Ende der Saite (ungefähr zwischen dem Ende und $\frac{1}{7}$ der Saitenlänge), so erhält man Zickzacklinien nicht nur für die Streichstelle, selbst, sondern auch für jeden andern Punkt der Saite, und es ergibt sich, dass das Verhältniss der beiden Strecken bc und ac $(\frac{bc}{ac} = \omega)$ genau übereinstimmt mit der in Bruchtheilen der Saitenlänge ausgedrückten Entfernung des Beobachtungspunktes vom Ende der Saite $(\omega = \frac{x}{l}$, wenn x die Entfernung des Beobachtungspunktes vom Saitenende und l die Saitenlänge bedeutet).

Alle diese Zickzackfiguren rechtfertigen die oben ausgesprochene Ansicht über die Wirkungsweise des Bogens. Den aufsteigenden geradlinigen Strecken entspricht die mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich gehende Bewegung des gestrichenen Punktes in der Richtung des Bogenstriches; den steil abstürzenden Strecken dagegen entspricht das rasche aber ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit sich vollziehende Zurückschnellen entgegen der Bewegung des Bogens.

Für andere Streichstellen und Beobachtungspunkte als die oben erwähnten erhält man zum Theil weit komplizirtere Schwingungsformen, die nur in grossen Zügen noch das Bild eines Zickzacks erkennen lassen. Besonders auffallend ist es, dass die stark hervortretenden Partialschwingungen sich in der Schwingungsform durch deutlich ausgeprägte wellenförmige Kräuselungen bemerkbar machen, deren Zahl innerhalb einer Welle mit der Ordnungszahl des betreffenden Partialtones übereinstimmt. Streicht man z. B. die Saite in unmittelbarer Nähe des Knotenpunktes $\frac{1}{5}$ etwas näher nach dem Ende der Saite zu, so muss nach dem weiter oben angeführten Gesetze der 5. Partialton stark entwickelt sein, und man erhält für die Beobachtungsstelle $\frac{1}{15}$ die folgende Figur:

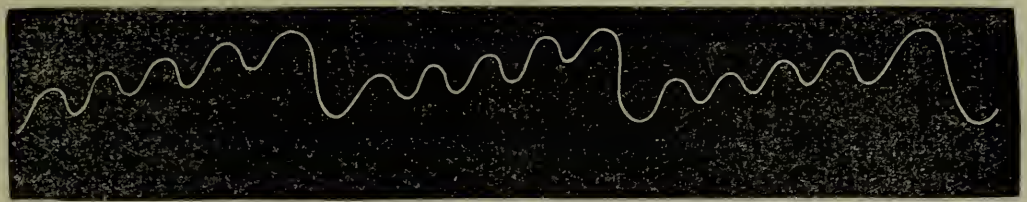


Fig. 11.

Für weitere Einzelheiten muss auf die oben angeführte Arbeit von Krigar-Menzel und Raps verwiesen werden, sowie auf die Inaugural-Dissertation von Krigar-Menzel: „Ueber die Bewegung gestrichener Saiten“ (Berlin, Niethe, 1888).

Von denselben beiden Autoren wurden mit Hülfe derselben Methode die Schwingungsformen gezupfter Saiten untersucht (Sitzungsberichte der k. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, Gesammtsitzung vom 15. Juni 1893). Als Grundtypus ergab sich hierbei eine aus 4 geradlinigen Strecken zusammengesetzte gebrochene Linie von folgender Gestalt:



Fig. 12.

Aus dieser Figur lässt sich schliessen, dass die Bewegung eines Punktes einer gezupften Saite im Allgemeinen in der Weise vor sich geht, dass der Punkt zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin- und herschwingt, aber in den beiden äussersten Lagen seine Bewegung nicht plötzlich umkehrt, sondern eine Zeit lang in diesen Lagen verharrt. — Schon nach wenigen Schwingungen fängt das Schwingungsbild allmählich an sich zu verändern und zu entarten. Es ist dies darauf zurückzuführen, dass die Schwingungen gezupfter Saiten bald an den Resonanzkörper übergehen und verhältnissmässig rasch gedämpft werden, während bei gestrichenen Saiten die Energie der Bewegung und die Konstanz der Schwingungsform durch die Einwirkung des Bogens aufrecht erhalten wird. —

Wenn bei irgend einem Anlasse von der Schwingungsform schwingender Punkte die Rede ist, so ist dies stets in dem Sinne zu verstehen, wie wir es bei Stimmgabeln und schwingenden Saiten kennen lernten. Verschiedenen Klangfarben entsprechen stets verschiedene Schwingungsformen. In diesem Sinne kann man sagen, dass die Klangfarbe mit der Schwingungsform in innigem Zusammenhange steht.

65. Schwingungen der Luft. Longitudinale Schwingungen im Gegensatz zu transversalen. — Die Klänge, von welchen wir bisher sprachen, wurden durch Schwingungen elastischer fester Körper hervorgebracht; die Luft diente dabei als Mittel zur Fortpflanzung der schwingenden Bewegung des tonerregenden Körpers zum Gehörorgan. Anders verhält es sich mit den Schwingungen, die wir nun betrachten wollen. Bei Orgelpfeifen und Blasinstrumenten wird der Klang durch Schwingungen der Luft selbst erzeugt. Die Luft spielt hier nicht allein eine vermittelnde Rolle, sondern sie tritt tonbildend auf. Natürlich können die Schwingungen von luftförmigen Körpern nicht genau der nämlichen Art sein, wie diejenigen von Saiten; die Art der schwingenden Bewegung ist zwar verwandt, aber nicht gleich, entsprechend der gänzlich verschiedenen Natur der dabei in Betracht kommenden Körper.

Wird auf irgend ein Lufttheilchen ein momentaner Stoss ausgeübt, so wird dasselbe in der Richtung des Stosses aus seiner Gleichgewichtslage gedrängt, es stösst dabei auf das unmittelbar benachbarte Lufttheilchen, das dadurch ebenfalls aus seiner Gleichgewichtslage verdrängt wird u. s. w. Jedes nachfolgende Lufttheilchen übernimmt die Rolle des vorhergehenden. Durch den ursprünglichen momentanen Stoss wurden die in der Stossrichtung liegenden Lufttheilchen einander näher gebracht, es musste sich eine Verdichtung bilden, welche sich in der Richtung des Stosses fortpflanzt. Wie aber ein Stoss nie einseitig ist und der stossende Körper immer einen Rückstoss erhält, so folgt auch hier der Wirkung eine Gegenwirkung.

Während einerseits die Verdichtung in der Stossrichtung fortschreitet, streben die ursprünglich angestossenen und verdrängten Lufttheilchen wieder nach ihrer ursprünglichen Lage zurück; sie nehmen eine rückgängige Bewegung an und schwingen über ihre Gleichgewichtslage, der Richtung des Stosses entgegengesetzt, hinaus, wie ein Pendel, das, einmal aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, nicht einfach nach derselben zurückkehrt, sondern darüber hinausgeht und um dieselbe hin- und herschwingt. Dieser rückgängigen, entgegengesetzten Bewegung der Lufttheilchen muss nun nothwendig auch eine entgegengesetzte Wirkung entsprechen, d. h. der ursprünglichen Verdichtung muss eine Verdünnung folgen. Diese Verdünnung pflanzt sich dann in derselben Weise fort wie vorher die Ver-

dichtung. Darauf folgt dann als Gegenwirkung wieder eine Verdichtung und das Spiel beginnt von vorne.

Wir sehen also, dass die schwingende Bewegung der Luft sich in abwechselnden periodischen Verdichtungen und Verdünnungen äussert. Bei der Luft und bei gasförmigen Körpern überhaupt findet die schwingende Bewegung stets in der Längsrichtung der Fortpflanzung statt, diese Schwingungen heissen desshalb auch Längsschwingungen oder longitudinale Schwingungen. Im Gegensatz hierzu findet die schwingende Bewegung gespannter Saiten quer (senkrecht) zur Längsrichtung der Saite statt. Diese Schwingungen heissen daher Querschwingungen oder transversale Schwingungen.

Zwischen transversalen und longitudinalen Schwingungen besteht, wenn wir von der Richtungsverschiedenheit und der daraus hervorgehenden Aenderung der Aeusserungsweise absehen, die vollkommenste Analogie.

Wie bei den Saitenschwingungen, so haben wir auch bei den Schwingungen abgegrenzter Luftsäulen Knotenpunkte einerseits und Schwingungsbäuche andrerseits. Bäuche sind diejenigen Stellen, an welchen die hin- und hergehende Bewegung oder vielmehr die Weite (Amplitude) dieser Bewegung ihren grössten Werth erreicht. Knotenpunkte sind diejenigen Punkte, die an der schwingenden Bewegung keinen Antheil nehmen und in Ruhe bleiben. Bei den Schwingungsbäuchen, wo die Luft in stark hin- und hergehender Bewegung sich befindet und frei ausweichen kann, wird weder eine Verdichtung noch eine Verdünnung stattfinden, dort wird die Dichtigkeit der Luft unverändert bleiben; an den Schwingungsknoten dagegen wird der grösste Wechsel zwischen Verdichtung und Verdünnung stattfinden. Dass an den Schwingungsknoten die Dichte nicht unverändert bleiben kann, sondern im Gegentheil dem grössten Wechsel unterworfen sein muss, kann man sich etwa in der Weise veranschaulichen, dass man sich einen von einer dichten Volksmenge überdeckten freien Platz denkt, auf dem sich einige Bäume oder Laternenpfähle befinden. Entsteht durch einen äussern Anstoss in der Menge ein Gedränge und pflanzt sich dasselbe durch die Menge fort, so wird das Gedränge in unmittelbarer Nähe der Bäume oder Laternenpfähle am grössten sein, da die dort befindlichen Menschen nicht ausweichen können. Wären die an den Baum gedrängten Menschen kräftig genug, um durch Anstemmen gegen den Baum und einen kräftigen Rückstoss eine rückwärtsgehende Bewegung zu erzeugen, so würden sie bald wieder freie Luft haben, der Ver-

dichtung würde eine Verdünnung folgen. Den Bäumen und Laternenpfählen im Gewoge der Menge entsprechen die Knotenpunkte (resp. Knotenflächen) der schwingenden Luftmasse. Dort muss der Wechsel zwischen Verdichtung und Verdünnung am grössten sein.

66. Allgemeines über Wellenbewegung. Fortschreitende und stehende transversale und longitudinale Wellen. Schwingungsdauer, Wellenlänge, Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Schwingungen von Luftsäulen. — Es ist von Wichtigkeit, darauf hinzuweisen, dass zwar die Luft sowie überhaupt alle gasförmigen Körper gemäss ihrer Natur nur zu longitudinalen Schwingungen fähig sind, die sich in abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen äussern, dass aber die spezielle Art longitudinaler Schwingungen eine andere ist, je nachdem die schwingende Luftmasse ein für sich schwingendes, nach Aussen irgendwie abgegrenztes Ganzes bildet oder nicht. Wir betonten auch bei der soeben besprochenen Art longitudinaler Schwingungen, bei welcher sich Knotenpunkte bilden, dass sie sich auf Schwingungen abgegrenzter Luftsäulen (oder allgemeiner Luftmassen) beziehe und mit den Schwingungen von Saiten analog sei. Bei einer schwingenden Saite, die an ihren beiden Enden befestigt ist, müssen sich nothwendig Knoten bilden; denn selbst wenn die Saite als Ganzes hin- und herschwingt, müssen doch ihre beiden Endpunkte in Ruhe bleiben, also mit Rücksicht auf die Bewegung der Saite Knotenpunkte sein. Eine Luftsäule lässt sich zwar nicht so scharf nach allen Seiten hin abgrenzen wie eine Saite, aber immerhin erkennen wir von vornherein, dass z. B. in einer cylindrischen Röhre, die an dem einen Ende



Fig. 13.

verschlossen, am andern offen ist, die Schwingungen der Luft, die aus abwechselnden in der Längsrichtung der Röhre hin- und hergehenden Verdichtungen und Verdünnungen bestehen, von der Art sein müssen, dass das verschlossene Ende einen Knotenpunkt bildet, der an der hin- und hergehenden Bewegung keinen Antheil nimmt. Eine solche Luftsäule muss also wenigstens einen Knotenpunkt haben.

Diese Nothwendigkeit der Knotenbildung besteht aber nicht von vornherein, weder für transversale noch für longitudinale Wellenbewegung, wenn dieser Bewegung nicht durch irgend eine Umgrenzung Halt geboten wird.

Nehmen wir z. B. die Wellenbewegung, die entsteht, wenn wir in ruhendes Wasser einen Stein werfen. Der Stein erzeugt durch

seinen Fall im Wasser momentan eine Vertiefung, um welche herum sich ein Wasserwulst bildet. Dieser schreitet nach Aussen hin fort, in konzentrischen Kreisen um den Punkt herum, wo der Stein ins Wasser fiel. Die Welle schreitet auf der Wasserfläche nach allen Richtungen hin fort; an der fortschreitenden Bewegung nimmt aber das Wasser selbst keinen Antheil, wie man daran erkennt, dass ein auf dem Wasser schwimmendes Stückchen Holz sich nicht nach Aussen entfernt, sondern im Wesentlichen (abgesehen von einer geringen seitlichen Bewegung) nur eine auf- und abwärts schaukelnde Bewegung macht. Die einzelnen Wassertheilchen schwingen unter der Einwirkung der Schwerkraft senkrecht zur Wasserfläche, also senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle hin und her, auf und ab. Jedes Wassertheilchen wird von dieser Bewegung ergriffen, um so später je weiter es vom Mittelpunkte, wo der Stein ins Wasser fiel, entfernt ist. Alle Wassertheilchen in der Umgebung dieses Punktes, ohne Ausnahme, nehmen an der schwingenden Bewegung Theil. Mit wachsender Entfernung verliert sich die Bewegung mehr und mehr; mit dem wachsenden Umfange der Kreise nimmt die Intensität der Bewegung mehr und mehr ab und erlischt schliesslich ganz. Wir haben es hier mit einer transversalen Wellenbewegung zu thun, und zwar mit einer solchen ohne Knotenbildung — denn dazu war durchaus keine Veranlassung da — einer Bewegung, welche sich durch ihr Fortschreiten nach Aussen charakterisirt. Man nennt dies eine transversale fortschreitende Wellenbewegung.

Denken wir uns ferner, um das Wesen einer transversalen fortschreitenden Welle noch klarer zu machen, ein horizontal ausgespanntes elastisches Seil, dessen linkes Ende wir in der Hand halten, während das rechte Ende sehr weit entfernt, das Seil also sehr lang sei. Lassen wir nun das linke Ende, indem wir es mit der Hand bewegen, eine vertikale auf- und abwärts gehende Bewegung ausführen, so wird sich diese Bewegung nach rechts hin fortpflanzen, in der Weise, dass jeder Punkt des elastischen Seiles die hin- und hergehende Bewegung mitzumachen strebt, dieselbe aber um so später beginnt, je weiter er vom linken Ende des Seiles entfernt ist. Nehmen wir an, in derselben Zeit, während deren das linke Seil-Ende P_0 (siehe Fig. 14) eine ganze, hin- und hergehende Bewegung vollführt habe, sei die Bewegung bis zum Punkte P_8 hin nach rechts fortgeschritten, so dass dieser Punkt sich eben anschickt seine erste hin- und hergehende Bewegung anzutreten, wenn das Seil-Ende P_0 dieselbe vollendet hat. Die Zeit, welche in diesem

Momente seit Beginn der Bewegung verflossen ist, oder die Zeit, innerhalb welcher das Seil-Ende P_0 seine erste hin- und hergehende Bewegung vollführt hat, heisst die Schwingungszeit oder Schwingungsdauer; sie pflegt mit dem Buchstaben T (tempus) bezeichnet zu werden.

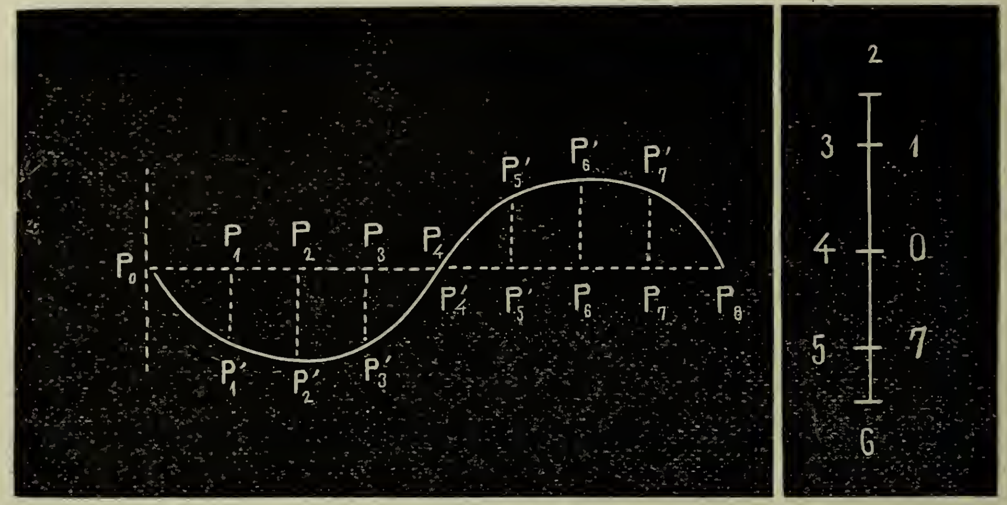


Fig. 14.

Die vertikal hin- und herschwingende Bewegung irgend eines der Punkte P_0, P_1, P_2, ..., P_8 sei in der separaten Figur rechts durch die vertikale gerade Linie in vergrössertem Maassstabe angedeutet. Die Bewegung des Seil-Endes P_0 beginne von der Gleichgewichtslage 0 aus nach oben; nach $\frac{1}{8}$ der Schwingungszeit $(\frac{T}{8})$ sei der Punkt P_0 von 0 nach 1 gelangt, nach $\frac{2}{8}$ der Schwingungszeit $(2\,\frac{T}{8})$ nach 2 in die äusserste Entfernung von der Gleichgewichtslage; nach $\frac{3}{8}$ der Schwingungszeit befinde er sich in 3 (identisch mit 1), nach $\frac{4}{8}$ in 4 (Gleichgewichtslage, identisch mit 0), nach $\frac{5}{8}$ in 5 u. s. f.

Theilen wir die oben definirte Strecke P_0 P_8 in 8 gleiche Theile durch die Punkte P_1, P_2, P_3, . . ., P_7, und bezeichnen wir die Länge der ganzen Strecke P_0 P_8 zur Abkürzung mit dem Buchstaben λ, so dass jede der 8 Unterabtheilungen gleich $\frac{\lambda}{8}$ zu setzen ist. Wenn das Seil-Ende P_0 den 8ten Theil seiner Schwingung vollendet hat, also von 0 nach 1 gelangt ist, so muss sich in derselben Zeit die Bewegung um den 8ten Theil der Strecke P_0 P_8, also um $\frac{\lambda}{8}$ nach rechts fortgepflanzt haben, d. h. der Punkt P_1 tritt seine Schwingung in demselben Momente an, in welchem das Seil-

Ende P_0 nach 1 gelangt ist, also den 8. Theil einer Schwingung vollendet hat; der Theilpunkt P_1 bleibt somit um $\frac{1}{8}$ einer Schwingung hinter dem Seil-Ende P_0 zurück. Ganz ebenso muss der zweite Theilpunkt P_2 um $\frac{2}{8}$ einer ganzen Schwingung zeitlich hinter dem Seil-Ende P_0 zurückstehen, der Theilpunkt P_3 um $\frac{3}{8}$ u. s. w. — Betrachten wir nun das elastische Seil in dem Zeitmomente, wo der Punkt P_0 eben seine erste ganze Schwingung vollendet und die Bewegung sich bis nach P_8 fortgepflanzt hat. Dann ist P_1 noch nicht ganz so weit wie P_0, sondern befindet sich in demselben Schwingungszustande (7), in welchem um $\frac{1}{8}$ der Schwingungszeit, d. h. um $\frac{T}{8}$ früher, sich der Punkt P_0 befand, also in P_1'. Der zweite Theilpunkt P_2 ist noch weiter zurück; er befindet sich da, wo um $2\frac{T}{8}$ früher sich P_0 befand (6), also in P_2'. Ganz ebenso befindet sich P_3 um $3\frac{T}{8}$ hinter P_0 zurück in P_3'; P_4 um $4\frac{T}{8}$ zurück in P_4'; P_5 um $5\frac{T}{8}$ zurück in P_5' u. s. w. Verbindet man alle Punkte P_0 P_1' P_2' P_3' P_4 P_5' P_6' P_7' P_8, so erhält man eine Wellenlinie, welche das Bild des elastischen Seiles in einem bestimmten Augenblicke, nämlich nach Verlauf der Schwingungszeit T darstellt. Die 3 Punkte P_0, P_4 und P_8 befinden sich in der Gleichgewichtslage, aber nur in diesem Augenblicke, denn im nächsten ist die Welle schon um ein Stück nach rechts verschoben. Die Wellenbewegung schreitet unaufhaltsam fort, kein Punkt des ganzen Seiles bleibt in Ruhe; man hat fortschreitende Wellenthäler und Wellenberge, aber keine fixen Punkte der Ruhe, keine Knotenpunkte. Wir haben hier das Urbild einer transversalen fortschreitenden Welle. Die Strecke $P_0 P_8 = \lambda$, um welche die Wellenbewegung sich während der Schwingungsdauer T fortpflanzt, heisst die Wellenlänge. Nehmen wir an die Schwingungsdauer T sei in Sekunden ausgedrückt, die Wellenlänge λ in Metermaass, so legt die fortschreitende Welle in T Sekunden die Strecke von λ Metern zurück, in einer Sekunde also die Strecke von $\frac{\lambda}{T}$ Metern. Die innerhalb einer Sekunde zurückgelegte Wegstrecke heisst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und wird mit c bezeichnet. Es ist also $\frac{\lambda}{T} = c$, oder auch $\lambda = c \cdot T$. Mit der Schwingungsdauer T hängt die Schwingungszahl, die wir mit z bezeichnen wollen, in sehr einfacher Weise zusammen. Nehmen wir an, der Punkt P_0 brauche zur Vollendung einer ganzen Schwingung z. B. 4 Sekunden, so wird er in einer Sekunde nur $\frac{1}{4}$ einer Schwingung

vollenden; d. h. seine Schwingungszahl z ist dann nur $= \frac{1}{4}$. Braucht dagegen P_0 zur Vollendung einer Schwingung nur $\frac{1}{4}$ Sekunde, so kann P_0 innerhalb einer Sekunde 4 ganze Schwingungen vollenden, d. h. für $T = \frac{1}{4}$ ist die Schwingungszahl $z = 4$; u. s. f. Allgemeiner: wenn ein schwingender Punkt in T Sekunden eine Schwingung ausführt, so wird er in einer Sekunde $\frac{1}{T}$ Schwingungen vollenden, d. h. die Schwingungszahl ist $z = \frac{1}{T}$; und umgekehrt ist $T = \frac{1}{z}$.

Da $\frac{\lambda}{T} = c$ ist, so muss also $\lambda . z = c$ sein. Wellenlänge mal Schwingungszahl ist also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit — ein ebenso einfacher als fundamentaler Satz der Wellenlehre.

Vollkommen analog, wie die transversalen, verhalten sich die longitudinalen fortschreitenden Wellen; der fundamentale Unterschied besteht nur darin, dass bei letzteren die schwingende Bewegung in der Richtung der Fortpflanzung selbst erfolgt und nicht senkrecht dazu, wie bei den transversalen Wellen. Die Folge davon ist, dass die longitudinale Wellenbewegung sich nicht in Erhebungen und Senkungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, also nicht in Wellenbergen und Wellenthälern äussert, sondern in Zusammenpressungen in der Richtung der Fortpflanzung, d. h. in Verdichtungen, und in ihrem Gegentheil, in Verdünnungen. — Eine transversale Welle von der in der letzten Figur dargestellten Form würde in eine ihr genau entsprechende longitudinale übergehen, wenn wir in dieser Figur die Entfernungen der schwingenden Punkte von der Gleichgewichtslage, statt nach oben und unten, nach rechts und nach links abtragen würden. Der Leser, der dieses Umwandlungsverfahren wirklich ausführen würde, würde erkennen, dass in der That abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen entstehen müssen und zwar dass die in der Mitte zwischen einem Wellenberg und dem nach rechts darauf folgenden Wellenthale liegenden Punkte sich in Stellen grösster Verdichtung, dagegen die Mitten zwischen einem Wellenthal und darauf folgenden Wellenberg sich in Stellen grösster Verdünnung umwandeln, wie es die Figur auf folgender Seite veranschaulicht. Der Leser wird aber auch die Ueberzeugung gewinnen, dass die transversale Welle dem Auge ein viel anschaulicheres Bild darbietet als die longitudinale. Wir werden aus diesem Grunde auch oft eine longitudinale Welle durch die ihr entsprechende transversale zur Anschauung bringen, indem wir den Leser bitten, die Wellenberge und Wellenthäler mit den am weitesten von ihrer Ruhelage entfernten

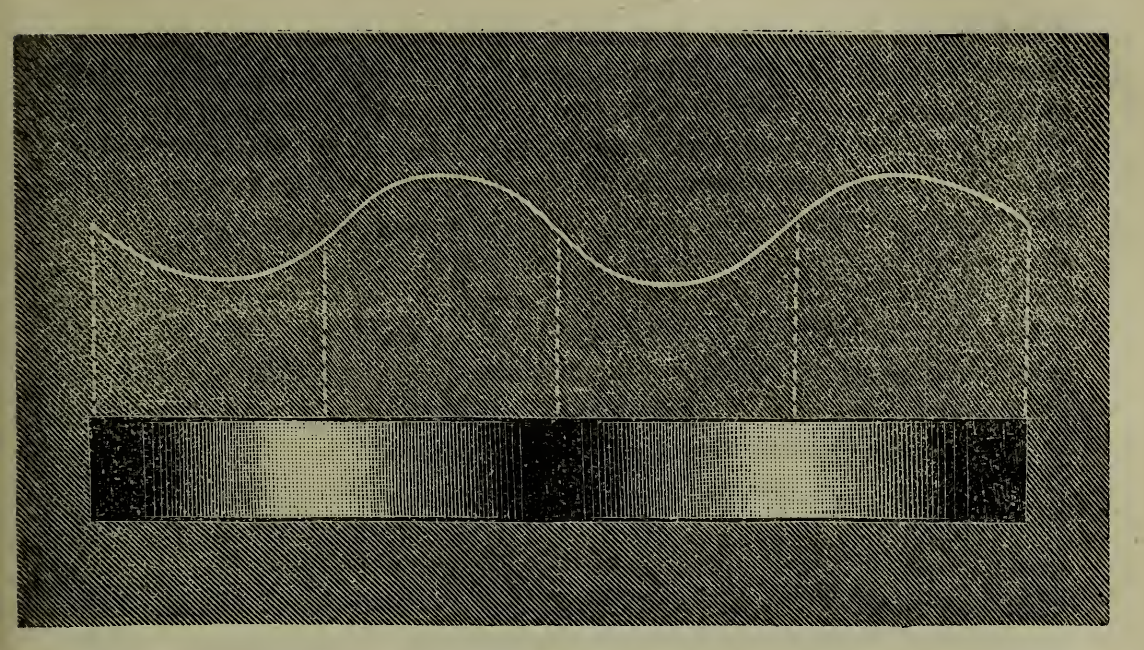


Fig. 15.

Stellen, die Mitten zwischen Wellenberg und Wellenthal dagegen mit den Stellen grösster Verdichtung und grösster Verdünnung zu identifiziren.

Die Schwingungen der Luft, welche die vermittelnde Rolle zwischen dem schallerregenden Körper und unserem Ohre bilden, gehören zur Kategorie der longitudinalen fortschreitenden Wellen. Wie sich um den Punkt, wo ein Stein ins Wasser fiel, eine transversale Wellenbewegung bildet, welche sich in konzentrischen Kreisen nach Aussen fortpflanzt, so bildet sich um den schallerregenden Körper herum eine longitudinale, in abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen bestehende Wellenbewegung, welche in konzentrischen Kugelschalen nach allen Richtungen hin fortschreitet. Auch hier werden alle Punkte der Umgebung in die Bewegung hineingezogen, allerdings um so später, je weiter sie vom Punkte der Schallerregung, also vom Centrum der Kugelschalen, entfernt sind. Auch hier gilt das eben abgeleitete Gesetz, wonach die Wellenlänge, mit der Schwingungszahl multiplizirt, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich ist ($\lambda . z = c$).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c lässt sich aber durch das Experiment messen, z. B. indem man in einer gemessenen Entfernung von einem Geschütz beobachtet, um wie viele Sekunden später als der Lichtblitz der Knall zu uns gelangt. Zahlreiche Messungen nach verschiedenen Methoden ergaben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

des Schalles in der Luft bei einer Temperatur von 0° Celsius den Werth von 331 Metern oder ungefähr $\frac{1}{3}$ Kilometer in der Sekunde (Abwesenheit von Windströmungen vorausgesetzt). Experiment und Theorie zeigen ferner übereinstimmend, dass diese Geschwindigkeit vom Barometerstande unabhängig, also z. B. in einer Höhe von 2000^{m} über Meer dieselbe ist wie am Meeresstrande; ferner dass sie mit steigender Temperatur wächst (bei 0° C = 330,7^{m}; bei 10° C = 336,7^{m}; bei 20° C = 342,6^{m}; bei 30° C = 348,4^{m}; allgemein bei t° C: $c = 330{,}7 \sqrt{1+\frac{1}{273}\cdot t}$); endlich dass sie von der Schwingungszahl unabhängig ist. (Für verschiedene gasförmige Körper ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles verschieden und zwar um so grösser, je leichter das betreffende Gas ist.) —

Kehren wir nun von der frei fortschreitenden transversalen oder longitudinalen Wellenbewegung zurück zu der Wellenbewegung schwingender Saiten, oder schwingender abgegrenzter Luftsäulen, so zeigt diese einen stabileren Charakter insofern als sich hier, wie wir oben hervorhoben, nothwendig gewisse Ruhepunkte, Knotenpunkte bilden müssen, bei einer gespannten Saite wenigstens an beiden Enden, bei einer einseitig geschlossenen Luftsäule wenigstens am verschlossenen Ende. Zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten bewegen sich alle Punkte gleichzeitig nach derselben Richtung hin, entweder nach oben resp. rechts, oder nach unten resp. links. Die fortschreitenden transversalen oder longitudinalen Wellen verhalten sich in dieser Beziehung ganz anders, wie wir sahen; dort gibt es keine stabilen Ruhepunkte, dort ist die ganze Welle in fortschreitender Bewegung begriffen. Im Gegensatz zu dieser fortschreitenden Wellenbewegung nennt man die Wellen, wie sie sich in abgegrenzten Körpern, Saiten oder Luftsäulen bilden, stehende Wellen.

Wie entstehen nun solche stehenden Wellen und in welchem inneren Zusammenhange stehen sie zu den fortschreitenden? — Wenn stehende Wellen sich nur in abgegrenzten Körpern bilden, so ist der Schluss offenbar naheliegend, dass eben die Abgrenzung die Schuld daran trägt, dass sich nicht fortschreitende, sondern stehende Wellen bilden. Es zeigt sich denn auch bei genauerer Untersuchung, dass jede fortschreitende Wellenbewegung, sobald sie auf eine irgendwie geartete Abgrenzung stösst, eine Zurückwerfung, eine Reflexion erleidet; die fortschreitende Welle wird reflektirt. Die Wirkung dieser Zurückwerfung ist (bei senkrechtem Auftreffen) genau dieselbe, als ob der fortschreitenden Welle eine ebensolche Welle direkt entgegentreten würde. Die fortschreitende Welle setzt sich mit der zurückgeworfenen

(nach dem oben erwähnten Prinzip der Superposition) zu einem neuen Wellensystem zusammen, und das Resultat dieser Zusammensetzung ist eben eine stehende Welle. Die eingehendere Betrachtung dieser Zusammensetzung ist Sache der mathematischen Analysis; nur diese vermag einen völlig klaren Einblick in die Zusammensetzung von Schwingungen zu vermitteln. Es genügt für unsere Zwecke, uns dessen bewusst zu sein, dass die fortschreitende Welle eine primäre, die stehende Welle eine sekundäre Erscheinung ist, und die Einsicht zu gewinnen, dass das Resultat der Zusammensetzung naturgemäss kaum ein anderes sein kann als eben eine stehende Welle. Nur folgende Andeutungen mögen hier noch am Platze sein.

Wenn z. B. ein Wellenberg einer fortschreitenden Welle auf eine starre Abgrenzung stösst, so verwandelt sich dieser durch den starren Widerstand, den er findet, ins Entgegengesetzte, in ein Wellenthal, und dieses erzeugt eine rücklaufende Wellenbewegung. Stösst dagegen umgekehrt ein fortschreitender Wellenberg, statt auf einen grösseren, auf einen geringeren Widerstand, so übt dies insofern eine fördernde Wirkung aus, als der Wellenberg sich in Folge dessen noch mehr erhöht, und diese Erhöhung wirkt nothwendig wie ein Impuls, der ebenfalls eine rücklaufende Wellenbewegung nach sich ziehen muss. Es sind demnach zwei Hauptfälle zu unterscheiden: Die fortschreitende Welle stösst entweder auf *grösseren*, sagen wir starren Widerstand; dann muss sich am Punkte der Abgrenzung ein Ruhepunkt oder *Knotenpunkt* bilden; oder sie stösst auf geringeren Widerstand, dann findet sie an der Abgrenzung grössere Freiheit der Bewegung und es bildet sich dort ein *Schwingungsbauch*.

Diese beiden Fälle liegen nun bei gespannten Saiten und bei abgegrenzten Luftsäulen vor.

Bei gespannten Saiten geschieht die Umwandlung einer fortschreitenden Wellenbewegung in eine stehende fast momentan, da die Saitenlänge im Verhältniss zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit sehr klein ist. Die beiden befestigten Endpunkte der Saite sind Knotenpunkte; es können sich aber ausserdem noch dazwischen Knotenpunkte bilden, nur müssen dieselben unter sich gleich weit entfernt sein und die Saite in lauter unter sich gleiche, sagen wir in n Theile eintheilen. Ist l die Länge der Saite, d die Distanz zweier benachbarter Knotenpunkte, so muss $n \, . \, d = l$ sein. — Bei der fortschreitenden Welle bezeichneten wir die Wellenlänge mit λ; sie bestand aus Wellenthal und darauf folgendem Wellenberg. Bei einer stehenden Welle können wir ebenso gut von einer Wellenlänge λ sprechen; da bei der stehenden Welle alle Punkte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten sich

nach derselben Richtung hin bewegen, in zwei benachbarten Abtheilungen der Saite aber in entgegengesetzter Richtung, und da eine ganze Wellenlänge aus Wellenberg und Wellenthal besteht, so entspricht der Entfernung zweier benachbarter Knotenpunkte eine halbe Wellenlänge, und die ganze Wellenlänge ist der Länge zweier Unterabtheilungen der schwingenden Saite gleich; d. h. es ist: $d = \frac{\lambda}{2}$ und $\lambda = 2\,d$. Daraus und aus der Beziehung $n \,.\, d = l$ folgt aber $n \,.\, \frac{\lambda}{2} = l$, und wenn wir noch die Beziehung $\lambda \,.\, z = c$ zwischen Wellenlänge, Schwingungszahl und Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu Hülfe nehmen und demgemäss $\lambda = \frac{c}{z}$ setzen: $n \,.\, \frac{c}{2z} = l$, oder $z = n \,.\, \frac{c}{2\,l}$ (Unter c ist hier offenbar die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Welle in der Saite zu verstehen). Schwingt die Saite als Ganzes, ohne Unterabtheilungen, so ist $n = 1$ und die Schwingungszahl $z = \frac{c}{2\,l}$; schwingt sie in 2 Unterabtheilungen, so ist $n = 2$ und $z = 2 \,.\, \frac{c}{2\,l}$; theilt sie sich in 3 Theile, so ist $z = 3 \,.\, \frac{c}{2\,l}$ u. s. f. Man erkennt so, dass die Schwingungszahlen der Eigentöne, welche die (unverkürzte) Saite geben kann, der vollständigen natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... entsprechen, eine Beziehung, auf die wir schon früher kamen, auf die wir aber hier aufs neue hinweisen, um genau dieselbe Betrachtungsweise auf schwingende Luftsäulen anzuwenden.

Betrachten wir nun eine in einer beiderseits offenen Röhre eingeschlossene Luftsäule. Die beiden offenen Enden dieser Röhre bilden eine Art von Abgrenzung, allerdings keine vollkommene, aber wir erkennen doch von vornherein, dass die in der Röhre eingeschlossene Luft von der ausserhalb befindlichen sich dadurch unterscheidet, dass erstere sich nur in der Längsrichtung der Röhre frei bewegen kann, letztere dagegen ungebunden nach allen Richtungen hin. Nehmen wir an, in der Längsrichtung der Röhre schreite eine Welle fort, so wird sie, am Ende der Röhre angelangt, auf geringeren Widerstand stossen, und wir haben den zweiten der oben erwähnten Fälle vor uns, wo Reflexion eintritt. Es ist nun sehr leicht, das nothwendige Resultat dieser Reflexion zu überblicken. Die resultirende stehende Welle muss am offenen Ende der Röhre einen Schwingungsbauch aufweisen; denn an einem solchen findet die grösste hin- und

hergehende Bewegung statt, dort kann in Folge des freien Ausweichens keine Stauung, also weder Verdichtung noch Verdünnung entstehen. Die Kommunikation mit der freien Luft am Röhrenende bewirkt, dass die Dichtigkeit der Luftsäule am offenen Ende mit derjenigen der äusseren Luft übereinstimmen muss, also keinen grossen Schwankungen unterworfen sein darf. Diese Unveränderlichkeit der Dichtigkeit findet sich nur an Schwingungsbäuchen, und desshalb muss am offenen Ende stets ein Bauch liegen.

Die weiteren Schlüsse ergeben sich nun von selbst. Die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Schwingungsbäuche ist dieselbe wie diejenige zweier aufeinanderfolgender Knoten, also gleich $\frac{\lambda}{2}$. In der Mitte zwischen je 2 Bäuchen liegt ein Knoten. Nehmen wir eine beiderseits offene Röhre von der Länge l, so muss bei der einfachsten Art stehender Schwingungen der darin befindlichen Luftsäule an beiden Enden je ein Bauch, in der Mitte also ein Knoten entstehen, wie folgende Figur andeutet, wo der grösseren Anschaulichkeit wegen statt der longitudinalen die entsprechende transversale Welle eingezeichnet ist:

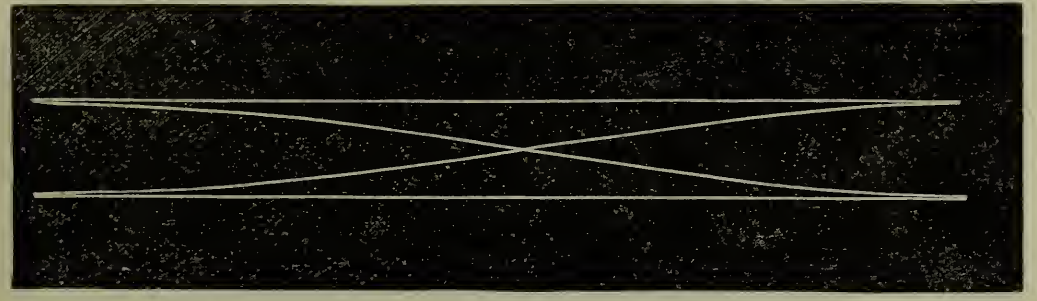


Fig. 16.

Es können sich aber auch, genau wie bei einer Saite, schwingende Unterabtheilungen bilden, sobald nur die eine Bedingung erfüllt ist, dass am Ende der Röhre stets Schwingungsbäuche liegen. Man erhält bei Bildung von 2, 3, 4, . . . schwingenden Unterabtheilungen die auf folgender Seite angegebenen schematischen Bilder. Jeder dieser Schwingungsarten entspricht eine bestimmte Wellenlänge und Schwingungszahl, jeder eine andere. Die Länge l der Röhre muss immer ein Vielfaches der Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schwingungsbäuchen, also ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ sein, d. h. es ist, wie bei einer Saite, $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, oder da $\lambda \cdot z = c$ ist, $l = n \cdot \frac{c}{2\,z}$ oder $z = n \cdot \frac{c}{2\,l}$, wo bei der einfachsten Schwingungs-

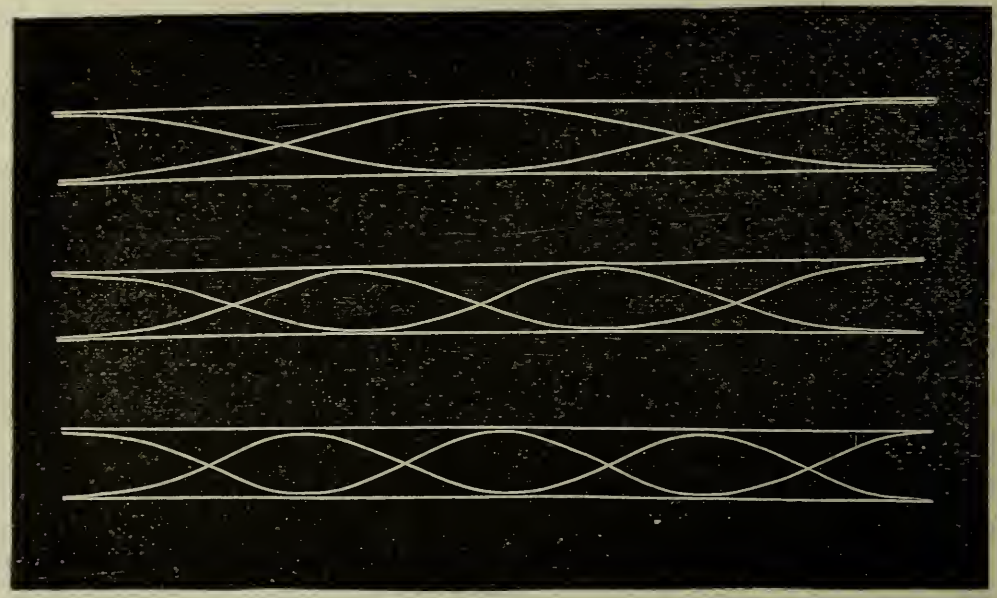


Fig. 17.

art n = 1, bei 2 schwingenden Unterabtheilungen n = 2, bei 3 solchen n = 3, u. s. w. ist. Die Schwingungszahlen der Eigentöne, welche eine tönende Luftsäule, die in einer beiderseits offenen Röhre eingeschlossen ist, zu geben vermag, entsprechen also auch hier der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., genau wie bei einer Saite. — Die Schwingungszahl des tiefsten dieser Töne ist $z = \frac{c}{2\,l}$. —

Betrachten wir endlich noch die möglichen stehenden Schwingungen einer Luftsäule, die sich in einer an dem einen Ende verschlossenen Röhre befindet. Wenn von dem offenen Ende her eine fortschreitende Welle sich heranwälzt, so stösst sie am geschlossenen Ende auf starren Widerstand, und wir haben hier den ersten der oben erwähnten Fälle vor uns, wo Reflexion eintritt. Es muss am geschlossenen Ende ein Schwingungsknoten mit dem Maximum von Wechsel zwischen Verdichtung und Verdünnung entstehen, an dem offenen Ende dagegen, genau wie oben, ein Schwingungsbauch, mit dem Maximum von hin- und hergehender Bewegung, aber unveränderlicher Dichtigkeit. In einer einseitig geschlossenen Röhre können alle diejenigen stehenden Wellen entstehen, welche der Bedingung genügen, dass am offenen Ende ein Schwingungsbauch, am geschlossenen Ende ein Schwingungsknoten liegt. Die folgenden Figuren stellen die einfacheren möglichen Fälle in schematischer Form dar.

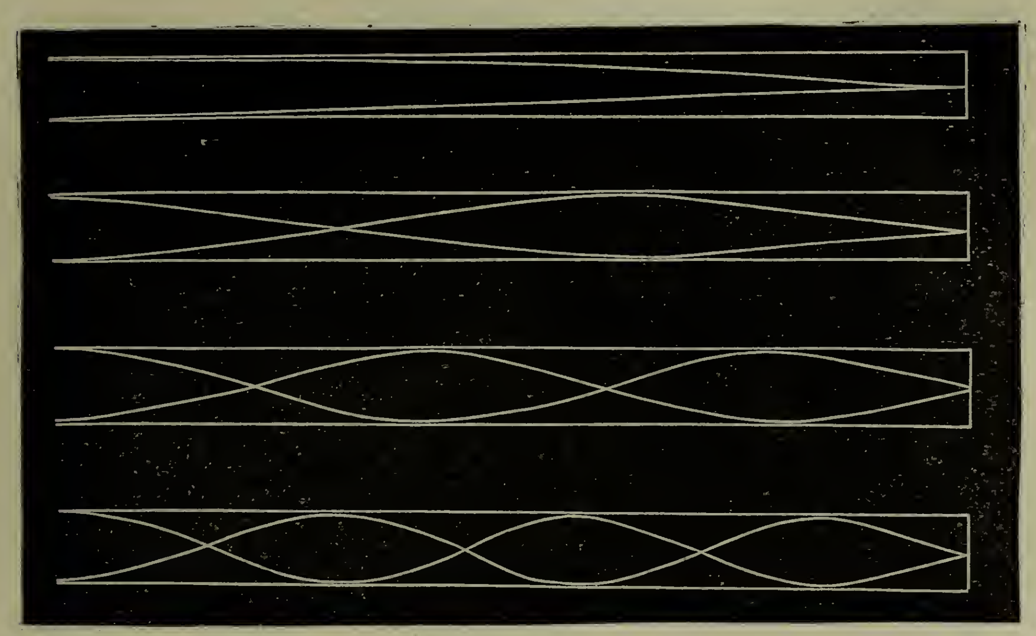


Fig. 18.

Der Abstand zwischen einem Knoten und dem nächsten Schwingungsbauch ist offenbar bei jeder stehenden Welle halb so gross wie der Abstand zwischen 2 benachbarten Knoten, also gleich $\frac{d}{2}$, oder gleich $\frac{\lambda}{4}$. Im einfachsten Falle, entsprechend der ersten der obigen Figuren, ist die Länge der Luftsäule gleich der Entfernung des Knotens am rechten Ende vom nächsten Schwingungsbauch am linken Ende, d. h. $l = \frac{\lambda}{4}$. Im zweiten der oben dargestellten Fälle liegt zwischen den beiden Enden der Röhre $\frac{1}{4}$ einer Wellenlänge und ausserdem noch $\frac{1}{2}$; es ist also hier $l = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3\frac{\lambda}{4}$. Im dritten Falle liegen zwischen den beiden Röhrenenden $\frac{1}{4}$ einer Wellenlänge und ausserdem 2 halbe Wellenlängen, also $l = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 5\frac{\lambda}{4}$ u. s. w. Allgemein ist offenbar die Entfernung irgend eines Schwingungsbauches von einem beliebigen Schwingungsknoten ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, also gleich $(2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Es können sich in der einseitig offenen Röhre von der Länge l alle diejenigen stehenden Wellen bilden, deren Wellenlängen λ der Bedingung $l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ ge-

nügen. Ersetzen wir wieder gemäss der Beziehung $\lambda z = c$ die Wellenlänge λ durch den Bruch $\frac{c}{z}$, so wird $l = (2n + 1) \cdot \frac{c}{4z}$ oder $z = (2n + 1) \frac{c}{4l}$.

Für $n = 0$ ist, dem einfachsten Falle entsprechend $z = \frac{c}{4l}$; für $n = 1$ ist, entsprechend der zweiten der obenstehenden Figuren, $z = 3 \cdot \frac{c}{4l}$; für $n = 2$ ist weiter $z = 5 \cdot \frac{c}{4l}$; für $n = 3$ entsprechend der letzten der Figuren $z = 7 \cdot \frac{c}{4l}$, u. s. w.

Die Schwingungszahlen der Eigentöne, welche eine auf der einen Seite geschlossene, auf der andern Seite offene Röhre, oder vielmehr die darin befindliche Luftsäule, geben kann, verhalten sich also wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, . . . Die Schwingungszahl des tiefsten dieser Töne ist $z = \frac{c}{4l}$. — Vergleichen wir hiermit die Schwingungszahl des tiefsten Tones einer beiderseits offenen Röhre, für welche wir $z = \frac{c}{2l}$ fanden, so erkennen wir, dass letztere doppelt so gross ist als erstere, und daraus ergibt sich ohne Weiteres, dass der tiefste Ton oder der Grundton einer einseitig gedeckten Röhre um eine Oktave tiefer ist als der Grundton einer gleich langen beidseitig offenen Röhre. Für ersteren haben wir $z = \frac{c}{4l}$, für letzteren $z = \frac{c}{2l}$. Hierin ist für c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft, bei einer mittleren Temperatur von 15° Celsius also rund 340 Meter zu setzen.

67—71. Die Labialpfeifen der Orgel.

67. Einrichtung einer Labialpfeife, Entstehung des Pfeifentones. Mögliche Eigentöne einer offenen und einer gedeckten Pfeife. — Auf den Schwingungen abgegrenzter Luftsäulen beruhen die Klänge der Orgelpfeifen. Es gibt zwei Hauptgattungen von Orgelpfeifen: Labialpfeifen und Zungenpfeifen.

Betrachten wir zuerst die Labialpfeifen, auch Lippenpfeifen oder Flötenpfeifen genannt, bei denen die Eigen-

schwingungen einer abgegrenzten Luftsäule am reinsten zur Geltung kommen. Die folgende Figur stellt den Längsschnitt einer solchen Pfeife schematisch dar.

Der unterste Theil der Pfeife heisst der Fuss; er ist nach oben abgegrenzt durch den Kern *k*, welcher jedoch den Fuss nicht ganz abschliesst, sondern die sog. Kernspalte *s* freilässt. Die Luftsäule, durch deren stehende Schwingungen der Ton erzeugt wird, ist im Pfeifenkörper *r r* eingeschlossen, dessen Querschnitt entweder rechteckig oder kreisrund zu sein pflegt. Unmittelbar oberhalb des Fusses ist am Pfeifenkörper seitlich eine meist rechteckige Oeffnung angebracht, der sog. Aufschnitt *a*, nach oben begrenzt durch das Oberlabium oder die Oberlippe *l*, die nach dem Aufschnitt zu in eine scharfe Kante ausläuft; von unten her begrenzt durch den oberen Rand des sog. Vorschlages, das Unterlabium oder die Unterlippe *u*. Durch das Ansatzrohr bei *d* (Windrohr) strömt von der Windlade der Orgel her ein Luftstrom in den Pfeifenfuss, entweicht aus diesem in Form eines bandförmigen Streifens durch die Kernspalte *s* und stösst auf die ihr entgegenstehende Kante der Oberlippe *l*. Die Entstehung stehender Schwingungen im Pfeifenkörper kann man sich nun in folgender Weise denken: Der von unten kommende Luftstrom bricht sich an der Oberlippe und theilt sich dort in 2 Theile; der eine Theil geht nach dem Innern der Pfeife und ruft eine Kompression, eine Verdichtung hervor, die sich nach dem oberen Ende der Pfeife zu fortpflanzt; der andere Theil des Luftstromes zweigt nach der anderen Seite der Oberlippe, also nach Aussen ab, und übt — wie jeder Luftstrom, der über eine Oeffnung hinwegstreicht — eine saugende Wirkung aus, welche bewirkt, dass der Verdichtung im Pfeifenkörper unmittelbar eine Verdünnung nachfolgt.

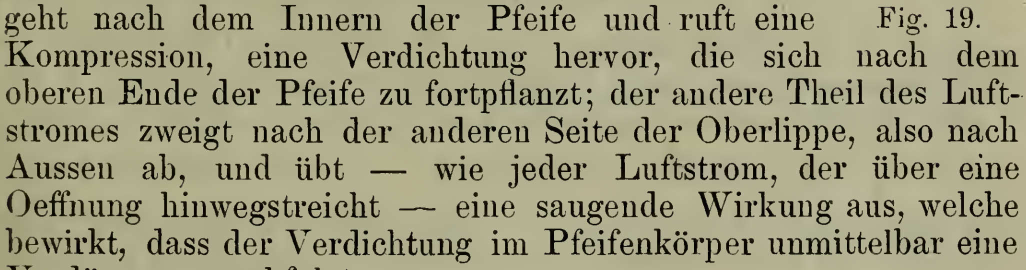


Fig. 19.

Verdichtung mit daranschliessender Verdünnung bilden eine fortschreitende Welle, welche am oberen Ende des Pfeifenkörpers, mag es gedeckt oder offen sein, eine Reflexion erleidet und sich dadurch in eine stehende Welle verwandelt. Diese kann aber nur von solcher Art sein, dass da, wo direkte

Kommunikation mit der äusseren Luft herrscht, sich ein Schwingungsbauch bildet, dagegen da, wo jede Bewegungsfreiheit vollkommen gehemmt ist, wie z. B. am oberen Ende einer gedeckten Pfeife, ein Schwingungsknoten entsteht. Die Bildung solcher stehender Wellen erfolgt sozusagen momentan; bei den allerlängsten Orgelpfeifen von 32 Fuss Länge dauert sie nicht über $\frac{1}{15}$ einer Sekunde. Hat sich aber einmal eine solche stehende Welle gebildet, so beeinflusst diese wiederum rückwärts das sich an der Oberlippe brechende Luftband, dem sie ihre Entstehung verdankt. Dieses Luftband schwingt abwechselnd nach Aussen und nach Innen, je nach der Bewegungsrichtung, welche die schwingende Luftsäule an ihrem unteren Ende, am Aufschnitt hat. Das Luftband ist unentbehrlich, um die Schwingungen dauernd aufrecht zu erhalten, weil ohne dessen immer erneuten Impuls die schwingende Luftsäule in Folge innerer Bewegungswiderstände sehr rasch zur Ruhe kommen würde.

Es bedarf nun keiner ausführlichen Erörterung mehr, um sich darüber Klarheit zu verschaffen, welche Töne eine Pfeife von bestimmter Länge zu geben vermag. Man hat nur immer im Auge zu behalten, dass am unteren Ende der Pfeife, wo die Luftsäule mit der äusseren Luft in Verbindung steht, also am Aufschnitt, ein Schwingungsbauch entstehen muss, dagegen am oberen Ende ein Bauch oder ein Knoten, je nachdem es offen oder gedeckt ist.

Bei einer offenen Orgelpfeife ist die Länge des Pfeifenkörpers stets gleich der Distanz zweier Schwingungsbäuche, also ein Vielfaches einer halben Wellenlänge, d. h. es ist $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, wenn l die Pfeifenlänge, λ die Wellenlänge (Wellenthal plus Wellenberg) und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. λ kann alle Werthe annehmen, welche sich hieraus ergeben, nämlich $\lambda = \frac{2l}{n}$, also für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Werthe $\lambda = 2l$, $\frac{1}{2} \cdot 2l$, $\frac{1}{3} \cdot 2l$, $\frac{1}{4} \cdot 2l \ldots$ Die Wellenlängen der Töne, welche die Pfeife geben kann, verhalten sich also wie die einfachen Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die Wellenlängen, also wie

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Eine offene Orgelpfeife ist also, ebenso wie eine schwin-

gende Saite, fähig die ganze Reihe der natürlichen Obertöne bis zu einer bestimmten Grenze hinauf anzugeben.

Unter Benützung der unter der vorigen Nummer abgeleiteten Beziehung $\lambda \cdot z = c$, wonach Wellenlänge λ multiplizirt mit Schwingungszahl z gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist, lassen sich die Schwingungszahlen aller möglichen Töne einer offenen Pfeife in dem einen Ausdruck zusammenfassen: $z = \frac{c}{\lambda} = n \cdot \frac{c}{2l}$, wo $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ist.

Es ist zu bemerken, dass in der Regel mehrere dieser Schwingungsarten gleichzeitig entstehen — ganz wie bei einer Saite — und dass dann die schwingende Bewegung der Luftsäule die Summe aller Einzelbewegungen ist, d. h. mit anderen Worten:

Der Klang der Pfeife enthält im Allgemeinen eine grössere oder geringere Zahl von Obertönen oder Partialtönen, entsprechend der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Bei einer gedeckten Orgelpfeife sind die Verhältnisse insofern anders, als am oberen Ende sich ein Knoten bilden muss. Die Länge des Pfeifenkörpers muss also gleich der Entfernung von einem Schwingungsbauche zu einem Schwingungsknoten, also ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge sein, d. h. es ist $l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, und $\lambda = \frac{4l}{2n+1}$, wo $n = 0$, 1, 2, 3, 4, ... sein kann. Die Wellenlängen der möglichen Töne, welche eine gedeckte Pfeife geben kann, sind also $\lambda = 4l$, $\frac{1}{3} \cdot 4l$, $\frac{1}{5} \cdot 4l$, $\frac{1}{7} \cdot 4l$, ... , d. h. sie verhalten sich wie die einfachen ungeradzahligen Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\ldots$$

Die entsprechenden Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, also wie die ungeraden Zahlen

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Eine gedeckte Orgelpfeife kann also nur Partialtöne oder Obertöne ungeraden Ranges geben.

Ersetzen wir auch hier die Wellenlänge λ durch $\frac{c}{z}$, so sind die Schwingungszahlen aller Töne, welche eine gedeckte Pfeife geben kann, in dem Ausdrucke $z = (2n + 1) \cdot \frac{c}{4l}$ enthalten, wo $n =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... sein kann. Der Grundton, für

den $z = \frac{c}{4l}$ ist, ist um eine Oktave tiefer als der Grundton einer gleich langen offenen Pfeife $(z = \frac{c}{2l})$.

Auch hier werden im Allgemeinen mehrere der überhaupt möglichen Schwingungsarten gleichzeitig auftreten, so dass sich die Gesammtbewegung aus mehreren Einzelbewegungen zusammensetzt, d. h. der Klang einer gedeckten Pfeife wird im Allgemeinen mehrere Obertöne oder Partialtöne enthalten, aber immer nur solche ungeraden Ranges; also z. B., wenn der Grundton (1) das grosse *C* ist: die Quinte der nächsthöheren Oktave $(3 = 2 \cdot \frac{3}{2})$, d. h. das kleine *g*, ferner die grosse Terz der zweiten Oktave $(5 = 4 \cdot \frac{5}{4})$, also das eingestrichene $\bar{e}$ u. s. f.

Eine offene Pfeife von derselben Länge wird dagegen als Grundton das kleine *c* geben, als Obertöne die Töne $\bar{c}$, $\bar{g}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{e}}$, $\bar{\bar{g}}$, ...

Unter gleichen Bedingungen sind also die Klänge offener Orgelpfeifen viel reicher an Obertönen als diejenigen gedeckter. Die sog. Gedackten (gedeckte Pfeifen) der Orgel haben aus diesem Grunde einen wesentlich dumpferen, sanfteren Klangcharakter als die offenen Pfeifen. —

68. Abhängigkeit der Tonhöhe von Länge und Weite der Pfeife. Regel von Cavaillé-Coll, reduzirte Länge. Einfluss der Temperatur und der Stärke des Anblasens. — Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass genau am Aufschnitt der Orgelpfeifen und genau am offenen oberen Ende sich Schwingungsbäuche bilden. In Wirklichkeit ist das zwar annähernd, aber nicht vollkommen der Fall, und es ist der Grund davon auch leicht einzusehen. Der Uebergang von der einseitigen Beweglichkeit der Lufttheilchen innerhalb des Pfeifenkörpers zu der allseitigen Bewegungsfreiheit ausserhalb desselben ist kein plötzlicher, sprungweiser, sondern ein allmählicher. Der Aufschnitt und das offene obere Ende einer Pfeife bilden keinen vollkommenen Abschluss für die stehende Welle innerhalb der Pfeife, sondern die Welle ragt noch ein Stück weit über das offene Ende und über den Aufschnitt hinaus, und die Schwingungsbäuche hat man sich also nach Aussen hin verschoben zu denken. Je weiter im Verhältniss zum Querschnitt der schwingenden Luftsäule die Oeffnung ist, durch welche die Luftsäule im Innern der Pfeife mit der Aussenwelt in Verbindung steht, um so weniger weit wird die stehende Welle

über die Grenzen der Pfeife hinausragen, um so geringer wird die Abweichung von der oben entwickelten Theorie sein, und um so weniger weit von der Oeffnung wird man den Schwingungsbauch zu suchen haben. Es verhält sich damit einigermaassen ähnlich, wie ein Luftstrom, der aus einem geschlossenen Raume durch eine Oeffnung ins Freie strömt, bei enger Oeffnung auf grössere Entfernung hin fühlbar ist als bei weiter. Unsere oben aufgestellte Theorie wird also nur dann mit der Wirklichkeit genau übereinstimmen, wenn wir die Distanz, um welche die Schwingungsbäuche nach Aussen hin verschoben sind, zur wirklichen Länge des Pfeifenkörpers hinzuzählen. Für eine offene Pfeife wird also die Schwingungszahl des Grundtons nicht gleich $\frac{c}{2l}$ sein, sondern man wird $z = \frac{c}{2(l+x)}$ zu setzen haben, wo x die an der Länge l anzubringende Korrektion bedeutet. Diese Korrektion x wird sich zusammensetzen einerseits aus der Distanz, um welche die stehende Welle über das offene obere Ende der Pfeife hinausragt, andrerseits aus der Distanz, um welche beim Aufschnitt der Schwingungsbauch nach Aussen gerückt ist; nach der oben gemachten Bemerkung wird letztere Distanz, wegen der geringeren relativen Grösse des Aufschnitts, grösser sein als erstere*). — Ganz ebenso wird für den Grundton einer gedeckten Pfeife die Schwingungszahl nicht gleich $\frac{c}{4l}$ sein, sondern durch den Ausdruck $z = \frac{c}{4(l+x_1)}$ zu bestimmen sein, wo die Korrektion x_1 sich nur auf das untere Ende beim Aufschnitt zu beziehen hat, also (ceteris paribus) kleiner sein wird, als bei einer offenen Pfeife.

In beiden Fällen, sowohl bei der offenen als bei der gedeckten Pfeife, wird also der Ton tiefer sein, als er sein würde, wenn wirklich genau am Aufschnitt und am offenen Ende sich Schwingungsbäuche bilden würden.

Es erweist sich nun, dass — wie es übrigens nach den vorstehenden Betrachtungen natürlich ist — die Korrektion x

*) Nach der von Helmholtz aufgestellten Theorie ragt bei cylindrischen Röhren die Welle um $\frac{\pi}{4}R = 0{,}7854\ R$ über das offene Ende hinaus, wenn R der Radius des kreisförmigen Querschnitts ist. Dieser Fall trifft auf das obere Ende einer cylindrischen Orgelpfeife zu, wenn der Rand weder aus- noch eingebogen ist. Beim Aufschnitt ist jedoch die Oeffnung wesentlich kleiner als der Querschnitt und wächst nicht proportional mit dem Querschnitt; die Korrektion für dieses Ende ist desshalb grösser und wächst rascher mit zunehmendem Querschnitt.

(resp. x_1) von der Weite der Pfeife, insbesondere von der Tiefe senkrecht zum Aufschnitt, und von der Grösse des Aufschnitts selbst abhängt, dagegen von der Länge der Pfeife völlig unabhängig ist.

Der Pariser Orgelbauer Cavaillé-Coll hat eine sehr einfache Regel gegeben, um die Grösse dieser Korrektion für offene rechteckige und cylindrische Orgelpfeifen zu berechnen. Für erstere ist nämlich die Korrektion gleich der doppelten Tiefe zu setzen, wenn man unter der Tiefe die senkrechte Entfernung der Lippe von der gegenüberliegenden Pfeifenwand versteht; für cylindrische Pfeifen ist dagegen die Korrektion gleich $\frac{5}{3}$ des Durchmessers der Pfeife. Bei offenen Pfeifen gilt für den Grundton die Beziehung $z = \frac{c}{2(l + x)}$, also $l + x = \frac{c}{2z}$ und somit

$$l = \frac{c}{2z} - x$$

Bezeichnen wir die Tiefe einer rechteckigen Pfeife mit T, den Durchmesser einer cylindrischen Pfeife dagegen mit D, so ist also nach der Regel von Cavaillé-Coll

$$\text{für offene rechteckige Pfeifen: } l = \frac{c}{2z} - 2\,T$$

$$\text{für offene cylindrische Pfeifen: } l = \frac{c}{2z} - \tfrac{5}{3}\,D.$$

Bei diesen durch Versuche gewonnenen Regeln ist zwar nicht auf alle bestimmenden Faktoren (z. B. nicht auf die Grösse des Aufschnittes) Rücksicht genommen, sie geben aber immerhin eine hinreichende Genauigkeit, um praktische Anhaltspunkte zur Berechnung der Pfeifenlänge für jeden gewünschten Ton zu geben.

Nehmen wir z. B. an, wir sollen die Länge einer rechteckigen offenen Pfeife bestimmen, welche, bei einer Tiefe von 3 cm, das Normal-$\bar{a}$ von 435 Schwingungen geben soll. Dann ist für c die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, in Centimetern ausgedrückt, zu setzen, also bei einer mittleren Temperatur von 15° C der Werth 34 000, und es folgt die Länge der Pfeife

$$l = \frac{34\,000}{870} - 6 = 39{,}1 - 6 = 33{,}1 \text{ Centimeter.}$$

Wäre die Pfeife cylindrisch und hätte sie einen Durchmesser von 3 Centimetern, so müsste ihre Länge

$$l = \frac{34\,000}{870} - \tfrac{5}{3} \cdot 3 = 39{,}1 - 5 = 34{,}1 \text{ Centimeter}$$

werden, also um 1 Centimeter grösser als die Länge der rechteckigen Pfeife von derselben Tonhöhe.

Die auf solche Weise korrigirte wirkliche Länge $(l + x)$ der Pfeife heisst die reduzirte Länge.

Es ergibt sich also aus unseren Betrachtungen, dass die Tonhöhe einer Pfeife zwar in allererster Linie und in hervorragendstem Maasse von deren Länge abhängt, dass aber ausserdem in geringerem Maasse noch andere Faktoren von Einfluss sind, namentlich die Weite der Pfeife. Von zwei gleich langen Pfeifen wird die weitere, oder wie man sich technisch ausdrückt, diejenige mit der weiteren Mensur einen etwas tieferen Ton als die engere geben. Würden wir z. B. die eben erwähnte cylindrische Pfeife von der Länge von 34,1 Centimetern und dem Durchmesser von 3 cm mit einer gleich langen engeren vertauschen, welche nur einen Durchmesser von 1,5 Centimetern hat, so würden wir finden, dass die engere Pfeife um ungefähr einen halben Ton höher steht als die doppelt so weite.

Die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Mensur bewirkt auch, dass eine offene Pfeife, wenn sie gedeckt wird, nicht genau die nächst tiefere Oktave gibt, sondern einen etwas höheren Ton, so dass das Intervall der beiden Töne zwischen der Oktave und der grossen Septime liegt. (Ist für die offene Pfeife $z = \frac{c}{2(l + x)}$, so ist für die gleich lange gedeckte $z_1 = \frac{c}{4(l + x_1)}$, also $\frac{z}{z_1} = 2 \cdot \frac{l + x_1}{l + x}$, also < 2, da x_1 kleiner ist als x.)

Ebensowenig wird eine offene Pfeife, wenn wir sie in der Mitte durchschneiden, genau die nächst höhere Oktave hören lassen, sondern weil das Verhältniss der Weite zur Länge für die halbe Pfeife grösser ist als für die ganze, die Mensur also gewachsen ist, einen etwas tieferen Ton. (Ist für die ganze Pfeife $z_1 = \frac{c}{2(l + x)}$, so ist für die Hälfte $z = \frac{c}{2(\frac{l}{2} + x)}$, also $\frac{z}{z_1} = \frac{l + x}{\frac{l}{2} + x}$ d. h. $\frac{z}{z_1} = 2 \cdot \frac{l + x}{l + 2x} < 2$.)

Das Verhältniss der höheren Eigentöne zum Grundtone einer Pfeife wird durch Verschiedenheiten der Mensur nur wenig beeinflusst, wenn die Mensur nicht sehr weit wird.

Abgesehen von allen oben erwähnten Faktoren hängt die Tonhöhe einer Pfeife nicht unwesentlich von der Temperatur ab und zwar in demselben Maasse, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

des Schalles von der Lufttemperatur abhängig ist. Da für eine offene Pfeife $z = \frac{c}{2(l+x)}$, für eine gedeckte $z = \frac{c}{4(l+x_1)}$ ist, so würde z bei steigender Temperatur nur dann unverändert bleiben, wenn $l + x$ in demselben Grade wachsen würde wie c; das ist aber keineswegs der Fall, da die Längenausdehnung der Pfeife im Verhältniss zur Ausdehnung der Luft sehr klein ist. Vernachlässigt man erstere und setzt man $c = 330{,}7 \, . \sqrt{1+\frac{1}{273} \, . \, t}$, so findet man, dass bei einer Temperatur von 33° Celsius die Tonhöhe einer Labialpfeife um ungefähr einen temperirten Halbton höher steht als bei einer Temperatur von 0°. —

Die oben entwickelte Theorie der Abhängigkeit der Tonhöhe von der Länge und der Tiefe der Pfeifen bezieht sich auf Pfeifen von rechteckig-prismatischer und cylindrischer Form unter der Voraussetzung, dass die Länge die andern Dimensionen weit überragt. Die überwiegende Mehrzahl aller Labialpfeifen der Orgel gehört diesem Typus an; diejenigen Pfeifengattungen, welche zur Erzielung einer besonderen Klangwirkung pyramidenförmige oder kegelförmige Gestalt (aufrecht oder verkehrt) erhalten, sind immerhin noch von der Art, dass die Länge die vorherrschende Dimension ist. Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so ist das Gesetz der Abhängigkeit der Tonhöhe von den Dimensionen des Hohlraumes ein viel verwickelteres, unter Umständen ausserordentlich komplizirtes. — Es genügt, hier darauf aufmerksam zu machen, dass der Ton einer offenen cylindrischen Pfeife durch Einbiegen des oberen Randes etwas vertieft, durch Ausbiegen etwas erhöht wird, was sich der Leser nach den vorgetragenen Lehren leicht wird erklären können. Man kann den Ton einer offenen Pfeife durch theilweises Zudecken der oberen Oeffnung allmählich tiefer machen, wobei der Ton freilich nicht nur seine Höhe, sondern auch seine Klangfarbe verändert. Bei gänzlichem Zudecken geht er sprungweise annähernd in die nächst tiefere Oktave über.

Dieses Mittel, den Ton einer Pfeife bei unveränderter Länge derselben innerhalb gewisser Grenzen zu erhöhen oder zu vertiefen, wird zum Stimmen der Labialpfeifen verwendet. Man bedient sich bei offenen Pfeifen des sog. Stimmhorns, eines hohlen Kegels, der, wenn Erhöhung des Tones bewirkt werden soll, mit der Spitze nach unten in das offene Ende der Pfeife eingetrieben wird, so dass sich der Rand erweitert, bei beabsichtigter Vertiefung dagegen mit dem Hohlraum nach unten, so dass sich der Rand einbiegt:

Andere Mittel, die Stimmung von Labialpfeifen zu reguliren, bestehen darin, dass man nahe am obern Rande aus der Seitenwand der Pfeife eine rechteckige Oeffnung ausschneidet, die grösser und kleiner gemacht werden kann, und zwar bei Zinnpfeifen durch Aufrollen oder Abrollen eines Zinnstreifens (Stimmrolle), bei Holzpfeifen durch einen verschiebbaren Verschluss (Stimmschieber). Bei Gedackten ist die obere Deckplatte verschiebbar (s. Fig. 22 a, c). Die Besprechung aller dieser Stimmvorrichtungen gehört in Spezialschriften über Orgelbau.

Noch ist zu erwähnen, dass auch die Stärke des Anblasestroms Einfluss auf die Tonhöhe hat. Jeder Spieler von Blasinstrumenten weiss, dass durch stärkeres Anblasen der Ton sich etwas in die Höhe „treiben“ lässt, und zwar ungefähr innerhalb der Grenzen eines Halbtons. Wird der Anblasestrom noch erheblich verstärkt, so kann man durch „Ueberblasen“ den nächsten Oberton erhalten, also bei offenen Pfeifen die höhere Oktave (2), bei gedeckten die Quinte der Oktave, d. h. die Duodecime (3), nebst höheren Obertönen. So bekannt diese Thatsache ist, so schwierig ist ihre streng wissenschaftliche Erklärung. Ein Erklärungsversuch soll hier skizzirt werden.

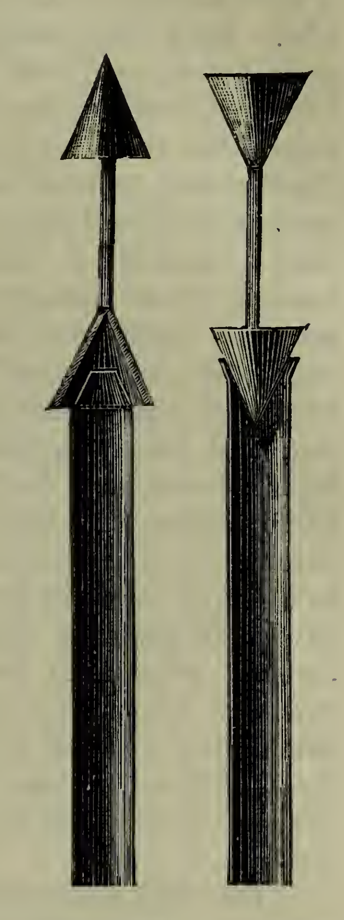


Fig. 20.

Wenn man mit einem Stocke oder mit einer Reitgerte einen Hieb durch die Luft ausführt, so hört man ein pfeifendes Geräusch, dem zwar keine scharf begrenzte Tonhöhe zukommt, von dem wir aber immerhin erkennen, dass es höher wird, wenn die Wucht des Hiebes gesteigert, d. h. die Geschwindigkeit der Bewegung durch die Luft vergrössert wird. Der Stock presst die Luft, auf die er stösst, zusammen und lässt hinter sich umgekehrt einen verdünnten Raum, in welchen die komprimirte Luft nachstürzt. Durch dieses Nachstürzen entsteht ein Stoss. Je rascher der Stock geschwungen wird, um so rascher werden sich diese Stösse folgen und um so heftiger wird sich auch das Nachstürzen der komprimirten Luft in den verdünnten Raum vollziehen. Es erklärt sich also, dass bei gesteigerter

Wucht des Hiebes das pfeifende Geräusch stärker und zugleich höher wird. Eine ganz ähnliche Wirkung wird man hervorbringen, wenn nicht der Stock durch die Luft saust, sondern umgekehrt ein starker Luftstrom sich an dem Stocke bricht; es kommt hierbei nur auf die relative Bewegung an. Wenn man also einen Luftstrom gegen eine scharfe Kante richtet, so wird ein Reibungsgeräusch entstehen, das, obschon es nicht als eigentlicher Ton bezeichnet werden kann, doch um so höher wird, je stärker der Luftstrom ist, d. h. je mehr die Geschwindigkeit der bewegten Luft gesteigert wird. Ein solches Reibungsgeräusch wird bei einer Labialpfeife durch den Luftstrom hervorgebracht, der aus dem Pfeifenfuss tretend sich an der Oberlippe bricht. Nach der von Strouhal aufgestellten Theorie wird aus dem Tongemische, als welches man das Reibungsgeräusch auffassen kann, gerade derjenige Ton herausgesucht und durch Resonanz verstärkt, der dem Eigentone der Pfeife entspricht. Wird durch verstärktes Anblasen die Höhe des Reibungstones gesteigert, so passt sich der Eigenton der Pfeife innerhalb enger Grenzen dem Reibungstone an, steigt also mit ihm bis zu einem gewissen Punkte, von wo an er nicht mehr zu folgen vermag; wenn dann endlich der Anblasestrom so stark geworden ist, dass der Reibungston sich bis zum nächsten Partialton der Pfeife erhöht hat, so wird eben das Ueberblasen eintreten und die Pfeife ihren nächsten Oberton hören lassen. Durch noch stärkeres Anblasen können unter Umständen noch höhere Partialtöne hervorgerufen werden. —

69. Abhängigkeit der Klangfarbe von Mensur, Aufschnitt und Luftzufluss. Stimmengattungen der Orgel: Prinzipalstimmen, Streicher, Flötenregister, Gedackte, Füllstimmen, Mixturregister. — Die Klangfarbe des Tones einer Labialpfeife ist zum Theil von denselben Faktoren abhängig wie die Tonhöhe. Es sind im Wesentlichen 3 Momente, welche die Klangfarbe beeinflussen: Die Mensur, die Grösse des Aufschnittes und der Luftzufluss.

Die Mensur einer Pfeife wird gewöhnlich als das Verhältniss der Weite derselben zu ihrer Länge definirt. Je grösser dieses Verhältniss ist, um so weiter mensurirt heisst die Pfeife. Insofern als die Weite verschieden ausgedrückt werden kann, nämlich entweder durch den Querschnitt in Flächenmaass, oder durch den Durchmesser in Längenmaass, verlangt der Begriff der Mensur eine genauere Definition. Man pflegt in der Praxis in der Regel unter der Mensur bei cylindrischen Pfeifen mit kreisförmigem Querschnitt das Verhältniss des Durchmessers

zur Länge zu verstehen, bei den rechteckig-prismatischen Pfeifen mit quadratischem Querschnitt das Verhältniss der Tiefe (d. h. der Quadratseite) zur Länge. In diesem Sinne aufgefasst variirt die Mensur der verschiedenen Arten von Labialpfeifen der Orgel zwischen den Grenzen $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{25}$, d. h. in Worten: bei den Pfeifen der weitesten Mensur ist die Länge ungefähr das 9fache des Durchmessers (resp. der Tiefe), bei den Pfeifen engster Mensur dagegen das 25fache.

Aehnlich wie eine schwingende Saite um so weniger leicht auf Flageolet-Töne anspricht, d. h. um so schwerer sich in schwingende Unterabtheilungen, den Partialtönen entsprechend, theilt, je dicker sie im Verhältniss zur Länge ist, so ist auch eine weite Mensur der Pfeifen der Entwicklung von Partialschwingungen, d. h. von Obertönen hinderlich, eine enge Mensur dagegen förderlich. Es kann daher als Regel aufgestellt werden, dass — unter übrigens gleichen Umständen — engmensurirte Pfeifen einen Klang geben, der reicher an Obertönen und heller, aber auch schärfer ist, als derjenige von weitmensurirten Pfeifen.

Die verschiedenen „Stimmen“ oder „Register“ des Labialwerks der Orgel unterscheiden sich bekanntlich wesentlich durch ihre verschiedene Klangfarbe. Neben andern Faktoren ist es hauptsächlich die Verschiedenheit der Mensur, auf der die Unterschiede der Klangfarbe beruhen. Die beistehende Figur stellt einige Haupttypen von Pfeifen verschiedener Stimmen dar. (Fig. 21 a. f. S.)

Unter den sog. Grundstimmen der Orgel, welche das Fundament des Orgelklanges liefern, sind in erster Linie die Prinzipalstimmen von Wichtigkeit (s. Fig. 21 d). Sie haben ziemlich weite bis mittlere Mensur, die Länge der Pfeifen beträgt 10 bis 14 Durchmesser. Bei so weiter Mensur kommen Obertöne nur wenig zur Geltung, der Grundton ist vorherrschend, der zweite und dritte Partialton noch hörbar, bei metallenen Pfeifen ausserdem noch schwach der vierte, während die höhern Obertöne nicht mehr wahrzunehmen sind. Die Prinzipalstimmen zeichnen sich durch Fülle und Weichheit des Tones aus, die sie dem vorherrschenden Grundtone und dem Mitklingen der 3 ersten Obertöne verdanken.

Eine wesentlich engere Mensur hat die Familie der sog. Streicher, d. h. derjenigen sog. „Charakterstimmen“, deren Klang sich dem der Streichinstrumente mehr oder weniger

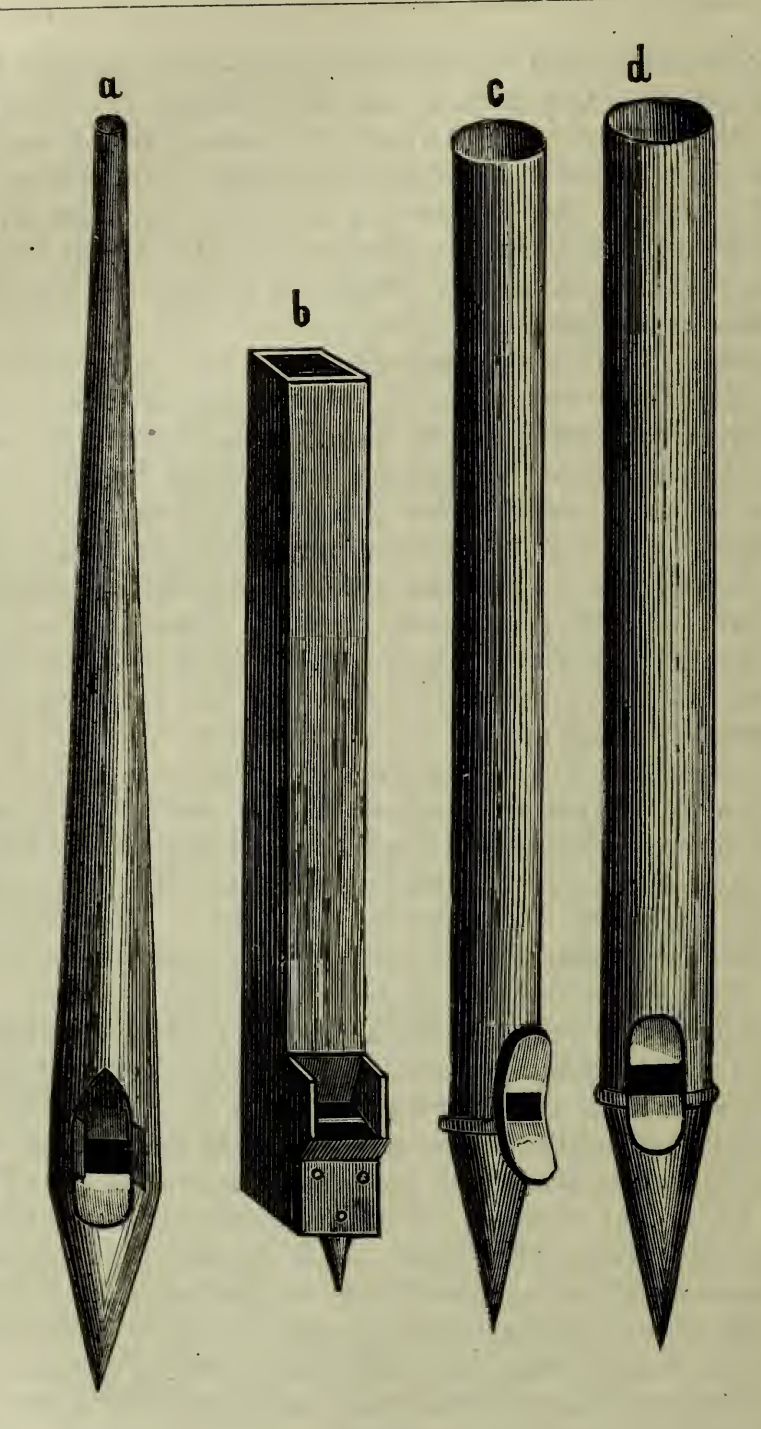


Fig. 21.

nähert (s. Figur 21c). Die wichtigsten derselben sind: Geigenprinzipal, Viola di Gamba, Violino, Viola, Violoncello, Kontrabass, Aeoline, Salicional, Fugara (der schärfste

der Streicher), Gemshorn u. s. w. Ihre Mensur variirt zwischen $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{25}$, d. h. die Länge beträgt 15 bis 25 Durchmesser. Gemshorn und Salicional sowie die (zur Familie der Flöten gehörende) Spitzflöte sind nach oben kegelförmig verengt (s. Fig. 21a), so dass der Durchmesser am oberen offenen Ende halb so gross ist wie derjenige unten beim Aufschnitt. Von den drei letztgenannten Stimmen ist Spitzflöte relativ am weitesten, Salicional am engsten mensurirt. Bei den „Streichern" sind die 6 ersten Partialtöne deutlich hörbar und verleihen dem Klange einen gewissen Grad von Schärfe. Speziell bei den konisch verengten Pfeifen tritt der 5., 6. und 7. Partialton relativ deutlicher auf als die niederen Obertöne; der Klang verliert dadurch bedeutend an Fülle, wird aber eigenthümlich hell und klar. —

Zum sog. streichenden Charakter der eben erwähnten Stimmengattung trägt ausser der Mensur wesentlich die geringere Höhe des Aufschnittes bei. Im Allgemeinen wird der Klang einer Pfeife um so schärfer, je mehr man die Höhe des Aufschnittes verkleinert. Es erklärt sich dies daraus, dass der Luftstrom zwischen der Kernspalte und dem Oberlabium einen geringeren Weg zurückzulegen hat und sich mit grösserer Kraft an der Oberlippe bricht. Das hat zur Folge, einerseits dass das sog. Reibungsgeräusch erhöht wird, andrerseits dass das kürzer gewordene Luftband zwischen Kernspalte und Oberlippe beweglicher wird und leichter geneigt ist, rasche Schwingungen mitzumachen. Bei geringer Höhe des Aufschnittes ist der Wechsel zwischen der nach Innen und der nach Aussen gerichteten Bewegung der Luftzunge viel schroffer als bei grosser Höhe. Ganz ähnlich wie bei den Saiten ist aber jede Discontinuität der Bewegung der Entstehung höherer Obertöne förderlich. Am Aufschnitt vollzieht sich die hin- und hergehende Bewegung der Luft in ähnlicher Weise wie die Schwingungen des gestrichenen Punktes einer Saite. Auch hier hat die Geschwindigkeit der nach Innen gerichteten Bewegung, ebenso wie diejenige der entgegengesetzten Bewegung, jede für sich, einen nahezu konstanten Werth, und der Wechsel zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten erfolgt beinahe plötzlich, sprungweise, und zwar um so mehr, je geringere Höhe der Aufschnitt hat und je stärker der Anblasestrom ist. Daraus erklärt sich der den Streichinstrumenten einigermaassen verwandte Klang dieser Gattung von Orgelstimmen.

Die Streichregister der Orgel dürfen, theils wegen der engen

Mensur, theils wegen des niederen Aufschnittes, nicht zu stark angeblasen werden, weil sonst leicht Ueberblasen eintritt. Die Prinzipalstimmen dagegen haben höhern Aufschnitt und ertragen reichlicheren Luftzufluss, ohne dass der Grundton in Gefahr kommt, den nächst höheren Partialtönen weichen zu müssen.

Eine zweite Hauptgattung von Charakterstimmen bilden die verschiedenen Flötenregister der Orgel. Sie sind von sehr verschiedener Mensur und Gestalt und haben, wie ihr Name sagt, einen mehr oder weniger flötenähnlichen Charakter (s. Fig. 21b). Ihr Aufschnitt ist höher als derjenige der Streicher und der Anblasestrom schwächer als bei den Prinzipalstimmen. Die hin- und herschwingende Bewegung des Luftbandes am Aufschnitt ist weniger discontinuirlich und nähert sich mehr der einfachen „pendelartigen“ Bewegung. Der Klang ist, bei vorherrschendem Grundtone, arm an Obertönen und mehr oder weniger zart und weich. —

Die Wirkung des Anblasestromes wird mannigfach variirt durch verschiedene Formen des Aufschnittes, durch besondere Arten von Labien (Froschlabium), durch Anbringung von sog. Bärten seitlich vom Aufschnitt (namentlich bei den Streichern) u. s. w.

Die sog. Gedackten (s. Figur 22 a, c, e), d. h. gedeckten Stimmen der Orgel zeichnen sich durch etwas dumpfen Klangcharakter aus, was mit dem Fehlen aller geradzahligen Partialtöne zusammenhängt. Je nach der Mensur und der Stärke des Luftzuflusses unterscheidet man die Gedackten durch verschiedene Zusätze wie z. B. Gross-, Mittel-, Kleingedackt; Grob-, Sanft-, Lieblich-, Still-, Zartgedackt u. s. w. Da gedeckte Pfeifen nahezu eine Oktave tiefer klingen als gleich lange offene, so werden Gedackte vielfach als Bassstimmen benützt. Die wichtigeren heissen: Subbass, Nachthorn, Bordun oder Bourdon und Quintatöne. Die tiefste gedeckte Stimme heisst Untersatz oder Majorbass, sie wird der Raum- und Geldersparniss wegen häufig an Stelle eines offenen Registers von doppelter Länge (32') angewandt.

Gedackte Pfeifen von weiter Mensur lassen fast nur den Grundton erklingen, liefern also wenigstens bei schwachem Anblasen fast rein einen einfachen Ton; sie klingen weich aber charakterlos und eignen sich nicht zu selbständiger musikalischer Verwendung, wohl aber zur Mischung mit andern Stimmen. Die engmensurirten Quintatöne oder Quintaten (Quintam tenens)

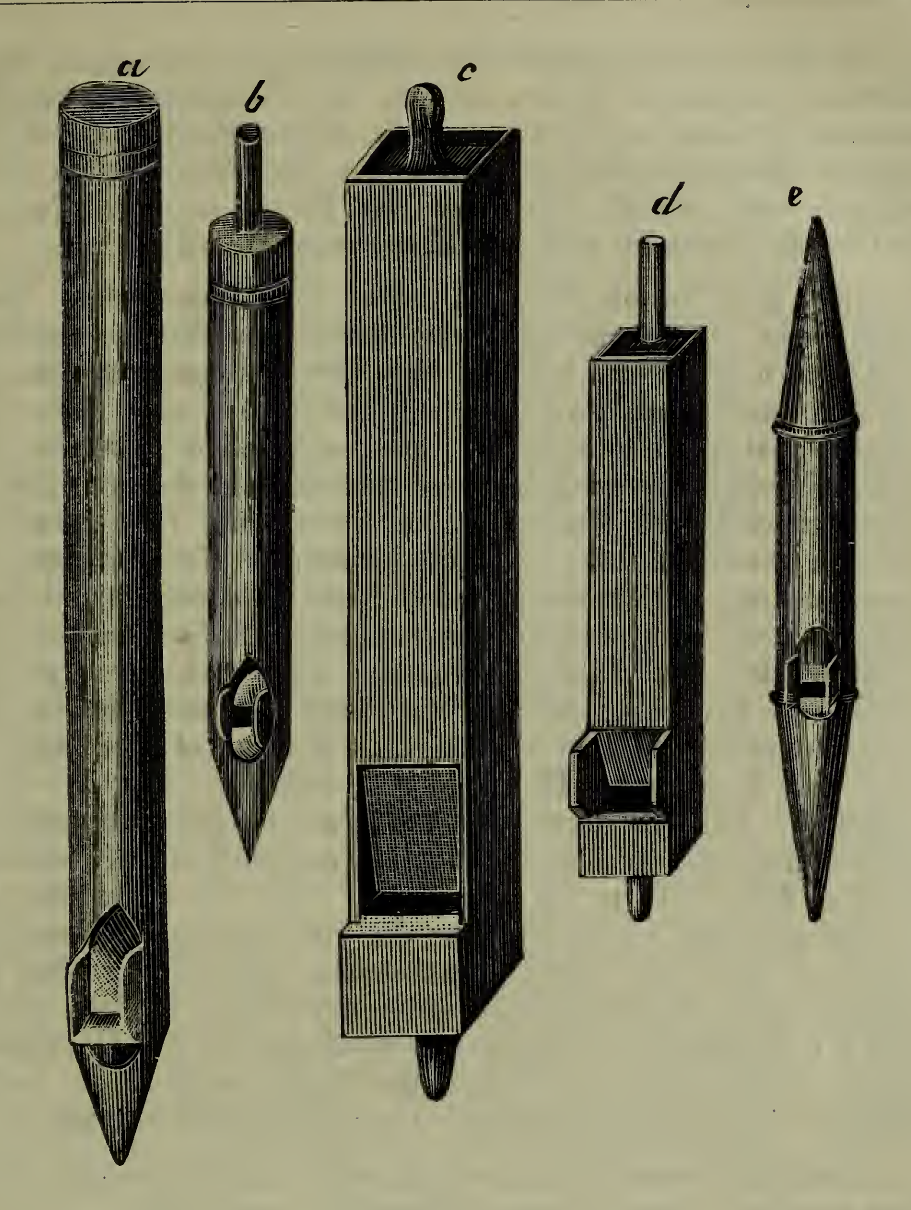


Fig. 22.

lassen leise aber doch deutlich hörbar den dritten, bei schärferem Anblasen auch den 5ten Partialton mitklingen. Dem 3ten Partialton, der Duodecime oder Quinte der Oktave, verdanken sie ihren Namen. Allein sind sie nicht verwendbar, geben aber mit andern Stimmen zweckmässig gemischt dem Klange eine charakteristische, nicht unbeliebte Färbung.

Eine eigenthümliche Mittelstellung zwischen offenen und gedeckten Stimmen nimmt die Rohrflöte ein (s. Fig. 22 b, d). Sie gehört, wie ihr Name sagt, zur Gattung der Flöten und

ist gedeckt; in den Deckel ist jedoch ein beidseitig offenes Röhrchen eingesetzt, dessen Länge, wie Helmholtz hervorhebt, so gross ist, dass es, für sich (als offene Pfeife) angeblasen, den 5ten Partialton des Grundklanges der Pfeife geben würde. Dadurch wird der 5te Partialton der Pfeife (die gr. Terz der 2. Oktave) verstärkt und der Klang eigenthümlich hell.

Eine ganz besondere und zwar vom akustischen Standpunkte sehr interessante Stellung unter den Stimmengattungen der Orgel nehmen die (zu den sog. Grundstimmen gehörenden) Füllstimmen und gemischten Stimmen ein. Die Füllstimmen haben die Aufgabe, die natürlichen Obertöne der Prinzipalpfeifen zu verstärken und dem Klange dadurch glänzenderen, prächtigeren Charakter zu verleihen. Die gemischten Stimmen bestehen aus verschiedenartigen Verbindungen der Prinzipale mit Füllstimmen; jeder Taste entsprechen bei diesen Stimmen nicht nur eine, sondern mehrere Pfeifen, welche durch Niederdrücken der Taste gleichzeitig zum Erklingen gebracht werden. — Entsprechend den verschiedenen natürlichen Obertönen unterscheidet man verschiedene Füllstimmen: Quinte, Terz und Septime. Die Quinte verstärkt den 3. und 6. Partialton; Abarten derselben sind Nasard (eine Gedackte mit näselndem Charakter), Rohrquinte (von ähnlicher Konstruktion wie Rohrflöte), Quintflöte u. s. w. Die Terz verstärkt den 5. Partialton des Grundklanges; die (sehr selten vorkommende) Septime den 7ten. Streng genommen gehören zu den Füllstimmen auch die Oktavregister der Orgel, welche den 2. (und 4.) Partialton zu verstärken bestimmt sind. Die Oktaven pflegen jedoch zu den Prinzipalstimmen gezählt zu werden (offenbar wegen ihrer grösseren Verschmelzungsfähigkeit). —

Die Füllstimmen dürfen selbst, wenn sie nicht zu Dissonanzen führen sollen, keine eigenen Obertöne mitbringen, d. h. sie müssen obertonfrei intonirt sein. Sie sind desshalb von weiter Mensur, theilweise auch gedackt.

Zu den gemischten Stimmen oder Mixturen der Orgel gehören: Die Mixturen in engerem Sinne, bestehend aus Oktaven und Quinten; die Cornette, bestehend aus Oktave, Quinte und Terz, d. h. aus dem reinen Dur-Dreiklange; die Cymbeln, aus reinen Oktaven bestehend; ferner Rauschquinte, Tertian, Sesquialtera, Harmonia aetherea, Progressio harmonica, Scharf u. s. w. Je nach der Zahl der Pfeifen, welche einer

Taste entsprechen, unterscheidet man 2chörige, 3chörige, ... 6chörige Stimmen. —

Die gemischten Stimmen wurden von den Musiktheoretikern lange Zeit verkannt und verpönt, weil ihre Anwendung beim Spielen nothwendig zu reinen Quintenparallelen führt. Allein angewendet machen sie auch keinen angenehmen Eindruck; sie klingen fast unerträglich schreiend und durchdringend. Die gemischten Stimmen werden aber niemals vereinzelt, sondern stets nur im „vollen Werke“ angewandt, wo ihr Grundton durch andere Stimmen sehr verstärkt wird, so dass er die künstlichen Obertöne weit überwiegt. Unter dieser Bedingung ist ihre Anwendung durchaus gerechtfertigt und ihre Wirkung eine musikalisch gute, besonders wenn die Orgel zur Begleitung des Kirchengesanges dient, wobei der Grundton durch den Gesang der Gemeinde noch mehr verstärkt wird.

Die gemischten Stimmen sind ein sehr lehrreiches Beispiel von *Synthese*, d. h. künstlicher Zusammensetzung *von Klängen*. Ihre akustisch-theoretische Rechtfertigung wurde ihnen durch die Helmholtz'sche Theorie der Klangfarbe zu Theil; von den Orgelbauern und Organisten wurden sie schon längst als — bei passender Anwendung — nützlich und unter Umständen unentbehrlich anerkannt. Sie beweisen in akustischer Beziehung, dass die Natur des Klanges, d. h. des musikalischen Tones richtig erkannt wurde; in musiktheoretischer dagegen, dass das sog. Quintenverbot, das bei geringer Stimmenzahl in der mehrstimmigen Musik durchaus gerechtfertigt ist, nur eine relative Bedeutung hat und bei einer grösseren Zahl selbständiger Stimmen und bei gehöriger Deckung unter Umständen anderen Rücksichten weichen darf. — *Ambros* macht (in seiner Schrift: „Zur Lehre vom Quintenverbot“) darauf aufmerksam, dass man die Wirkung der Mixturregister auf dem Klavier einigermaassen nachmachen kann, indem man z. B. folgende Leiter von Akkorden in ziemlich raschem Tempo kräftig spielt:



Der Grundton ist hier vervierfacht, während die Quinte nur einfach auftritt. Die Wirkung ist keine schlechte; nur beim Akkord $H\ h\ \bar{h}\ \bar{\bar{f}}\ \bar{h}$ tritt der verminderten Quinte $\bar{h}\ \bar{\bar{f}}$ wegen eine Störung ein, da nicht $\bar{\bar{f}}$ sondern $\overline{\overline{fis}}$ im Klange von H als Partialton enthalten ist.

70. Die Töpfer'sche Normal-Mensur der Orgelpfeifen. — Noch ein Wort zur Mensur. — Eine Pfeife, die einen bestimmten Ton geben soll, kann von sehr verschiedener Mensur sein. Ist sie weit, so muss die Länge geringer sein als bei enger Mensur; denn, wie wir sahen, übt die Vergrösserung des Querschnittes allein eine vertiefende Wirkung auf die Tonhöhe aus, und diese muss durch Verkleinerung der Länge kompensirt werden, wenn die Tonhöhe dieselbe bleiben soll. Man ist also zunächst zur Erzielung einer bestimmten Tonhöhe an kein bestimmtes Mensur-Verhältniss gebunden. Anders wird jedoch die Sache, wenn als bestimmendes Moment ausser der Tonhöhe noch die Klangfarbe hinzutritt; dann ist die Mensur nicht mehr willkürlich, sondern durch den gewünschten Klangcharakter bestimmt.

Die verschiedenen Stimmen (Register) der Orgel haben sehr verschiedene Klangfarbe, und wir haben gesehen, dass die Mensur einer der Hauptfaktoren ist, von denen die Klangfarbe abhängt. Innerhalb einer und derselben Stimme muss aber die Klangfarbe möglichst einheitlich sein; die hohen Töne dürfen keinen Klangcharakter haben, der sich wesentlich von demjenigen der mittleren und tieferen Lagen unterscheidet. Für die Pfeifenlängen innerhalb einer und derselben Stimme ist das Gesetz, nach welchem sie mit steigender Tonhöhe nach oben hin abnehmen, in der Hauptsache gegeben. Während die Tonhöhen (bei der gleichschwebenden Temperatur) von Tonstufe zu Tonstufe in geometrischer Progression steigen (2^{0}, $2^{\frac{1}{12}}$, $2^{\frac{2}{12}}$, $2^{\frac{3}{12}}$, ...), nehmen die Pfeifenlängen in demselben Maasse in geometrischer Progression ab (wenn man von der an jeder Pfeife anzubringenden relativ kleinen Korrektion absieht). Die Bedingung, dass die Klangfarbe aller Pfeifen innerhalb derselben Stimme einheitlich sei, schreibt nun aber auch ein ganz bestimmtes Gesetz vor, nach welchem die Querschnitte (resp. Durchmesser oder Quadratseiten) mit wachsender Tonhöhe abzunehmen haben. Dieses Gesetz muss durch sorgfältige Ver-

suche gewonnen werden; hat man es gewonnen, so kann man es als Normal-Mensur annehmen.

Eine solche Normal-Mensur wurde nun durch den berühmten Organisten und Förderer des Orgelbaues Johann Gottlieb Töpfer († 1870 Weimar) gegeben*). Töpfer schreibt vor, dass von einem Tone bis zur nächst höheren Oktave der Querschnitt der Pfeifen von 1 auf $\frac{1}{\sqrt{8}}$ zu sinken habe. Bedeutet also q_1 den Querschnitt irgend einer Pfeife, q_2 den Querschnitt der um eine Oktave höher gestimmten Pfeife desselben Registers, so muss nach Töpfer $q_1 : q_2 = 1 : \frac{1}{\sqrt{8}}$ sein. Nennen wir d_1 und d_2 die entsprechenden Durchmessser (resp. Quadratseiten) dieser beiden Pfeifen, so ist bekanntlich, da sich die Querschnitte wie die Quadrate der Durchmesser (resp. Quadratseiten) verhalten

$q_1 : q_2 = d_1{}^2 : d_2{}^2 = 1 : \frac{1}{\sqrt{8}}$, es wird also $d_1 : d_2 = 1 : \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

oder $d_1 : d_2 = 1 : 0{,}5946$. Von einer Oktave bis zur nächst höheren sinkt also der Durchmesser einer Pfeife von 1 auf $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$, d. h. von 1 auf 0,5946.

Man lässt nun von einer Stufe der temperirten chromatischen Tonleiter zur nächst benachbarten höheren die Weite der Pfeifen, d. h. Durchmesser (oder Quadratseiten) in geometrischer Reihe abnehmen:

$$1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : x^6 : x^7 : x^8 : x^9 : x^{10} : x^{11} : x^{12}$$

entsprechend den 12 Stufen der temperirten Skala. Die 12. Stufe ist die Oktave, es muss also $x^{12} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ sein.

Daraus ergibt sich nun sehr leicht, dass die halben Durchmesser oder Quadratseiten auf die grosse Decime des Ausgangs-

*) Töpfer, J. G., Lehrbuch der Orgelbaukunst. Weimar 1855. Die Orgel. Erfurt und Leipzig 1862.

In der ältesten Auflage seines berühmten Werkes: „Die Orgelbaukunst nach einer neuen Theorie dargestellt“ u. s. w. (1833) schlägt Töpfer eine Normal-Mensur vor, nach welcher die Querschnitte der Pfeifen oktavenweise wie $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3^2} : \frac{1}{3^3} \ldots$ abnehmen, also in etwas rascherem Verhältniss, als nach der später von ihm aufgestellten Normal-Mensur.

tones fallen. Die grosse Decime ist nämlich vom Ausgangston aus gemessen die 16. Tonstufe der temperirten chromatischen Tonleiter und es wird

$$x^{16} = x^{12 \cdot \frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$$

Nach der Töpfer'schen Normal-Mensur muss also die Weite der Pfeifen von Stufe zu Stufe in geometrischer Reihe abnehmen, und zwar so, dass die halbe Weite auf die grosse Decime des Ausgangstones fällt.

Wird diese Normal-Mensur willkürlich verlassen, so leidet darunter die Gleichmässigkeit der Klangfarbe der betreffenden Stimme.

Für weitere Einzelheiten über Mensur, diesen für Praxis und Theorie so heiklen Punkt, muss auf die bezügliche Fachliteratur verwiesen werden, namentlich auf die Schriften Töpfer's, in denen sich ausführliche auf Mensur bezügliche Tabellen finden. —

In Bezug auf die allgemein übliche Benennung der Orgelstimmen als 32-, 16-, 8-, 4-, 2-, 1-füssige sei hier ergänzend bemerkt, dass diese Maasse sich auf die Länge der Pfeife des tiefsten *C* des betreffenden Registers beziehen. Die Länge einer offenen Pfeife, welche das grosse *C* gibt, ist ungefähr 8'. Man nennt desshalb die grosse Oktave auch die „8-füssige", die Contra-Oktave die „16-füssige", die Subcontra-Oktave die „32-füssige", die kleine Oktave die „4-füssige" u. s. w. — Da bei den höheren Oktaven die Pfeifenlänge schliesslich sehr klein wird, so gibt man den Pfeifen der höchsten Töne nicht selten die doppelte Länge und regulirt den Luftstrom so, dass die Pfeife (durch Ueberblasen) nicht ihren Grundton, sondern die höhere Oktave gibt (z. B. bei dem Register: Flûte harmonique, wo das Ueberblasen in die Oktave durch Anbringen einer kleinen seitlichen Oeffnung in der Mitte der Pfeifenlänge begünstigt wird).

71. Einfluss des Pfeifenmaterials. — Schwellvorrichtungen. — Eine vielumstrittene Frage bildet der Einfluss des Materials auf den Klangcharakter. Die Orgelpfeifen pflegen theils aus Metall (reines oder mit Blei in verschiedenen Verhältnissen legirtes Zinn), theils aus Holz hergestellt zu werden. Für die tieferen Register wird, zum Theil der Kostenersparniss wegen, vorzugsweise Holz angewendet. Neuerdings (1887) wurde

von dem Priester Crespi Reghizzo in Mailand als Pfeifenmaterial ein chemisch präparirter Ledercarton verwandt, und von der Firma Freyer & Co. in Meissen (1895) Porzellan vorgeschlagen. Wenn auch, wie wir sahen, Mensur, Aufschnitt und Luftzufluss den Hauptantheil an dem Einfluss auf die Klangfarbe haben, so ist doch eine Einwirkung des Materials nicht unbedingt zu leugnen. Holzpfeifen klingen unter gleichen Bedingungen etwas dumpfer und weicher als Zinnpfeifen.

Der Akustiker Pellisov (Pseudonym für Schafhäutl = pellis ovis) hat durch ausgedehnte Versuche nachgewiesen, dass ein — wenn auch nebensächlicher — Einfluss des Materials zu konstatiren ist. Daraus wurde von Vielen der Schluss gezogen, dass ausser der Zahl und Stärke der Partialtöne, ausser der sog. Schwingungsform, andere Faktoren existiren, von denen die Klangfarbe abhängt. Dieser Schluss ist durchaus unberechtigt und zeugt von einem Missverständnisse der Helmholtz'schen Theorie. Sieht man ab von den begleitenden Nebengeräuschen (z. B. vom Blasegeräusch bei den Pfeifen), welche nicht zum eigentlichen innern Wesen der Klangfarbe gehören, so sind es stets nur die Partialtöne, die das Wesen der Klangfarbe bedingen. Hat das Material einen Einfluss auf die Klangfarbe, so übt es denselben dadurch aus, dass es die Partialschwingungen mehr oder weniger beeinflusst. Das Material wirkt also nicht neben den Partialtönen auf die Klangfarbe ein, sondern durch dieselben, durch Beeinflussung der Partialschwingungen und der Schwingungsform. Wenn es bei den Orgelpfeifen ganz allein die Luftsäule wäre, welche Schwingungen ausführt und die Pfeifenwände absolut starr und unbeweglich wären, so wäre es auch völlig gleichgültig, aus welchem Material die Pfeife hergestellt würde. Kein Material ist aber absolut widerstandsfähig, jedes wird durch die ziemlich heftigen Schwingungen der tönenden Luftsäule erschüttert und zwar in verschiedenem Grade je nach seiner eigenen molekularen Beschaffenheit. Die Schwingungen der Pfeifenwände wirken ihrerseits wieder zurück auf die Schwingungen der Luftsäule, und so gewinnt das Material Einfluss auf die Schwingungsform und die Klangfarbe. Möglichst vollkommene Glätte der inneren Pfeifenwände wird stets als selbstverständlich vorausgesetzt. Nach Helmholtz' Vermuthung werden bei den Holzpfeifen die höheren Partialtöne durch Reibung leichter vernichtet als bei metallenen Pfeifen. In welcher Weise die transversalen Schwingungen der Pfeifenwände

auf die Partialtöne Einfluss haben, ist freilich noch zum grossen Theil nicht klar gelegt; aber das steht fest, dass das Material nur durch Beeinflussung der Partialschwingungen auf die Klangfarbe einwirkt, und zwar nicht nur bei den Orgelpfeifen, sondern bei allen musikalischen Instrumenten.

Die Orgel ist für den Akustiker ein Instrument von allerhöchstem Interesse. Sie bietet die Möglichkeit zu einer fast unbegrenzten Zahl verschiedener Klangfärbungen durch mannigfaltige Kombinationen von Registern. Sie gibt die Mittel zur Synthese von Klängen an die Hand und eröffnet dem Künstler und dem wissenschaftlichen Forscher ein weites und lohnendes Arbeitsfeld. Die seelische Ausdrucksfähigkeit des einzelnen Tones ist zwar bei der Orgel sehr beschränkt; dynamische Abstufungen können nicht durch Anschwellen und Abschwellen des Windes hervorgebracht werden, da dadurch gleichzeitig auch die Tonhöhe beeinflusst wird. Man kann zwar in gewissem Grade Crescendo und Descrescendo hervorbringen durch Anwendung des sog. Schwellwerks. Eine Anzahl von Stimmen kommen in den sog. Schwellkasten zu stehen, einen geschlossenen Behälter, der durch Thüren oder Jalousien mittels Tretens auf den Schwelltritt mehr oder weniger geöffnet werden kann, so dass der Schall mehr oder weniger kräftig daraus hervordringt. Oder man wendet den sog. Rollschweller an, eine Vorrichtung, welche es ermöglicht, durch einen blossen Fusstritt während des Spielens mehr und mehr Stimmen bis zum vollen Werke einzuschalten und ebenso wieder auszuschalten. Das eigentliche Charakteristische des Orgeltons, die starre Unbeugsamkeit, bleibt aber trotz dieser künstlichen Vorrichtungen bestehen. Sie bildet einerseits einen Mangel, andrerseits beruht aber vielleicht gerade hierauf die Erhabenheit des Orgelklanges.

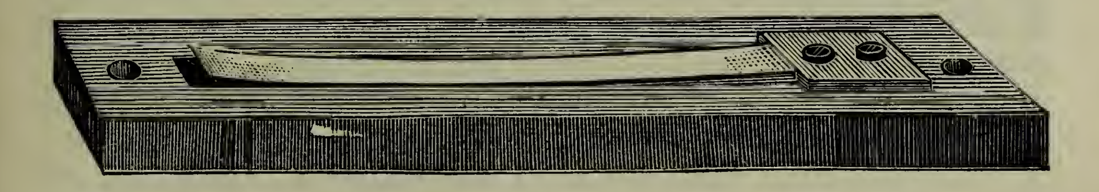
Der Orgelbauer muss ebenso wie der Geigenmacher nicht nur Handwerker, sondern Künstler sein. Sein Gebiet ist eine Kunst, in welcher die Wissenschaft eine grosse und wichtige Rolle spielt; er muss aber durch Erfahrung, Geschick und Scharfblick der Wissenschaft, deren Gang oft langsam ist, aber stets sicher sein muss, voranzueilen suchen. Theorie und Praxis müssen Hand in Hand gehen zur Förderung des Ganzen. —

72. Zungeninstrumente; frei schwingende Zungen. — Das Harmonium. — Bei den Labialpfeifen oder Lippenpfeifen, denen unsere letzten Betrachtungen gewidmet waren, waren es die stehenden Schwingungen einer abgegrenzten Luftsäule, welche den Ton erzeugten, und ein Luftstrom oder vielmehr ein schmales Luftband war es, das durch seine hin- und hergehende Bewegung die Rolle des Erregers und Unterhalters dieser Schwingungen spielte.

Bei den sog. Zungeninstrumenten, deren Betrachtung wir uns jetzt zuwenden, spielt, neben den Luftschwingungen, die schwingende Bewegung einer metallenen Zunge eine sehr hervorragende Rolle. Das Charakteristische der Tonerzeugung besteht hier darin, dass ein Luftstrom durch eine elastische schwingende Zunge abwechselnd abgesperrt und wieder durchgelassen wird, so dass der Strom, der ohne die Wirkung der Zunge ein kontinuirlicher, ununterbrochener sein würde, in einzelne Luftstösse zerlegt wird. Diese in regelmässigen sehr kleinen Zwischenräumen aufeinander folgenden periodischen Luftstösse, durch welche Verdichtungen und als Gegenreaktion Verdünnungen der Luft hervorgebracht werden, erzeugen den Ton.

Die folgende Figur

a



b

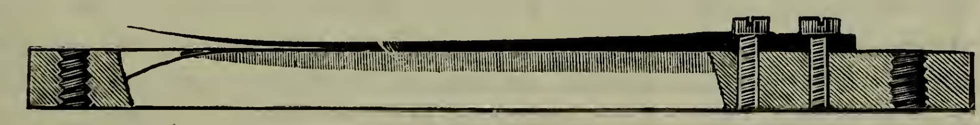


Fig. 23.

stellt eine Zunge sammt dem Rahmen dar, in welchem sie gefasst ist, und zwar *a* perspektivisch von oben gesehen, *b* im Durchschnitt. Die Zunge ist ein länglich rechteckiges Metallblättchen, das an der einen Schmalseite mittels Schrauben auf einer metallenen Platte befestigt ist, während das andere Ende frei

beweglich ist und, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, in Folge der Elastizität der Zunge hin- und herschwingt. Die Metallplatte, an welcher die Zunge befestigt ist, hat eine rechteckige Oeffnung von der Gestalt und Grösse der Zunge, unmittelbar hinter derselben. Ist, wie in obenstehender Figur, die Zunge gerade so gross, dass sie die Oeffnung vollständig abschliessen kann, ohne dass ihre Ränder die Metallplatte berühren, wenn die Zunge schwingt, so heisst sie durchschlagende Zunge; sie kann dann ungehindert frei durchschwingen und doch zugleich beim Passiren der Oeffnung dieselbe verschliessen. Ist dagegen, wie in der folgenden Figur,

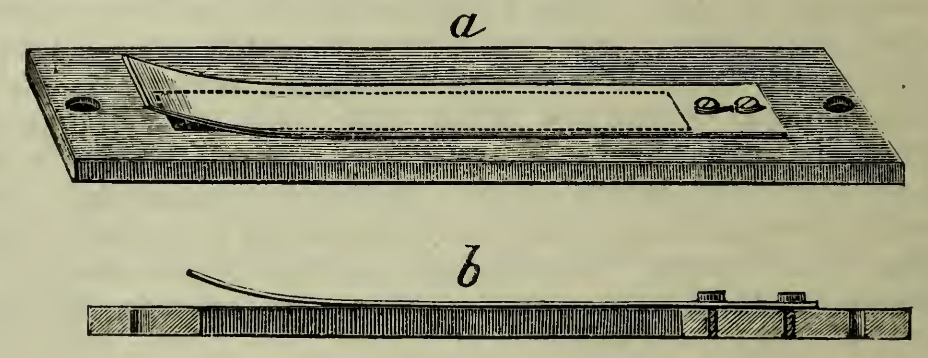


Fig. 24.

die Zunge so gross, dass ihre Ränder über die Oeffnung der Metallplatte hinausragen, so kann die Zunge die Oeffnung wohl abschliessen, aber sie kann nicht durchschwingen. Sie schlägt, wenn sie schwingt, auf die Metallplatte auf und heisst desshalb aufschlagende Zunge.

In ruhendem Zustande steht die Zunge so, dass sie die Oeffnung nicht völlig verschliesst, sondern zwischen dem Rande der Oeffnung und ihrem eigenen Rande eine sehr schmale Spalte freilässt. Wird nun die Zunge von einem Luftstrom in passender Richtung getroffen, so wird die Spalte demselben im ersten Augenblicke freien Durchpass gewähren; durch den Luftstrom selbst wird aber die Zunge aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und schwingt nach der Oeffnung hin, so dass sie dieselbe verschliesst und den Luftzufluss absperrt. Die aufschlagende Zunge hat mit dem Momente des Abschliessens ihre äusserste Lage erreicht, die durchschlagende schwingt noch etwas weiter, wie es in der Figur angedeutet ist; beide schwingen sodann in Folge ihrer eigenen Elastizität zurück, eröffnen dadurch dem Luftstrom von Neuem den Durchpass, und das Spiel beginnt von Neuem.

Wir haben es also hier einerseits mit transversalen Schwingungen der Metallzunge, andrerseits mit longitudinalen der zuströmenden Luft zu thun. Die Metallzunge hat grosse Elastizität und einen bedeutenden Grad eigener Selbständigkeit in der schwingenden Bewegung, so dass sie es ist, welche den Rhythmus der Schwingungen, also Schwingungszahl und Tonhöhe vorschreibt. Verschiedene Zungen werden im Allgemeinen verschieden hohe Töne geben. Je dicker die Zunge ist, um so rascher wird sie schwingen; je länger sie ist, um so langsamer. Gleiches Material und gleiche Befestigungsart vorausgesetzt, wird die Schwingungszahl einer doppelt, dreifach, vierfach so dicken Zunge auch 2-, 3-, 4mal so gross sein; die Schwingungszahl einer doppelt, dreifach, vierfach so langen Zunge aber wird, wie Theorie und Erfahrung zeigen, resp. auf $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ der ursprünglichen Höhe sinken. Man hat es also in der Hand, durch passende Wahl des Materials und passende Form, Dicke und Länge, der Zunge jede beliebige Tonhöhe zu geben.

Das Material der Metallzungen ist in der Regel Messing oder Argentan.

Die Dicke der Zungen ist am befestigten Ende in der Regel am grössten und nimmt nach dem freien Ende zu ab. Im Uebrigen wird Länge, Dicke und Breite der Zunge sowie ihre Stellung zur Richtung des Anblasestromes mannigfach variirt.

Die durchschlagenden Zungen finden ausgedehnte Verwendung beim Harmonium (Physharmonika) und ausserdem bei einer Reihe von Instrumenten, welche mehr Unterhaltungszwecken als künstlerischen Aufgaben dienen (Ziehharmonika, Mundharmonika u. s. f.).

Wenn man nun eine solche Zunge etwa durch Reissen, oder, von ihrem Rahmen losgetrennt, durch Streichen mit einem Bogen in Schwingung versetzt, so gibt sie einen sehr schwachen Ton, während sie, durch einen Luftstrom angeblasen, weit kräftiger erklingt. Es beweist dies, dass die Luft im letzteren Fall nicht nur als Fortpflanzerin des Zungentones auftritt, sondern selbst tonbildend wirkt.

Der Rhythmus der abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ist durch die Bewegung der Zunge vorgeschrieben; die Stärke und der Klangcharakter hängt aber wesentlich von dem Grade und der Art dieser Verdichtungen und Verdünnungen, von der besondern Weise wie die periodischen Unterbrechungen des Luftstromes erfolgen, mit einem Worte

von der Schwingungsform ab. Wir sehen z. B. ein, dass die Bewegung der schwingenden Lufttheilchen eine viel stossweisere, diskontinuirlichere sein muss, als etwa diejenige eines Pendels. Denn während z. B. ein Pendel, wenn es über seine Gleichgewichtslage hinausschwingt, allmählich seine Bewegung verlangsamt, in der äussersten Entfernung von der Gleichgewichtslage einen Augenblick ganz zur Ruhe kommt und dann mit allmählich wachsender Geschwindigkeit wieder zurückschwingt, wird dem Luftstrome, der noch soeben mit grosser Geschwindigkeit durch die Spalte strich, durch die Zunge ganz plötzlich der Weg abgeschnitten; ein schwingendes Lufttheilchen stösst also mitten in seiner vollen Bewegung auf ein unüberwindbares Hinderniss und muss plötzlich Kehrt machen. Diese Verschiedenheit der Art der Bewegung innerhalb einer und derselben Zeitperiode bedingt die Verschiedenheit der Klangfarbe. Wir haben bei den schwingenden Saiten davon gesprochen, dass die Bewegung einer Saite stets als Summe einer grösseren oder geringeren Zahl von einfachen Einzelbewegungen aufgefasst werden kann, von denen jede einem Partialtone oder Obertone entspricht. Wir erwähnten dort, dass Theorie und Experiment übereinstimmend zeigen, dass jede Art von Unstetigkeit oder Diskontinuität der Bewegung das Auftreten einer grösseren Zahl von Obertönen nach sich zieht. Dieses Gesetz gilt nicht nur für transversale, sondern ganz ebenso für longitudinale Wellen.

Die Unterbrechungen des Luftstromes beim Anblasen einer Zunge erfolgen nahezu plötzlich, und zwar um so vollständiger und plötzlicher, je vollkommener und plötzlicher die Absperrung ist. Man hat hier einen ziemlich hohen Grad von Diskontinuität der Luftschwingungen vor sich, und zwar bei aufschlagenden Zungen einen noch höheren als bei durchschlagenden. Es geben desshalb frei angeblasene Zungen, die ihre Schwingungen unvermittelt nach Aussen hin abgeben, stets eine grosse Zahl von Obertönen (bis zum 20sten und noch höher hinauf) und einen schneidenden, scharfen, aufschlagende Zungen einen schnarrenden Klang.

Die Erzeugung des Tones ist bei angeblasenen Zungen ähnlich wie bei der Sirene. Bei letzterer wird ebenfalls ein Luftstrom in einzelne Luftstösse zerlegt und zwar dadurch, dass der Strom abwechselnd auf ein Loch oder auf einen Zwischenraum zwischen zwei Löchern einer rotirenden Scheibe stösst.

Bei der Sirene ist die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe und die Zahl der Löcher bestimmend für die Tonhöhe, bei der angeblasenen Zunge ist es die Schwingungszahl der Zunge, die ihrerseits wieder von deren Elastizität und Dimensionen abhängt.

Die Zahl und Stärke der Partialtöne, d. h. die Klangfarbe einer angeblasenen Zunge, ist abhängig von der Beschaffenheit der Zunge, von ihren Dimensionen, von ihrer Stellung zum Anblasestrom und zu der Metallplatte, an welcher sie befestigt ist, endlich davon, ob alle Schwingungen direkt und unvermittelt nach Aussen abgegeben, oder ob sie mehr oder weniger gedämpft werden.

Es steht also den Fabrikanten von Harmoniums ein gewisser Spielraum offen, innerhalb dessen sie die Klangfarbe ihrer Instrumente modifiziren können. Es werden hierbei nur durchschlagende Zungen verwendet. Statt Druckwind kann auch Saugwind angewandt werden, wie z. B. bei den unter dem Namen „Cottage-Orgeln“ bekannten amerikanischen Harmoniums. —

Die angeblasene Zunge hat zwei wesentliche Vorzüge vor den Labialpfeifen der Orgel: In erster Linie, dass eine Steigerung des Winddruckes die Tonstärke erheblich beeinflusst, ohne — innerhalb ziemlich weiter Grenzen — gleichzeitig die Tonhöhe zu verändern. Es ist also Anschwellen und Abschwellen des Tones, Crescendo und Decrescendo möglich. Von seinem Erfinder Grenié (1810) wurde das Harmonium desshalb mit dem Namen „orgue expressif“ belegt. Der zweite Vorzug besteht darin, dass eine Zunge fast unverstimmbar ist und die Höhe des Zungentones von Einflüssen der Wärme, von Temperaturschwankungen, innerhalb der in der Praxis in Betracht kommenden Grenzen nahezu unabhängig ist. Es kommt dies daher, dass die Ausdehnung fester Körper unter dem Einflusse der Wärme viel weniger bedeutend ist als diejenige gasförmiger Körper. Dieser letztere Vorzug macht das Harmonium vorzugsweise dazu geeignet, als Instrument für Versuche über reine Stimmung zu dienen.

Ein Nachtheil der frei angeblasenen Zungen ist der, dass ihr Klang, wenn er nicht auf irgendwelche Weise verstärkt wird, keine grosse Kraft und Fülle hat, so dass er nur für relativ kleine Räume ausreicht.

73. Die Zungenpfeifen der Orgel. — Will man grössere Schallkraft erzielen, so verbindet man die Zunge mit einem Resonanzraume, einem Schallkörper, der die Aufgabe hat, den Klang der angeblasenen Zunge zu verstärken und die Klangfarbe zu modifiziren. Auf diese Weise verwandelt sich die freischwingende angeblasene Zunge in eine Zungenpfeife.

Die folgenden Figuren

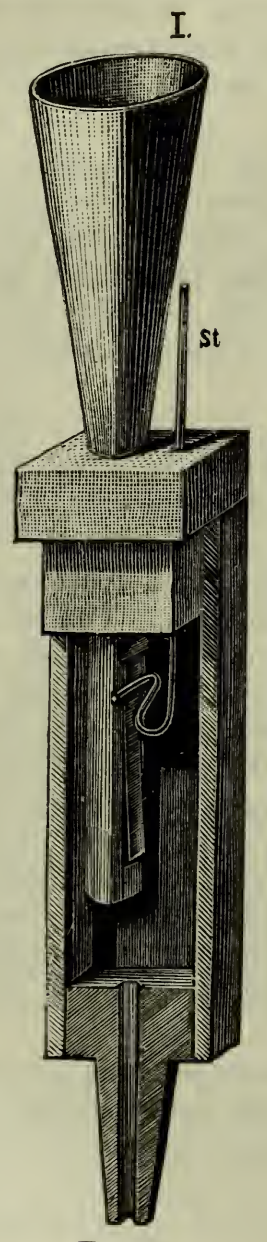


Fig. 25.

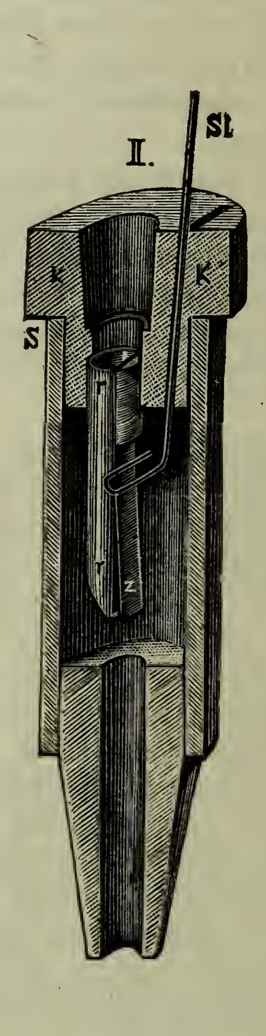


Fig. 26.

zeigen eine Zungenpfeife der Orgel, und zwar I mit kegelförmigem Ansatzrohr, II ohne dasselbe im Längsschnitt. Der von der Windlade herkommende Wind tritt durch den Pfeifenfuss in den sog. Stiefel S, in dessen Kopf kk die Rinne rr (auch Kelle genannt) befestigt ist. An der Rinne liegt die Zunge z in der aus der Figur ersichtlichen Weise an; oben ist die Zunge an der Rinne befestigt, das untere Ende ist frei beweglich und öffnet und schliesst, wenn es hin- und herschwingt, abwechselnd die Verbindung zwischen dem Stiefel und dem Innern der Rinne. Auf dem Kopfe sitzt das charakteristische Ansatzrohr, Schallbecher, Schallkörper oder Aufsatz genannt, welches die Verlängerung der Rinne nach oben bildet. Es hat bei den Orgelpfeifen meist kegelförmige oder pyramidenförmige Gestalt, je nachdem es aus Metall oder aus Holz ist, kann aber auch cylindrisch oder prismatisch sein.

Die folgende Figur zeigt einige Typen.

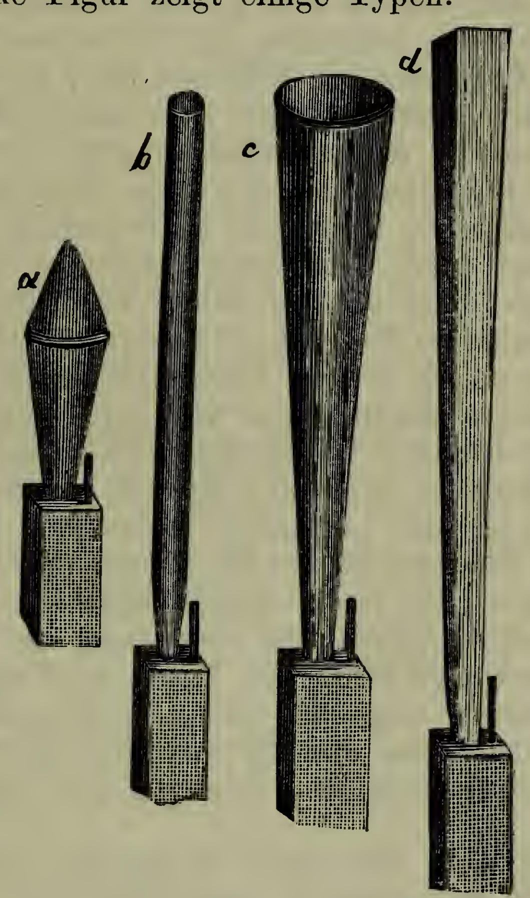


Fig. 27.

Von Wichtigkeit ist endlich die sog. Stimmkrücke oder der Stimmdraht St, der aus dem Kopfe des Stiefels hinausragt und es durch Auf- oder Abwärtsschieben ermöglicht, den schwingenden Theil der Zunge zu verlängern oder zu verkürzen und dadurch den Ton zu vertiefen oder zu erhöhen.

Die Bildung des Tones geschieht zunächst ganz so wie bei der frei angeblasenen Zunge, nämlich dadurch, dass der von der Windlade her in den Stiefel und von da zwischen Zunge und Rinne in das Innere der Rinne getriebene Luftstrom durch die Schwingungen der Zunge in einzelne periodische Luftstösse zerlegt wird. Während aber bei den frei schwingenden Zungen diese Stösse direkt nach Aussen abgegeben werden, treffen sie hier auf die im Schallbecher eingeschlossene Luft, die sie in stehende Schwingungen versetzen. Dadurch wird die Schallkraft und Fülle des Zungenklanges ganz bedeutend verstärkt. Damit dies eintritt, müssen aber gewisse Bedingungen erfüllt sein.

Wie wir wissen, entspricht jeder in einem Hohlraume eingeschlossenen Luftmasse ein Eigenton oder mehrere Eigentöne, die man dadurch erhalten kann, dass man diese Luftmasse in passender Weise in stehende Schwingungen versetzt. Spricht man von dem Eigenton schlechthin, so pflegt man darunter den tiefsten der möglichen Eigentöne zu verstehen.

Es ist nun klar, dass eine ausgiebige Verstärkung des Zungentons nur dann erfolgen wird, wenn der Eigenton des Schallbechers mit dem Zungentone übereinstimmt oder wenigstens nicht weit davon entfernt ist. Ist die Differenz zwischen Eigenton und Zungenton bedeutend, so wird ein Konflikt zwischen den beiden Tönen entstehen. Der Zungenton wird so lange als möglich sein Recht behaupten, kraft der eigenen grossen Elastizität der Zunge; wird aber die Luftmasse mehr und mehr vergrössert, so gewinnt sie Einfluss auf den Zungenton und zwingt die Zunge zu Schwingungen, die sie in freiem Zustande nicht ausführen würde. Freiwillige Arbeit fällt aber besser aus als gezwungene. Die ganze Kraft und Fülle des Tones wird eine Zungenpfeife nur dann entfalten, wenn der Resonanzraum des Schallbechers so beschaffen ist, dass die Eigenschwingungen der darin eingeschlossenen Luftsäule mit denjenigen der freien Zunge übereinstimmen.

Man kann sich von dieser Thatsache überzeugen, indem man z. B. ein cylindrisches Ansatzrohr auf den Kopf einer Zungenpfeife aufsetzt und dessen Länge verändert, etwa indem

man nach Art eines Fernrohrs über einander verschiebbare Cylinder, oder Röhren von ganz verschiedener Länge anwendet. Hat das cylindrische Ansatzrohr eine solche Länge l, dass es, als offene Röhre angeblasen, denselben Ton gibt, wie die freie Zunge, so verstärkt es den Zungenton erheblich und ändert nichts an seiner Höhe; ebenso wenn das cylindrische Rohr die doppelte, dreifache, vierfache etc. Länge hat. Lässt man die Länge des Ansatzrohres allmählich von 0 bis l zunehmen, so hat diese Verlängerung zunächst keinen Einfluss auf den Zungenton, allmählich aber wird der Ton unter dem hemmenden Einfluss der länger gewordenen Röhre tiefer und sinkt bis beinahe zur tieferen Oktave, springt aber, wenn die Länge gleich l geworden ist, auf die ursprüngliche Höhe zurück und klingt nun wesentlich kräftiger als vorher. Verlängert man das cylindrische Ansatzrohr weiter von l bis 2 l, so tritt wieder Sinken des Zungentons ein, aber diesmal nur nahezu bis zur Unterquarte, und wenn die Länge gleich 2 l geworden ist, so findet wieder ein Rücksprung nach der ursprünglichen Tonhöhe statt. Beim weiteren Verlängern von 2 l bis 3 l kann man allmählich die kleine Unterterz erhalten, zwischen 3 l und 4 l nahezu die Untersekunde ($\frac{7}{8}$) u. s. w.

Die vollständige Erklärung dieser von den Gebrüdern Weber (Ernst Heinrich † 1878 und Wilhelm Eduard † 1891) entdeckten Erscheinung und ähnlicher interessanter Phänomene ist nicht sehr einfach und würde hier zu weit führen, soll aber immerhin kurz skizzirt werden.

Wenn die Länge des cylindrischen Ansatzrohres gleich 0, l, 2 l, 3 l, ..., nl, ist, wo l die Länge des kürzesten Rohres ist, das als offene Pfeife angeblasen denselben Ton wie die Zunge gibt, so befindet sich die schwingende Luftsäule im Ansatzrohre stets im Einklang mit dem Tone der freien Zunge und verstärkt denselben. Es bilden sich dann Schwingungsbäuche, also Maxima der schwingenden Bewegung mit unveränderlicher Dichte, bei der Zunge selbst, in der Entfernung l von der Zunge, bei noch grösserer Länge des Ansatzrohres bei 2 l, weiter bei 3 l, u. s. f. bei n . l. Bei der Länge nl des Ansatzrohres bilden sich in demselben n schwingende Unterabtheilungen, aber immer so, dass an der Zunge ein Schwingungsbauch liegt. Es ist hierbei zur Bewegung der Zunge kein Druckwechsel, also kein Wechsel der Dichte an der Zunge erforderlich, da sie in Folge der ihr innewohnenden Elastizität von selbst ungehindert hin und her schwingt. Anders ist es dagegen, wenn die Länge des

Ansatzrohres nicht genau ein Vielfaches von l ist, dann stimmt keiner der Eigentöne der Luftsäule mit dem Tone der freien Zunge überein, die Zunge wird dann zu Schwingungen gezwungen, die sie in freiem Zustande nicht machen würde. Hierzu bedarf es aber eines Druckwechsels, also eines Wechsels von Dichtigkeit an der Zunge, und zwar um so mehr, je weiter sich die Zunge von ihrem Eigentone entfernt. Nehmen wir als Extrem den Punkt unmittelbar vor dem Rücksprung an, für den die Länge der Röhre nahezu, aber etwas kleiner als l, 2 l, 3 l, 4 l, . . . nl ist. In diesem Momente muss an der Zunge der Druckwechsel sehr gross, am grössten sein, um sie zu den für sie abnormen Schwingungen zu zwingen; es muss also dann ganz nahe bei der Zunge ein Knoten liegen, für den ja die Schwankungen der Dichte am grössten sind. Wir können also für diesen Moment annehmen, dass nahe an der Zunge ein Knoten sei, während wir am offenen Ende und an den entsprechenden zwischenliegenden Punkten Schwingungsbäuche haben, die von der Lage der ursprünglichen Bäuche um so mehr abweichen, je mehr sie vom offenen Ende des Rohres entfernt sind. Die Länge des Ansatzrohres, die im Momente des Rücksprunges nahezu aber etwas kleiner als ein Vielfaches von l ist, ist dann, wie bei einer gedeckten Pfeife, ein ungerades Vielfaches einer Viertel-Wellenlänge, also $n \cdot l = (2n - 1)\frac{\lambda_n}{4}$ wenn λ_n die Wellenlänge des Tones im Momente des Rücksprunges bezeichnet. Ist aber λ die dem freien Zungentone entsprechende Wellenlänge, so ist die genaue Länge $l = \frac{\lambda}{2}$. Es folgt also $n \cdot \frac{\lambda}{2} = (2n - 1) \cdot \frac{\lambda_n}{4}$, d. h. $\frac{\lambda}{\lambda_n} = \frac{2n-1}{2n}$, oder da die Wellenlängen sich umgekehrt wie die entsprechenden Schwingungszahlen z und z_n verhalten $\left(z = \frac{c}{\lambda};\ z_n = \frac{c}{\lambda_n};\ \frac{z_n}{z} = \frac{c}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$:

$\frac{z_n}{z} = \frac{2n-1}{2n}$. Für $n = 1$ ist $\frac{z_1}{z} = \frac{1}{2}$, man hat dann also die Unter-Oktave; für $n = 2$ ist $\frac{z_2}{z} = \frac{3}{4}$, entsprechend der Unterquarte. Weiter ist, für $n = 3$, $\frac{z_3}{z} = \frac{5}{6}$, in Uebereinstimmung mit der kleinen Unterterz; für $n = 4$ wird $\frac{z_n}{z} = \frac{7}{8}$, ein Intervall, das etwas grösser ist als die Untersekunde $\frac{8}{9}$ u. s. w. Diese Intervalle stellen die äussersten Grenzen der jeweiligen Vertiefung dar, die faktisch nicht genau erreicht werden, da die Zunge sich der ihr

aufgedrängten Bewegung nur widerwillig fügt und doch nicht genau an der Zunge ein Knoten liegen kann. Ein geringer Anstoss genügt im äussersten Momente, um den Rücksprung nach der normalen Tonhöhe zu bewirken. — Für das Studium dieser und ähnlicher Erscheinungen sei auf die Wellenlehre der genannten Brüder Weber (Leipzig 1825) sowie auf ausführlichere physikalische Werke verwiesen.

Durch die Schwingungen der Zunge wird nicht nur die Luft im Schallbecher in stehende Schwingungen versetzt, sondern es müssen natürlich auch auf der andern Seite der Zunge, also im Stiefel, Schwingungen entstehen, die sich zuweilen bis ins Gebläse zurück verpflanzen. Von diesen Schwingungen im Stiefel muss wenigstens das verlangt werden, dass sie den Schwingungen der Zunge nicht hinderlich seien; der Stiefel muss desshalb angemessene Dimensionen haben und darf nicht zu eng bemessen sein, weil sonst die Zungenpfeife schwer und schlecht anspricht.

Ihre hauptsächlichste Verwendung finden die Zungenpfeifen bei der Orgel als Zungenstimmen, Rohrwerke, auch Schnarrwerke genannt. Man wendet zu diesen sowohl durchschlagende als aufschlagende Zungen an. Die aufschlagenden Zungen geben, frei angeblasen, einen schnarrenden, rasselnden Ton. In früheren Zeiten wandte man meist nur aufschlagende Zungen an, und von ihnen rührt der Name Schnarrwerk her. Durch einen passend geformten Schallbecher wird aber das schnarrende Geräusch gedämpft und der Ton erscheint dann nur als durchdringend scharf, stark, trompetenartig. Doch kann auch der Klang aufschlagender Zungen weicher gemacht werden, dadurch dass man den Rahmen der Rinne mit weichem Leder überzieht oder die Zunge etwas krümmt, so dass sie nicht mit ihrer ganzen Länge auf den Rahmen der Rinne aufschlägt, sondern sich allmählich an denselben anlegt und sich ebenso wieder abrollt. Durch beide Verfahren wird die Diskontinuität der Bewegung vermindert und der Klang weicher.

Die kräftigsten Zungenregister der Orgel mit aufschlagenden Zungen heissen Posaune (Trombone), Trompete, mit ziemlich weitem umgekehrt kegel- oder pyramidenförmigem Schallbecher und glänzendem, fast schmetterndem Klange. Ein weicheres und milderes Register, ebenfalls mit aufschlagender Zunge, ist Fagott. Klarine ist die zur Trompete gehörige Oktavstimme und wie diese mit aufschlagender Zunge versehen. Klarinette

soll den Klang des gleichnamigen Holzblasinstrumentes nachahmen und wird theils aufschlagend, theils durchschlagend gebaut. Oboë klingt zart und mild und wird meist, wenn auch nicht ausschliesslich, durchschlagend konstruirt. Vox humana ist ein Zungenregister, welches die Menschenstimme möglichst getreu nachahmen soll und ähnlich wie Oboë klingt. Sie wird in der Regel im Schwellkasten untergebracht, so dass Anschwellen und Abschwellen des Tones möglich ist, und ausserdem mit Lieblich-Gedackt und mit Tremolo verbunden. Das Tremoliren wird durch ein im Windkanal angebrachtes Ventil hervorgebracht, das im Luftstrome hin- und herschwingt.

Auch bei den Zungenstimmen unterscheidet man gedeckte und offene, obschon die gedeckten nicht ganz geschlossen sein dürfen, da für den Wind doch ein Durchpass frei gelassen werden muss.

Durch Unterschiede in der Mensur der Schallbecher, von der es wesentlich abhängt, ob und in welchem Grade diese oder jene Obertöne geschwächt oder zur Geltung gebracht werden, sowie durch die schon erwähnten Faktoren hat es auch hier der Orgelbauer in der Hand, die Klangfarbe mannigfach zu variiren. Auf weitere Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden. Es sei auf Richter's Katechismus der Orgel und besonders auf das kleine treffliche Buch von Karl Locher: „Erklärung der Orgelregister und ihrer Klangfarben" (Bern, Nydegger und Baumgart, 2. Aufl. 1896) verwiesen, sowie auf grössere Werke über Orgelbau.

Die Zungenregister sind von Temperatureinflüssen abhängiger als die freien Zungen, da die Luft im Schallbecher sich unter dem Einflusse der Wärme ausdehnt; sie sind aber doch bedeutend weniger verstimmbar als Labialpfeifen, da doch die Zunge sich nicht so leicht von ihrem Eigentone abbringen lässt. — In deutschen Orgeln ist die Zahl der Zungenstimmen ungefähr $\frac{1}{7}$ von der Zahl der gesammten Stimmen; bei französischen Orgeln ist der Prozentsatz der Zungenstimmen grösser.

---

74. Die Holzblasinstrumente des Orchesters: Flöte, Klarinette, Oboe und Fagott. — Die Blasinstrumente des Orchesters verdanken ihre Wirkung, ähnlich wie die Orgelpfeifen, den stehenden Schwingungen einer Luftsäule, theils ohne, theils mit Zunge. Nach den Erörterungen über Lippen- und Zungenpfeifen bedarf es nur weniger Worte, um die Wirkungsweise dieser Instrumente in grossen Zügen verständlich zu

machen. Eine eingehende Theorie derselben gehört zu den schwierigen, nur zum Theil gelösten Problemen der Wissenschaft, und würde die engen Grenzen, die uns hier gesteckt sind, weit überschreiten.

Die Blasinstrumente werden bekanntlich in 2 Gruppen eingetheilt: in Holzblasinstrumente und in Blechblasinstrumente.

Die Holzblasinstrumente sind mit Rücksicht auf ihre Wirkungsweise theils mit den Lippenpfeifen, theils mit den Zungenpfeifen der Orgel zu vergleichen.

In der Art der Lippenpfeifen wird die Flöte nebst ihren Abarten angeblasen. Die allgemein gebräuchliche Flöte, auch Querflöte genannt, ist ein cylindrisches geradliniges Rohr von ungefähr 70 Centimeter Länge, das an dem einen Ende verschlossen ist. In der Nähe dieses Endes befindet sich seitlich eine Oeffnung, das sog. Mundloch, das einen scharfen Rand hat. Ueber das Mundloch weg, quer gegen dessen Rand, wird vom Bläser ein Luftstrom geführt und dadurch die Flöte angeblasen. Wie bei den Lippenpfeifen, so wird auch hier ein bandförmiger Luftstreifen gegen eine scharfe Kante geblasen und dadurch die im Flötenrohre eingeschlossene Luftsäule in stehende Schwingungen versetzt. Die Wirkungsweise entspricht vollkommen derjenigen bei einer offenen Lippenpfeife. Bei der sog. Böhmflöte ist die innere Bohrung genau cylindrisch, bei andern Flöten schwach kegelförmig und zwar so, dass der Durchmesser am offenen Ende etwas kleiner ist als am Mundloch. Der mittlere Durchmesser beträgt 14 Millimeter. Der tiefste Ton ist bei den grossen Flöten neuer Konstruktion das kleine *h*, bei älteren Flöten das eingestrichene $\bar{d}$; man erhält ihn, wenn die Luftsäule in der Höhlung der Flöte als Ganzes schwingt. Durch Ueberblasen können, wie bei den offenen Labialpfeifen der Orgel, die nächsten Obertöne erhalten werden, also Oktave, Duodecime und zweite Oktave. Zur Erzeugung zwischenliegender Tonstufen dienen die sog. Tonlöcher, die theils direkt mit den Fingern, theils durch Klappen geschlossen werden können. Die Oeffnung eines Tonloches hat (nahezu) dieselbe Wirkung, als ob die Flöte an der Stelle des Loches abgeschnitten würde, da sich an dieser Stelle ein Schwingungsbauch bilden muss und dann nur die Länge des Rohres zwischen dem Mundloche und dem nächstliegenden geöffneten Tonloche wesentlich in Betracht kommt und für die Schwingungszahl maass-

gebend ist. Mit Hülfe dieser Tonlöcher können alle Halbtonstufen vom obengenannten tiefsten Tone bis zum viergestrichenen *c* hervorgebracht werden, für die höheren Oktaven, vom zweigestrichenen *cis* an, durch Ueberblasen. Anschwellen und Abschwellen des Tones kann innerhalb bestimmter Grenzen durch stärkeres oder schwächeres Anblasen erreicht werden. Da aber, wie bei den Labialpfeifen der Orgel, ein verstärktes Anblasen den Ton etwas in die Höhe treibt, so muss der Flötenspieler dieses Steigen dadurch kompensiren, dass er bei stärkerem Anblasen die Oberlippe weiter hervortreten lässt und das Mundloch dadurch verengert. Dadurch wird aus Gründen, die bei der Besprechung der Labialpfeifen erwähnt wurden, der Ton etwas erniedrigt und die tonerhöhende Wirkung des stärkeren Anblasens aufgehoben. — Durch Verlängern oder Verkürzen des Rohres mit Hülfe des sog. Stimmzuges kann die Grundstimmung der Flöte innerhalb enger Grenzen erniedrigt oder erhöht werden, um sie der Stimmung eines anderen Instrumentes anzupassen. Indessen sind die gegenseitigen Abstände der Tonlöcher für eine bestimmte Grundstimmung berechnet und es wird desshalb durch ein Verlassen dieser Stimmung die Reinheit der Intervalle getrübt, da die relativen Verhältnisse zum Grundtone dadurch etwas verändert werden. —

Die Analyse des Flötenklanges ergibt, dass die Obertöne wenig zahlreich und schwach sind, so dass sich der Klang sehr demjenigen einfacher Töne nähert: er ist in der Tiefe dumpf, in allen Tonlagen zart und weich. In früherer Zeit war die Flöte ein beliebtes Solo-Instrument; die neuere Zeit liebt aber glänzendere Klangfarben und lässt die Flöte als Solo-Instrument nur ausnahmsweise zu Worte kommen. Im Orchester, wo ihre weichen Töne sich mit den Klängen anderer Instrumente in vortheilhafter Weise vermischen, findet sie aber ausgedehnte Verwendung.

Eine Abart der gewöhnlichen Flöte ist die sog. kleine Flöte oder Pickelflöte (flauto piccolo), die ein wesentlich kleineres Format, geringeren Umfang und eine um eine Oktave höhere Tonlage hat. Sie gibt die höchsten in der Orchestermusik gebräuchlichen Töne.

In neuerer Zeit werden Flöten auch aus Metall verfertigt.

Die älteren, früher gebräuchlichen Flötenarten (Plockflöten), zu denen auch das sog. Flageolet gehört, wurden nicht quer, sondern in gerader Richtung angeblasen und hatten ein Mund-

stück mit Aufschnitt und Lippe, genau wie die Labialpfeifen der Orgel. Von den beiden beigefügten Abbildungen zeigt die erste (Fig. 28) eine gewöhnliche Flöte, die zweite (Fig. 29) ein Flageolet; der Unterschied in der Vorrichtung zum Anblasen ist daraus deutlich zu ersehen. Die gewöhnliche jetzt allgemein übliche Querflöte, auch flauto traverso genannt, ist jünger als die alten in gerader Richtung angeblasenen Flöten (flûtes à bec); letztere wurden in älteren Musikwerken viel verwandt, verschwanden aber allmählich aus den Orchestern und traten ihre Rolle an die Querflöten ab.

Die anderen Holzblasinstrumente des Orchesters, die Klarinette, die Oboe und das Fagott sowie deren Abarten, gehören zu den sog. Zungeninstrumenten, d. h. zu denjenigen Instrumenten, bei denen der Tonerreger eine feste Zunge ist und die demgemäss weniger mit den Lippenpfeifen als mit den Zungenpfeifen der Orgel zu vergleichen sind.

Die Anblasevorrichtungen, „Mundstücke“, von Klarinette, Oboe und Fagott sind in den Figuren 30, 31, 32 abgebildet, die Instrumente selbst weiter unten in den Figuren 33, 34, 35.

Das Mundstück der Klarinette besteht aus dem sog. Schnabel (Fig. 30), einem, wie der Name sagt, schnabelförmig zulaufenden Ansatzrohr mit einer seitlichen rechteckigen Oeffnung am Schnabelende, über welche das aus leichtem Rohrholz geschnitzte sog. Blättchen gelegt wird. Das Blättchen liegt auf dem Schnabel genau so auf, wie die Zunge auf der Rinne einer Zungenpfeife. — Die Mundstücke der Oboe (Fig. 31) und des Fagotts (Fig. 32) bestehen aus je 2 aneinandergelegten leichten Blättchen aus Rohrholz, welche in ihrer gegenseitigen Vereinigung ein sog. Röhrchen bilden. Die Figuren 30, 31, 32 stellen die drei Mundstücke in schräger Lage von oben gesehen, proportional ihrer natürlichen Grösse, dar.

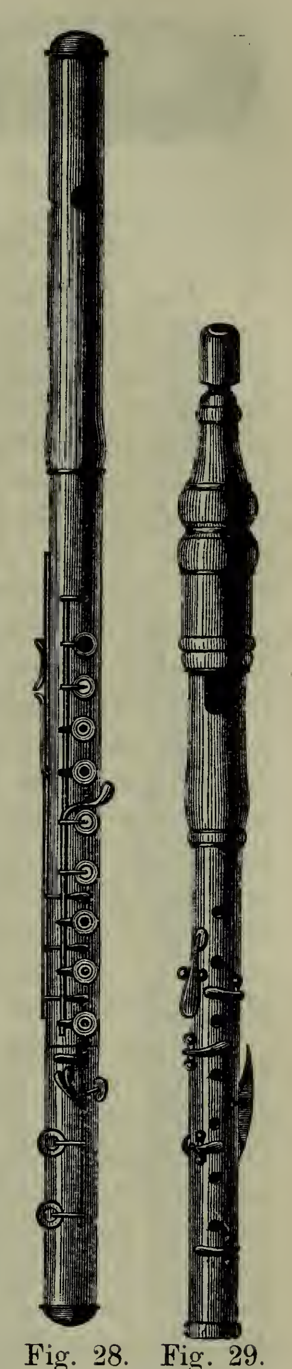
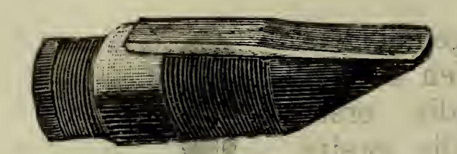


Fig. 28. Flöte. Fig. 29. Flageolet.



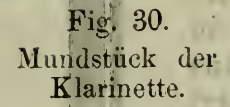


Fig. 30. Mundstück der Klarinette.



Fig. 31. Mundstück der Oboe.

Fig. 32. Mundstück des Fagotts.

Das Anblasen von Klarinette, Oboe und Fagott geschieht nun in durchaus ähnlicher Weise wie bei den Zungenpfeifen. Der Bläser treibt durch die zunächst offenstehende schmale Spalte einen Luftstrom; dadurch gerathen bei Oboe und Fagott die beiden Blättchen, bei der Klarinette das eine Blättchen, in schwingende Bewegung, der Luftstrom wird abwechselnd unterbrochen und wieder durchgelassen. So entsteht auf genau dieselbe Weise wie bei einer Sirene oder bei einer angeblasenen Zunge eine periodische stossweise Erschütterung der Luft und somit, bei hinreichend rascher Aufeinanderfolge, ein musikalischer Ton oder Klang. Es besteht jedoch ein fundamentaler Unterschied zwischen den Blättchen, mit denen wir es hier zu thun haben, und den schweren Metallzungen des Harmoniums und der Orgel. Bei den Zungenpfeifen der Orgel schreibt (ebenso wie beim Harmonium) die Zunge durch ihre eigene grosse Elastizität das Tempo der Bewegung, also die Tonhöhe vor, und die dieser Tonhöhe gemäss abgemessene Luftsäule dient nur zur Verstärkung und Veredlung des Tones. Die Zunge ist also dort aktiv und im wahren Sinne des Wortes tonangebend. Man nennt diese Zungen harte Zungen.

Ganz anders verhält es sich aber bei unsern Blasinstrumenten. Hier muss ein und dieselbe Zunge, ein und dasselbe Blättchen, zur Erzeugung von Tönen der verschiedensten Tonhöhe dienen. Die Blättchen der Klarinette, der Oboe und des Fagotts sind aus leichtem, elastischem Rohrholz geschnitten und geben freilich vermöge ihrer Elastizität, wenn man sie frei, d. h. ohne Ansatzrohr anbläst, eigene sehr hohe Töne. Indessen ist die eigene Bewegungsenergie dieser Blättchen, im Verhältniss zu derjenigen der schweren Metallzungen, sehr gering; sie haben daher die Fähigkeit, sich mächtigeren, von Aussen kommenden Impulsen, unter Verzicht auf ihre eigene Selbständigkeit, unterzuordnen und anzupassen. Diese mächtigeren Impulse kommen aber von den stehenden Wellen her, die sich im Instrumente selbst, d. h. im Klarinettenrohr und im Rohr der Oboe und des Fagotts, bilden. Die Zungen, d. h. die Blättchen des Mundstücks,

dienen hier zwar als Erreger und Unterhalter des Tones, sie sind aber selbst nicht tonangebend, sondern es bilden sich im Rohr sofort, momentan, stehende, der Rohrlänge entsprechende Schwingungen, welche den Blättchen ihre Schwingungsperiode aufdrängen. Die Blättchen sind hier weniger aktiv als passiv, sie werden geschwungen, und tonangebend ist hier die im Rohr des Instrumentes eingeschlossene Luftsäule. Man nennt solche Zungen weiche Zungen.

Die weichen Zungen machen also erzwungene Schwingungen unter dem Einflusse einer schwingenden Luftsäule. Völlig widerstandslos folgen sie aber der ihnen aufgezwungenen Bewegung nicht, es ist ein gewisser Druckwechsel erforderlich, um diesen, wenn auch geringen Widerstand zu überwinden. Daraus ergibt sich aber, dass sich ganz in der Nähe der Zunge, also dicht hinter der Anblasevorrichtung, ein Knoten bilden muss; denn nur in unmittelbarer Nähe eines Knotens ist der periodische Wechsel der Dichtigkeit und somit der Druckwechsel hinreichend gross, um der weichen Zunge jede beliebige Schwingungsperiode aufzudrängen. Wenn wir schliessen wollen, welche stehenden Wellen in den Röhren der Klarinette, der Oboe und des Fagotts sich bilden können, so müssen wir also annehmen, dass nahe an der Anblaseöffnung sich ein Knoten befinde, was auf dasselbe hinauskommt, als ob das Rohr an diesem Ende gedeckt wäre.

Das Rohr der Klarinette (Fig. 33) hat genau cylindrische Bohrung; die Länge und der Durchmesser variiren je nach der Grundstimmung. Für die B-Klarinette ist die Länge 56 cm, der Durchmesser 1,4 cm. Klarinetten in tieferer Stimmung haben grössere, solche in höherer Stimmung kleinere Dimensionen. Sehr wesentlich ist die cylindrische Bohrung. Die Eigentöne des Klarinettrohrs sind dieselben wie diejenigen einer einseitig gedeckten Röhre von denselben Dimensionen. Die Klarinette gibt also, ebenso wie eine gedackte Orgelpfeife, nur Obertöne ungeraden Ranges: 1, 3, 5, 7 . . . also Grundton, Duodecime, Terz der 2. Oktave, u. s. w., welche durch Ueberblasen erhalten werden können.

Fig. 33.
Klarinette.

Alle zwischenliegenden Töne müssen durch Tonlöcher und Klappen, ähnlich wie bei der Flöte, erzeugt werden. Der Tonumfang beträgt 3 Oktaven und eine kl. Terz, und zwar geht er für die *C*-Klarinette von *e* bis $\overline{\overline{\overline{g}}}$, für die *Es*-Klarinette liegt er um eine kl. Terz höher zwischen *g* und $\overline{\overline{\overline{b}}}$, für die *B*-Klarinette einen Ton tiefer zwischen *d* und $\overline{\overline{\overline{f}}}$ u. s. w. Nach der Höhe zu ist, wie bei allen schwingenden Luftsäulen, eine Grenze dadurch gezogen, dass Wellen, deren Länge im Verhältniss zum Querschnitt der Säule zu klein wird, nicht zu Stande kommen können. Die Klangfarbe der in Konzert- und Theater-Orchestern üblichen Klarinetten ist weich und voll, namentlich in den mittleren Lagen. In den Militärkapellen werden ausserdem kleinere Klarinetten mit höheren Tonlagen und schärferem durchdringenderem Klange angewandt.

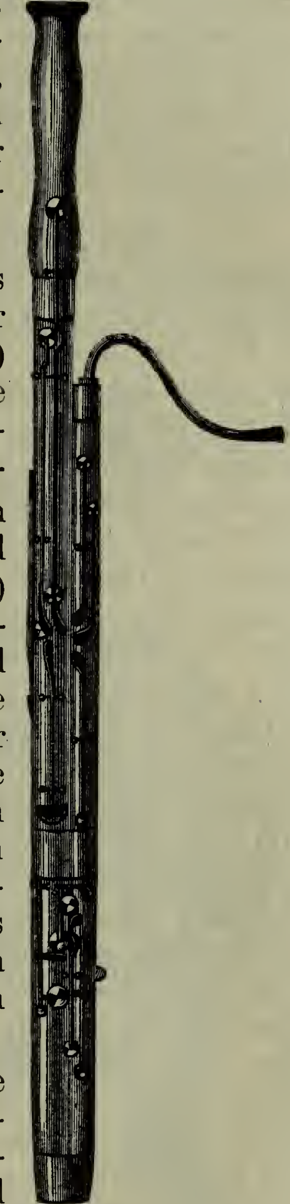

Fig. 34. Oboe.

Von der Klarinette unterscheiden sich Oboe und Fagott dadurch, dass das Mundstück zwei gegen einander schwingende Blättchen (Röhrchen) hat, ausserdem aber namentlich durch die kegelförmige, von der Anblaseöffnung nach dem andern Ende zu sich erweiternde Gestalt des Rohres. Wie das Experiment und die mathematisch-analytische Theorie (s. Helmholtz, Tonempfindungen 4. Aufl. Beilage VII) übereinstimmend zeigen, haben kegelförmige Röhren, welche bis zur Spitze des Kegels geschlossen sind, Eigentöne, die sehr nahe der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... entsprechen, ähnlich wie bei einer ohne Zunge angeblasenen beiderseits offenen cylindrischen Pfeife. Es sind also im Klange der Oboe und des Fagotts nicht nur Obertöne ungeraden Ranges enthalten, wie bei der Klarinette, sondern auch die geradzahligen. Oboe und Fagott geben beim Ueberblasen als ersten Oberton die Oktave, die Klarinette springt dagegen beim Ueberblasen direkt in die Duodecime, d. h. in die Quinte der höhern Oktave über. Man sagt daher von ersteren Instrumenten auch wohl, dass sie „oktaviren", von letzterer, dass sie „quintire".

Das Rohr der Oboe (Fig. 34) hat eine Länge von 65 cm und einen mittleren (inneren) Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ cm. Der Tonumfang reicht vom kleinen *b* oder *h* chromatisch bis zum dreigestrichenen $\overline{\overline{\overline{f}}}$. Die höheren

Töne von $\overline{\overline{cis}}$ an werden durch Ueberblasen in die Oktave und Duodecime erhalten. Die Tonlöcher und Klappen dienen zur Erzeugung derjenigen Töne, welche nicht direkt nur durch verschiedenartiges Anblasen erhalten werden können. Der Klang der Oboe ist schärfer als derjenige der Klarinette, in gewissen Tonlagen demjenigen einer menschlichen Stimme nicht unähnlich. Das sog. Englische Horn ist eine Alt-Oboe, die um eine Quinte tiefer steht als die gewöhnliche Oboe. Der Klang ist weicher, schwermüthiger (s. z. B. den letzten Akt von „Tristan und Isolde", in welchem Wagner eine durch kein anderes Instrument wiederzugebende Wirkung erzielt).

Das Fagott (franz. „Basson") hat ein langes konisch verlaufendes Tonrohr von 2,8 Meter Länge, das einmal umgebogen ist. (Fig. 35.) Der grösseren Länge entsprechend ist die Grundstimmung eine viel tiefere; der Tonumfang reicht vom Kontra-$\underline{B}$ bis zum zweigestrichenen $\overline{\overline{des}}$, vom kleinen *f* an durch Ueberblasen. Bei der grossen Länge und relativ engen Mensur (mittl. Durchmesser 2 cm) erhält man die höhern Partialtöne durch Ueberblasen verhältnissmässig leicht. Tonlöcher und Klappen haben denselben Zweck und dieselbe Wirkung wie bei der Klarinette und der Oboe. Die Anblasevorrichtung besteht, wie schon oben bemerkt, aus 2 Blättchen, die am äussersten Ende eines länglichen gewundenen Metallröhrchens befestigt sind. Der Klangcharakter ist etwas dick, schwerfällig. Das Kontrafagott ist eine Abart des gewöhnlichen Fagotts, von grösseren Dimensionen und tieferem Klange als dieses.


Fig. 35. Fagott.

Bei den Holzblasinstrumenten mit Zunge hat es der Bläser in der Hand, durch verschiedenen Druck der Lippen, durch verschieden tiefes Einsetzen des Röhrchens und ähnliche Kunstgriffe den Ton etwas zu erhöhen oder zu vertiefen. Dass, wie bei den Orgel-

pfeifen, eine Steigerung der Temperatur den Ton in die Höhe treibt, ist nach unseren früheren Erörterungen selbstverständlich.

Zu den Holzblasinstrumenten mit weichen Zungen sind, obschon aus Messing gefertigt, zwei aus der Neuzeit stammende Instrumentengattungen zu zählen: die sog. Saxophone (nach ihrem Erfinder A. Sax in Paris benannt), Instrumente mit konischem Messingrohr, die mittels eines Klarinettschnabels angeblasen werden, und die sog. Sarrusophone (nach ihrem Erfinder, dem Franzosen Sarrus), ebenfalls mit konischem Rohre und mit einem Mundstücke wie die Oboe oder das Fagott. Diese Instrumente sind in französischen Militärkapellen im Gebrauch.

75. Die Blechblasinstrumente des Orchesters: Horn, Trompete und Cornett, Posaune. — Gehen wir endlich über zu einer kurzen Besprechung der grossen Gruppe der Blechblasinstrumente. Obschon nicht mit Zungen versehen, sind sie doch im gewissen Sinne zu den Instrumenten mit weicher Zunge zu zählen; die tonerregenden Zungen bringt aber der Bläser selbst mit: es sind seine Lippen. Die Anblasevorrichtung des Instrumentes selbst besteht einfach aus einem trichterförmigen, mehr oder weniger gehöhlten Mundstücke von grösseren oder kleineren Dimensionen, je nach dem speziellen Zwecke und der Grösse des Instrumentes. An die Höhlung des Mundstückes legt der Bläser seine mehr oder weniger gespannten Lippen an. Die menschlichen Lippen sind weiche membranöse Zungen, die elastischer Schwingungen fähig sind. Der vom Bläser ausgehende Luftstrom erzwingt sich einen Ausgang zwischen den anfänglich geschlossenen Lippen. Diese öffnen sich nach Aussen (im Gegensatz zu den sich nach Innen öffnenden sog. einschlagenden Zungen der Oboe und des Fagotts nennt man sie desshalb „ausschlagende“ Zungen), schwingen dann, wenn sie hinreichend gespannt sind, zurück nach Innen, sperren dadurch den Luftstrom ab, bis er sich wieder zwischen den Lippen durchbricht und das Spiel von Neuem beginnt. Das Blaserohr der Blechblasinstrumente ist ein Rohr, das sich vom Mundstücke nach dem anderen trichterförmigen Ende zu allmählich kegelförmig erweitert. Das Rohr ist mehrfach gewunden und um so länger und windungsreicher, je tiefer die Grundstimmung des Instrumentes liegt. Wie bei den Holzblasinstrumenten, so muss sich auch hier nahe an der Anblaseöffnung ein Knoten

bilden. Wie bei Oboe und Fagott sind die Eigentöne des kegelförmigen Rohres die der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, . . . entsprechenden Partialtöne. Die Kunst des Bläsers besteht in erster Linie darin, nach Belieben jeden dieser Eigentöne, Naturtöne, durch passendes Anblasen zu wecken. Der richtige „Ansatz“ der Lippen, der allein dem Bläser über die seinem Instrumente zu entlockenden Töne Macht verleiht, ist das wichtigste Erforderniss eines guten Bläsers und nur durch Uebung, gepaart mit natürlicher Veranlagung, zu erlernen und aufrecht zu erhalten. Im Allgemeinen lässt sich hierüber nur das sagen, dass zur Erzeugung hoher Töne die Spannung der Lippen grösser, die Mundspalte enger sein muss, als wenn man tiefe Töne hervorbringen will. Bei Instrumenten in hoher Stimmung wird man (ceteris paribus) engere Mundstücke anwenden, als bei solchen in tiefer Stimmung. In allen Fällen sind es aber stets nur die Eigentöne des Rohres, welche durch das Anblasen geweckt werden.

Die Mensur der Blechblasinstrumente ist, im Vergleich zu derjenigen der Holzblasinstrumente oder gar der Orgelpfeifen, bedeutend enger. Während man bei Orgelpfeifen und Holz-

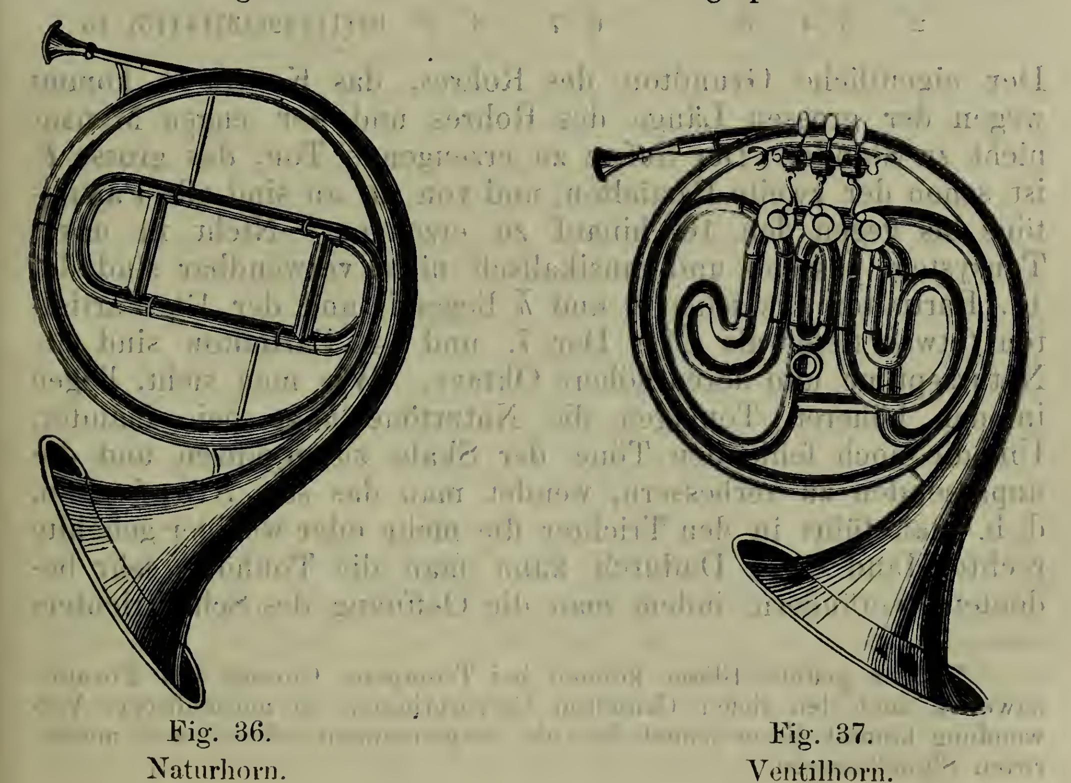


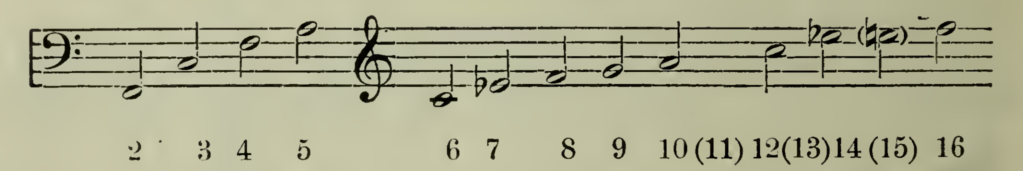
Fig. 36. Naturhorn.

Fig. 37. Ventilhorn.

blasinstrumenten vorzugsweise, bei ersteren fast ausschliesslich, mit Grundtönen operirt, kommen bei den Blechinstrumenten nur die Obertöne zu musikalischer Verwendung, während der Grundton, das erste Glied der Kette, meist ganz fehlt*). Desshalb wendet man sehr grosse Länge und enge Mensur an, da bei enger Mensur eine Theilung in schwingende Unterabtheilungen leichter erfolgt und die Obertöne leichter zu erzeugen sind.

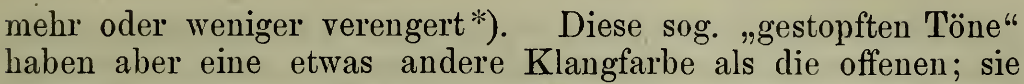
Betrachten wir zunächst das Horn, dessen ältere Form, das Naturhorn oder Waldhorn (Fig. 36), ein einfaches gewundenes Rohr ist, während die neuere Form, das Ventilhorn (Fig. 37), mit 3 Ventilen versehen ist.

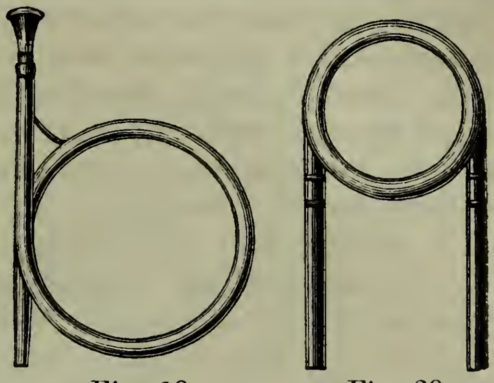
Die Länge des Naturhorns beträgt im Durchschnitt etwa 4 Meter, der mittlere Durchmesser des Rohres etwa 13 Millimeter. Die z. B. auf dem *F*-Horne zu erzeugenden Naturtöne sind:



Der eigentliche Grundton des Rohres, das Kontra-*F*, kommt wegen der grossen Länge des Rohres und der engen Mensur nicht zu Stande. Der tiefste zu erzeugende Ton, das grosse *F*, ist schon der zweite Partialton, und von da an sind alle Partialtöne bis gegen den 16. hinauf zu erzeugen. Nicht in unser Tonsystem passend und musikalisch nicht verwendbar sind der 11. Partialton (zwischen $\bar{b}$ und $\bar{h}$ liegend) und der 13. Partialton (etwas tiefer als $\bar{d}$). Der 7. und 14. Partialton sind die Naturseptime und deren höhere Oktave. Wie man sieht, liegen in den höheren Tonlagen die Naturtöne nahe bei einander. Um die noch fehlenden Töne der Skala zu ergänzen und die unpassenden zu verbessern, wendet man das sog. Stopfen an, d. h. man führt in den Trichter die mehr oder weniger gehöhlte rechte Hand ein. Dadurch kann man die Tonhöhe sehr bedeutend verändern, indem man die Oeffnung des Schalltrichters

*) Sehr geübte Bläser können bei Trompete, Cornett und Posaune zuweilen auch den tiefen Grundton hervorbringen, zu musikalischer Verwendung kommt dieser jedoch fast nie, ausgenommen bei den weit mensurirten Signalhörnern.


mehr oder weniger verengert*). Diese sog. „gestopften Töne“ haben aber eine etwas andere Klangfarbe als die offenen; sie klingen matter und dumpfer. Diese Klangfarbe ist nicht immer erwünscht; statt zu viel gestopfte Töne zu verwenden, zieht man es vor, nöthigenfalls die ganze Grundstimmung zu verändern. Das geschieht durch das Aufsetzen oder Einsetzen von sog. Bögen, eines Aufsatzbogens oder eines Einsatzbogens (Fig. 38 und Fig. 39). Diese Bögen haben, je nach der zu erzielenden Grundstimmung, verschiedene Grösse; durch sie wird das Rohr des Horns mehr oder weniger verlängert und dadurch die Grundstimmung mehr oder weniger erniedrigt. So unterscheidet man, je nach der Grundstimmung, Hörner in *C*, *D*, *Es*, *E*, *F*, u. s. w.


Fig. 38. Fig. 39.

Beim Ventilhorn wird das Stopfen entbehrlich gemacht durch Anwendung von Ventilen. Durch das Niederdrücken eines Ventils wird an der betreffenden Stelle das Hauptrohr abgesperrt und ein gewundenes Seitenrohr geöffnet, in welches die Schwingungen abzuzweigen haben, bevor sie wieder ins Hauptrohr einlenken. Dadurch wird die Gesammtlänge des Rohres vergrössert und der Ton erniedrigt. Das Niederdrücken des ersten (dem Mundstücke zunächst liegenden) Ventils bewirkt Erniedrigung der Grundstimmung um 2 Halbtöne oder einen Ganzton; das Niederdrücken des zweiten, mittleren Ventils erniedrigt die Stimmung um 1 Halbton, und das dritte Ventil ermöglicht es, durch Niederdrücken eine Erniedrigung der ganzen Stimmung um 3 Halbtöne oder eine kleine Terz zu erlangen. Durch gleichzeitiges Niederdrücken mehrerer Ventile kann man die Vertiefung noch weiter treiben: Ventil 2 und 3 zusammen geben

*) Das Stopfen allein übt auf die Tonhöhe einen ähnlichen Einfluss aus, wie das theilweise Bedecken der oberen Oeffnung bei einer offenen Orgelpfeife: der Ton wird tiefer. Wenn man dennoch da und dort die Meinung vorfindet, das Stopfen treibe den Ton in die Höhe, so beruht dies darauf, dass der Bläser beim Stopfen gleichzeitig unbewusst die Art des Anblasens verändert, so dass die Wirkung das Resultat gleichzeitigen Stopfens und Höherblasens ist, wobei die Wirkung des letzteren überwiegt. Von dieser Thatsache konnte sich der Verfasser durch die Güte des Herrn Kühle, Dirigenten der Kapelle der Garde-Pioniere in Berlin, überzeugen.

eine Erniedrigung von $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$, d. h. von 4 Halbtönen oder einer grossen Terz; ebenso geben Ventil 1 und Ventil 3 zusammen 5 Halbtöne oder eine Quarte, endlich alle drei Ventile zusammen 6 Halbtöne oder eine verminderte Quinte. Es lässt sich also mit Hülfe der Ventile stufenweise das ganze Intervall einer Quinte ausfüllen, und da in der Reihe der Naturtöne die grösste vorkommende Lücke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen gerade eine Quinte ist, so erhält man durch Anwendung der Ventile eine fortlaufende chromatische Tonreihe. Durch die Ventile ist die annähernde Gleichheit des Klanges derjenigen Töne, die man früher nur durch Stopfen erhalten konnte, mit dem Klange der Naturtöne erreicht worden. Da indessen doch nur glatte undurchbrochene Röhren den kräftigen Luftschwingungen hinreichenden Widerstand bieten, um nicht selbst allzusehr in Erschütterung versetzt zu werden und dadurch

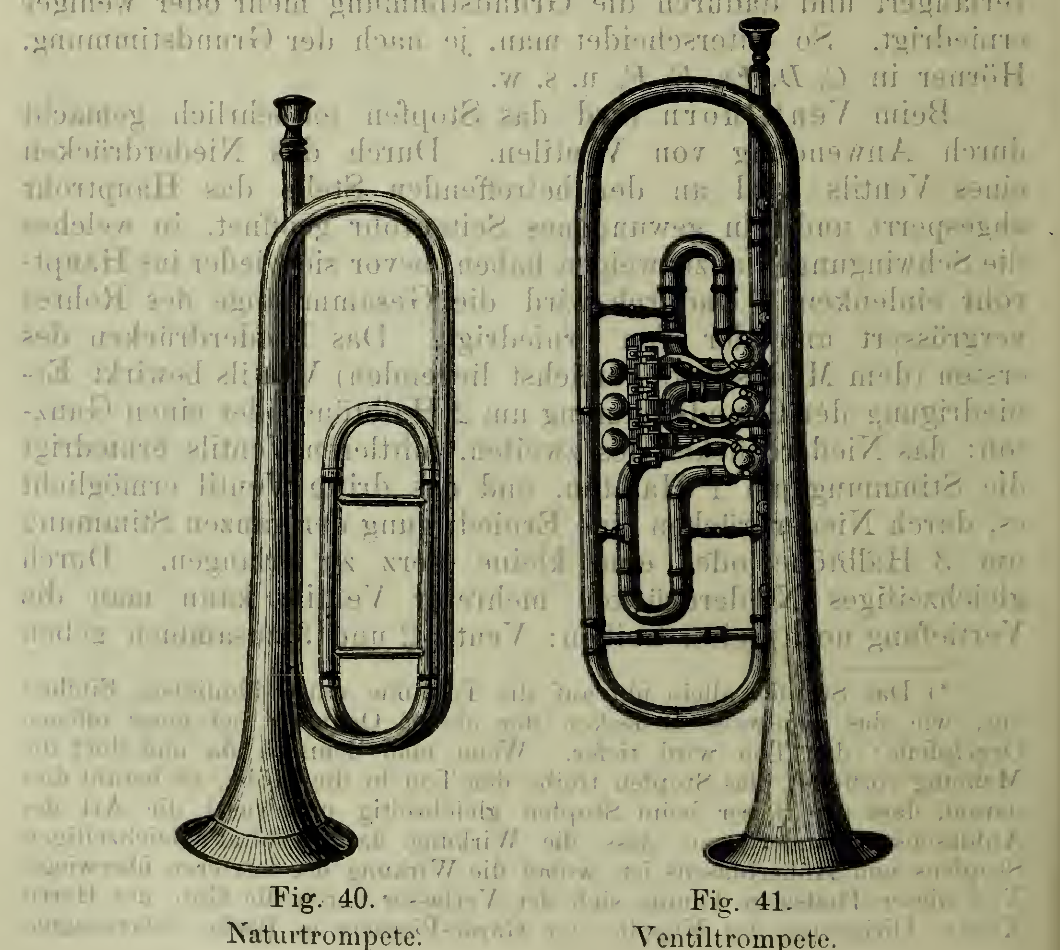


Fig. 40. Naturtrompete.

Fig. 41. Ventiltrompete.

die Bewegungsenergie der Luftschwingungen zu dämpfen, so geschieht die Anwendung des Ventilhorns immer mehr oder weniger auf Kosten der Fülle und des Glanzes des Klanges, der dem Naturhorn eigen ist. — Durch die Ventile sind die Aufsatz- und Einsatzbögen nicht ganz ausser Kurs gekommen, sie werden immer noch angewandt, da sie dem Spieler technische Erleichterungen und die Möglichkeit zu verschiedenen Klangabstufungen bieten; ihre Zahl kann aber nun bedeutend eingeschränkt werden. Das Stopfen des Horns wird auch beim Ventilhorn angewandt, aber nur da, wo vom Komponisten ein bestimmter düsterer, unheimlicher Klangcharakter beabsichtigt wird.

Was wir soeben vom Horn sagten, gilt im Wesentlichen auch von den verschiedenen Arten der Trompete (Tromba oder Clarino). Auch hier unterscheidet man Naturtrompeten (Fig. 40) und Ventiltrompeten (Fig. 41). Die Naturtrompete hat einen sog. Stimmzug, d. h. einen beweglichen Einsatzbogen, der mehr oder weniger ausgezogen werden kann, wodurch die Stimmung mehr oder weniger erniedrigt wird. Auch hier werden die Partialtöne vom zweiten an als Naturtöne verwendet. Es werden auch, wie beim Horn, Aufsatz- und Einsatzbögen verwendet, und das Stopfen übt hier wie dort dieselbe Wirkung aus. Bei der Ventiltrompete haben die Ventile genau dieselbe Aufgabe und dieselbe Wirkung, wie es soeben

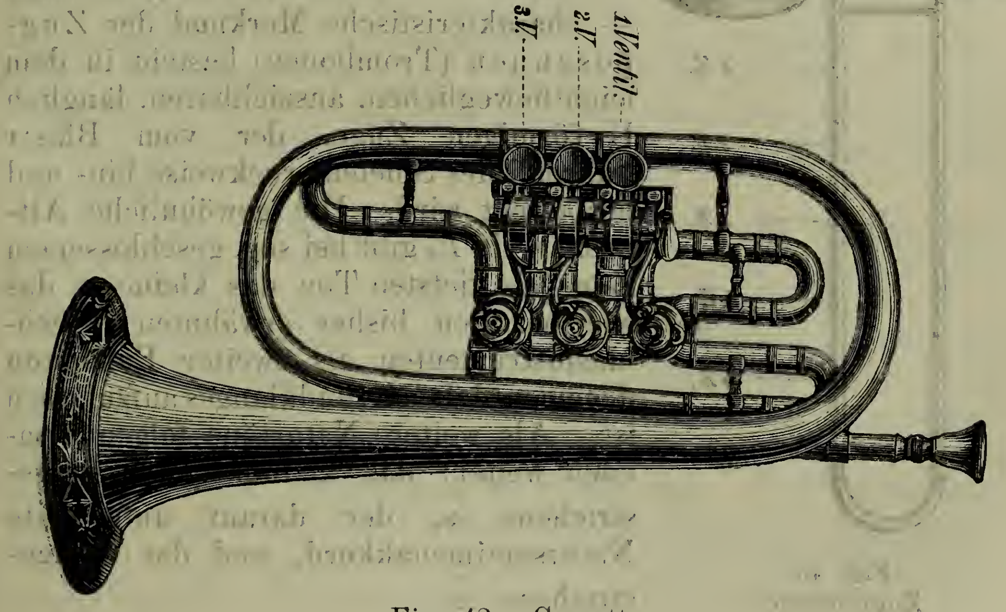


Fig. 42. Cornett.

auseinandergesetzt wurde. Die Trompeten werden als Alt-, Tenor-, Bass-Trompeten etc. in verschiedenen Dimensionen gebaut. Die Mensur ist etwas weiter als bei den Hörnern, der Klang je nach der Art des Anblasens glänzend, durchdringend, schmetternd, oder auch sanfter und weicher (s. N. 86). —

Eine Mittelstellung zwischen den Hörnern und den Trompeten nehmen die Cornette (Cornets à pistons) ein, von denen das gebräuchlichste das Cornett in *B* ist (Fig. 42). Wie man erkennt, erweitert sich hier das kegelförmige Rohr in etwas rascherem Verhältniss als bei der Trompete oder beim Horn. Der Klang ist sehr trompetenähnlich, aber etwas milder. Ueber Naturtöne, Wirkung der Ventile u. s. w. liesse sich im Wesentlichen dasselbe sagen wie bei der Ventiltrompete und dem Ventilhorn. Durch ein längeres Mundstück kann die *B*-Stimmung in die *A*-Stimmung verwandelt werden. Nächst der *B*-Stimmung werden die Stimmungen in *A* und *C* am häufigsten gebraucht. Die Notirung geschieht wie bei den Hörnern, den Trompeten und den Klarinetten, nämlich so, dass die Note *C* nicht die absolute Tonhöhe, sondern den Grundton der betreffenden Stimmung bezeichnet.

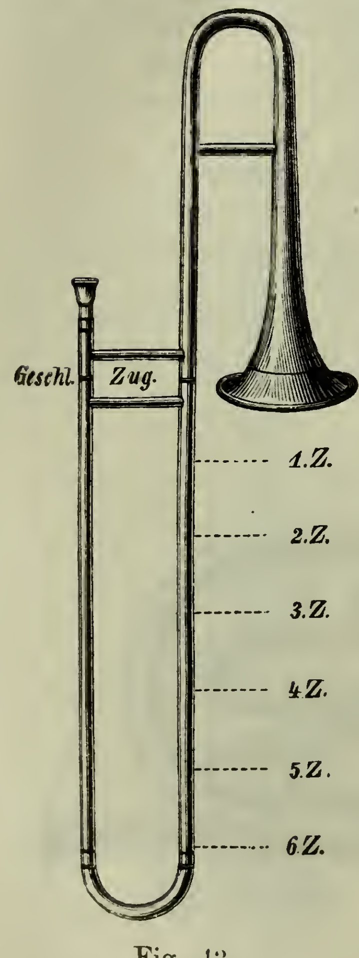


Fig. 43.
Zugposaune.

Das — rein äusserlich genommen — charakteristische Merkmal der Zugposaunen (Trombonen) besteht in dem leichtbeweglichen, ausziehbaren, länglich U-förmigen Zuge, der vom Bläser während des Spielens ruckweise hin- und herbewegt wird. Die gewöhnliche Altposaune in *Es* gibt bei sog. geschlossenem Zuge als tiefsten Ton das kleine *es*, das wie bei den bisher erwähnten Blechblasinstrumenten als zweiter Partialton des eigentlichen Grundklanges aufzufassen ist. Als weitere Naturtöne folgen demnach weiter: das kleine *b*, das eingestrichene $\overline{es}$, der darauf aufgebaute Naturseptimenakkord, und das zweigestrichene $\overline{\overline{es}}$.

Durch den „ersten Zug“ wird die ganze Grundstimmung, also alle eben erwähnten Naturtöne, um einen Halbton erniedrigt, durch den „zweiten Zug“ um 2 Halbtöne, u. s. w. Im Ganzen gibt es 6 „Züge“, so dass man in Stufen von je einem Halbton bis zu 6 Halbtönen, d. h. bis um eine verminderte Quinte nach unten steigen kann. Der tiefste erreichbare Ton wird auf diese Weise das grosse *A*. — Ausser der Altposaune gibt es Diskant-, Tenor-, Tenorbass-, Bassposaunen, die nur zum Theil heutzutage noch in Gebrauch sind und sich von einander hauptsächlich durch ihr verschieden grosses Format und entsprechend verschiedene Grundstimmung unterscheiden. Endlich wurden die Posaunen auch als „Ventilposaunen“ mit Ventilen versehen. Auf diese sowie auf die Tuben (Baryton, Bombardon, Helikon u. s. f.) und andere ähnliche Instrumente einzugehen, liegt ausserhalb der uns hier gesteckten Grenzen. Es mag genügen, die wichtigsten Typen als Hauptvertreter charakterisirt zu haben. Zum Schlusse noch die Bemerkung, dass die sog. „Stürze“, d. h. die weiten Schalltrichter, an dem spezifisch schmetternden Klange der Blechblasinstrumente wesentlichen Antheil zu haben scheinen.

76. Der Kehlkopf und die menschliche Stimme. — Eine ganz besondere hervorragende Stellung unter den zur Erzeugung musikalischer Klänge dienenden Instrumenten nimmt das menschliche Stimmorgan ein. Obschon es in allererster Linie zum Sprechen, also zum Hervorbringen artikulirter Laute bestimmt ist und verwandt wird, und obschon es nicht zu den Musikinstrumenten in engerem Sinne gezählt zu werden pflegt, ist es doch in mancher Hinsicht, besonders was musikalische Ausdrucksfähigkeit anbetrifft, das vollkommenste Musikinstrument.

Um die Wirkungsweise des menschlichen Stimmorgans kennen zu lernen und zu verstehen, müssen wir in erster Linie mit dem Wesentlichen seines Baues bekannt werden.

Die menschlichen Lungen stehen durch die Luftröhre mit der Mundhöhle und der Nasenhöhle in Verbindung. Am oberen Ende der Luftröhre befindet sich das Stimmorgan, der Kehlkopf, bestehend aus mehreren festen Knorpeln, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind (Fig. 44). Das obere Ende der Luftröhre ll wird von einem festen Ringe, rr, dem Ringknorpel umschlossen, der die feste Grundlage des Kehlkopfes bildet (Fig. 46). Dieser Ring ist hinten bedeutend höher als vorn.

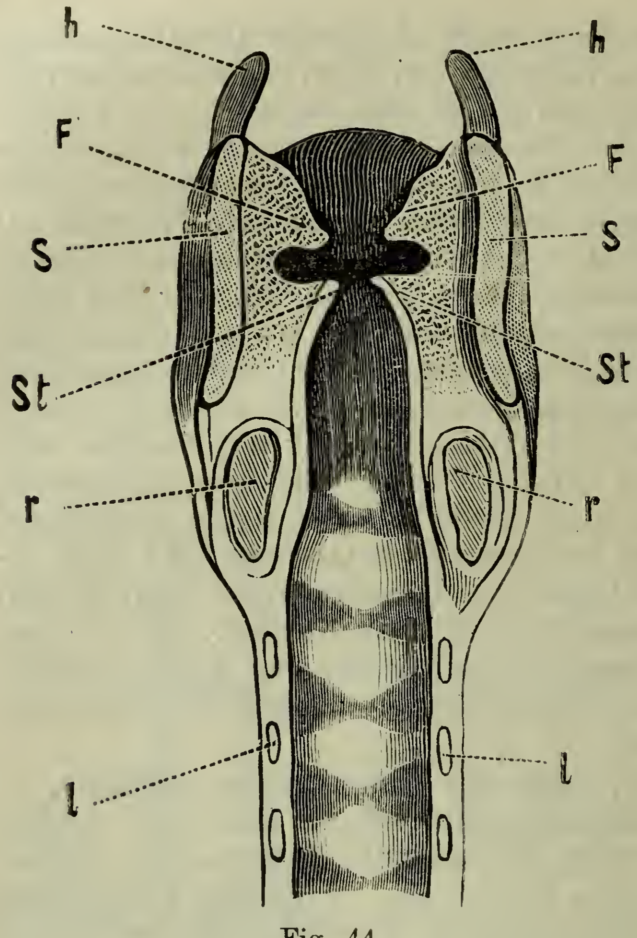


Fig. 44.

Fig. 44.

Vertikaler Durchschnitt des Kehlkopfes von hinten.

ll Luftröhre,
rr Ringknorpel,
ss Schildknorpel,
hh obere Hörner des Schildknorpels,
St St Stimmbänder.
FF falsche Stimmbänder.

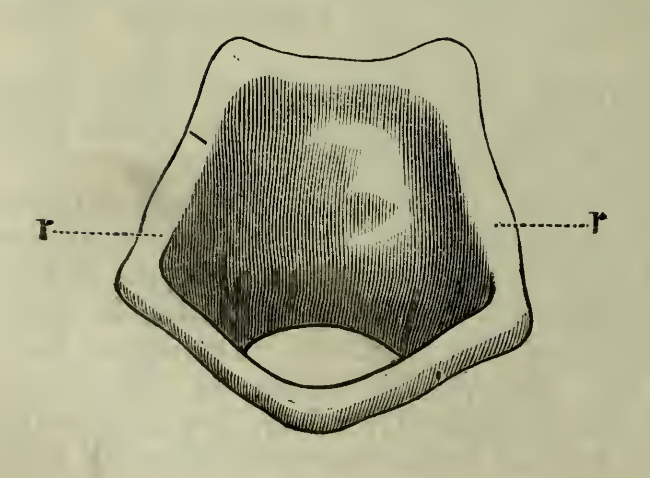


Fig. 46.

Fig. 46.

Ringknorpel von oben.

Fig. 45.
Schildknorpel u. Ringknorpel im Durchschnitt von oben mit Stimmbändern.

pp Seitenplatten des Schildknorpels,
a Adamsapfel,
r Ringknorpel,
dd Richtung der Drehaxe des Schildknorpels,
gg Giessbeckenknorpel,
St St Stimmbänder.

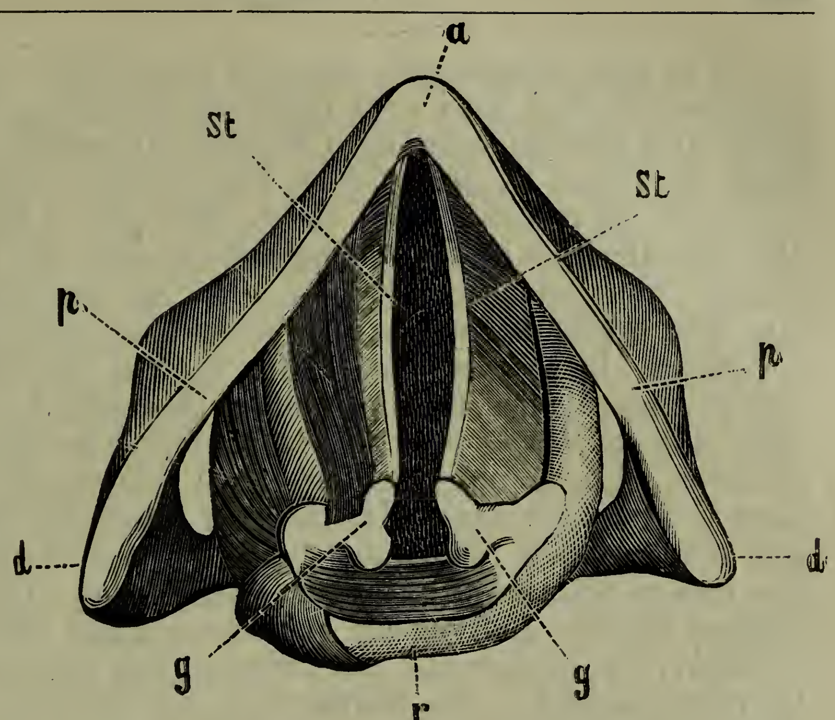


Fig. 45.

Fig. 47.
Schildknorpel von der Seite.

K vordere Kante,
a Adamsapfel,
p rechte Seitenplatte,
hh obere Hörner,
c rechtes unteres Horn.

Fig. 47.

Fig. 48.
Schildknorpel von oben im Durchschnitt.

pp Seitenplatten,
hh obere Hörner,
a Adamsapfel.

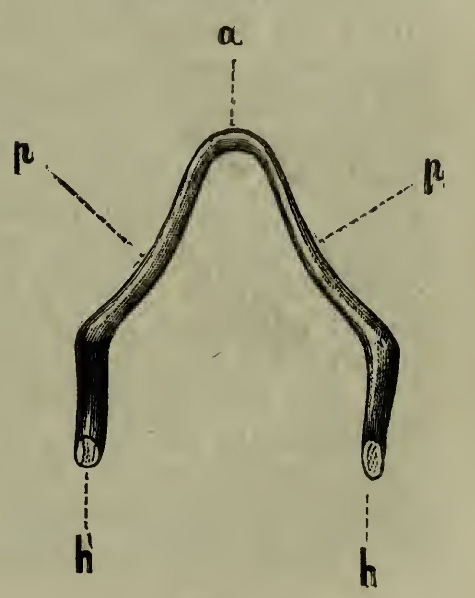


Fig. 48.

Auf dem Ringknorpel sitzt der Schildknorpel (Fig. 47) auf, der aus zwei nach vorn unter einem spitzen Winkel (von circa 60°) zusammenlaufenden Platten pp besteht. Die obere Ecke der Kante K, in der diese Platten vorn zusammenstossen und fest verwachsen sind, bildet den sog. Adamsapfel a. Der Schildknorpel ist um eine horizontale Axe, die Verbindungslinie der hinteren unteren Hörner cc der beiden Platten, drehbar. Auf dem erhöhten hinteren Rande des Ringknorpels, gegenüber der Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels vorn zusammenlaufen, ruhen die beiden Giessbeckenknorpel gg (Fig. 45), am Ringknorpel mit einem Gelenk befestigt, das ihnen gestattet, sich sowohl von vorn nach hinten, als von rechts nach links zu bewegen. Zwischen der Kante des Schildknorpels und den vorderen Ecken der beiden Giessbeckenknorpel sind die beiden Stimmbänder St St ausgespannt, muskulöse Membranen, die den Luftweg bis auf eine schmale Spalte, die sog. Stimmritze, absperren. Die zwischen den beiden Giessbeckenknorpeln liegende, die Fortsetzung der Stimmritze bildende Oeffnung heisst die Athemritze. Unmittelbar über den Stimmbändern befindet sich ein kleiner Hohlraum (ventriculus Morgagni), nach oben begrenzt aber nicht abgeschlossen durch zwei Schleimhautfalten, die sog. falschen Stimmbänder. (Fig. 44.) Daran schliesst sich der Schlund und die Höhle des Mundes und der Nase an.

Die Bewegungen der beiden Giessbeckenknorpel und des Schildknorpels werden durch verschiedene Muskeln geregelt. Wird der Schildknorpel nach vorn, die zwei Giessbeckenknorpel gleichzeitig nach hinten bewegt, so wird dadurch die Spannung der Stimmbänder vergrössert, und umgekehrt wird die Spannung vermindert, wenn die beiden Giessbeckenknorpel einerseits, die Kante des Schildknorpels andrerseits, einander genähert werden. Durch die seitliche Bewegungsfreiheit der zwei Giessbeckenknorpel kann die Breite der Stimmritze regulirt werden; werden diese Knorpeln einander genähert, so wird die Stimmritze verengert oder ganz geschlossen, werden sie von einander entfernt, so wird die Stimmritze weiter.

Zur Erzeugung eines musikalischen Tones werden nun die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln gespannt, um so mehr, je höher der zu erzeugende Ton ist. Die Stimmritze sowohl als die Athemritze ist dabei fast völlig geschlossen. Die Tonerzeugung entspricht vollkommen dem Anblasen einer

Zungenpfeife. Der aus der Lunge kommende Luftstrom bricht sich Bahn zwischen den zwei gespannten Stimmbändern hindurch und versetzt dieselben in Schwingung. Dadurch wird der Luftstrom periodisch unterbrochen und es entsteht ein Klang, dessen Höhe gänzlich von der Beschaffenheit, insbesondere von der Spannung und der Länge der Stimmbänder abhängig ist. Der Luftraum oberhalb der Stimmbänder, der Schlund und die Mundhöhle beeinflussen die Tonhöhe nicht, sind aber von grossem Einfluss auf die Klangfarbe; ihre Wirkung ist ähnlich derjenigen des Schallbechers einer Zungenpfeife der Orgel, nur sind hier die Wandungen des Schallbechers nicht so fest und kann hier die Gestalt desselben mannigfach verändert werden.

Die verschiedenen Stimmengattungen unterscheiden sich wesentlich durch die verschiedene Länge der Stimmbänder. Je länger die Stimmbänder, um so tiefer ist, unter übrigens gleichen Umständen, die Stimmlage. Demgemäss springt bei Männern die Kante des Schildknorpels wesentlich weiter vor als bei Frauen, bei einer Bassstimme mehr als bei einer Tenorstimme, bei Altistinnen mehr als bei Sopranistinnen. Nach Messungen von Johannes Müller (1801—1859, Prof. der Anatomie in Bonn und Berlin) ist die durchschnittliche Länge männlicher Stimmbänder 18 Millimeter, diejenige weiblicher Stimmbänder etwas über 12 Millimeter. Der Tonumfang jeder der vier Haupt-Stimmengattungen beträgt je $1\frac{1}{2}$ bis 2 Oktaven: Bass ungefähr von F bis $\bar{c}$, Tenor von c bis $\bar{g}$ und höher, Alt von g bis $\bar{\bar{d}}$, und Sopran von $\bar{c}$ bis $\bar{\bar{g}}$, bei Solostimmen bis $\bar{\bar{\bar{c}}}$ oder gar $\bar{\bar{\bar{d}}}$.

Das einzelne Individuum regulirt innerhalb seines Stimmumfanges die Tonhöhe wesentlich durch verschiedene Spannung der Stimmbänder. Es gelang Johannes Müller, an dem ausgeschnittenen Kehlkopfe eines Mannes durch Steigerung der Spannung der Stimmbänder von 7,3 Gramm auf 540 Gramm die Tonhöhe, die er beim Anblasen erhielt, um etwas über 2 Oktaven zu erhöhen. Bei verschieden hohen Tönen ist aber ausser der Spannung im Allgemeinen auch die Ausdehnung und Belastung der schwingenden Theile eine verschiedene. Es liegt nämlich unter den Stimmbändern eine schleimige, unelastische Masse, welche als Belastung der Stimmbänder wirkt und der Schnelligkeit ihrer Schwingungen eine gewisse Grenze steckt. Diese Masse kann aber bei Seite gezogen werden, so dass der Rand der Stimmbänder nach der Stimmritze zu dünner und

weniger belastet wird, was zur Folge hat, dass selbst bei geringerer Spannung der Bänder schnelle Schwingungen zu Stande kommen können, an denen dann freilich nur die wenig belasteten Ränder der Stimmbänder Antheil nehmen. Ausserdem kann auch die hintere Hälfte der Stimmbänder dadurch mehr oder weniger ausser Aktion gesetzt werden, dass deren Ränder in der hinteren Hälfte fest an einander gepresst werden, so dass nur die vordere Hälfte der Stimmritze frei bewegliche Ränder hat.

Diese mannigfachen Hülfsmittel geben die Möglichkeit an die Hand — ganz abgesehen von der Wirkung der als Resonanzrohr dienenden Mundhöhle — ein und denselben Ton auf verschiedene Weise zu erzeugen und ihm verschiedene Klangfärbungen zu geben, ähnlich wie man z. B. auf einer Violine etwa das zweigestrichene $\bar{\bar{g}}$ auf allen vier Saiten erzeugen kann, jedesmal in etwas anderer Klangfarbe, dank der Möglichkeit, durch verschiedene Faktoren (Länge, Spannung, Dicke, Gewicht der Saite) die Tonhöhe zu reguliren. — Bei den tiefsten Tönen, welche ein Individuum hervorbringen kann, ist die Spannung der Stimmbänder relativ gering, die Stimmritze relativ weit und die Belastung der Bänder gross; da ein Theil des Luftstroms ohne Wirkung durch die Ritze entweicht, muss der Luftzufluss reichlich sein, wenn die Bänder in Schwingung gerathen sollen. In den mittleren Tonlagen der Stimme, bei der sog. Bruststimme, ist die Stimmritze wesentlich enger, die Ränder der Stimmbänder sind an einander gelegt aber nicht gepresst, und es nimmt noch eine ausgiebige Breite der Stimmbänder an den Schwingungen Theil, wobei natürlich mit steigender Tonhöhe die Spannung zunimmt. Bei der hohen Tonlage schliesst sich, wie oben angedeutet, die hintere Hälfte der Stimmritze fest und es kommt dann wesentlich nur der vordere Theil der Bänder bei den Vibrationen in Betracht. Bei der sog. Kopfstimme (Falsett- oder Fistelstimme) schwingen ausserdem nur die Ränder der Stimmbänder, der übrige Theil wird dadurch von der Betheiligung an den Schwingungen ausgeschlossen, dass sich die sog. falschen Stimmbänder auf die ächten niedersenken und nur den Rand der Stimmbänder frei lassen.

Die Rauhheit und Schärfe vieler Stimmen hat wahrscheinlich darin ihren Grund, dass die Ränder der Stimmbänder nicht geradlinig und glatt genug sind, um die Stimmritze schliessen zu können, ohne dabei auf einander zu stossen. Während bei

kräftigen aber doch weichen Stimmen die Stimmritze glatt geschlossen werden kann, ohne dass doch die Ränder der Stimmbänder auf einander stossen, und die Stimmbänder hier wie durchschlagende Zungen wirken, stossen bei rauhen und scharfen Stimmen (nach Helmholtz's Vermuthung) die Stimmbänder bei ihren Schwingungen auf einander und wirken dabei wie aufschlagende Zungen. Bei heiseren Stimmen kommt wahrscheinlich kein Verschluss der Stimmritze zu Stande. Bei der sog. Flüsterstimme ist die Stimmritze geschlossen und die Luft streicht durch die Athemritze, wobei ein Geräusch entsteht, das durch die Resonanz der Mundhöhle in ähnlicher Weise beeinflusst wird, wie durch die Luftsäule einer Labialpfeife das Reibungsgeräusch, das man bei zu schwachem Anblasen der Pfeife erhält.

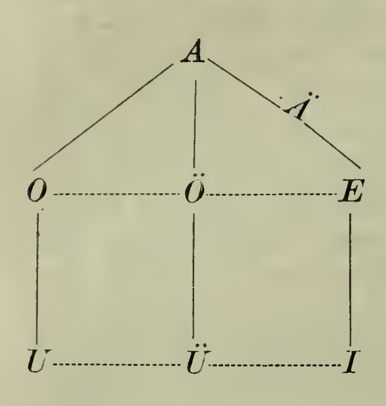
Bei katarrhalischen Affektionen des Kehlkopfes werden die Schwingungen der Stimmbänder durch zwischentretende Schleimflocken unregelmässig.

Die durch das menschliche Stimmorgan hervorgebrachten musikalischen Klänge sind im Allgemeinen sehr reich an Partialtönen verschiedenster Stärke und Ordnung; mit Hülfe von Resonatoren sind sie leicht zu konstatiren, während sie ohne dieses Hülfsmittel nur von einem darauf besonders eingeübten Ohre wahrgenommen werden. Je nach der Gestalt, welche man der Mundhöhle beim Singen gibt, werden diese oder jene Partialtöne des Klanges verstärkt oder geschwächt. Es werden offenbar, nach den Gesetzen der Resonanz, diejenigen Partialtöne am meisten verstärkt werden, welche dem Eigenton oder den Eigentönen des in der Mundhöhle eingeschlossenen Luftraumes am nächsten kommen. Da aber die Wandungen der Mundhöhle, soweit sie nicht von Knochen gebildet werden, ziemlich nachgiebig sind, so erfahren auch solche Töne Verstärkung, welche mit den Eigentönen der Mundhöhle nicht genau übereinstimmen, allerdings in um so geringerem Maasse, je grösser die Abweichung ist.

77. Klänge der Vokale. Analyse und Synthese der Vokalklänge. — Kein freier Gesangston verlässt das Stimmorgan, ohne von einem Vokal begleitet zu sein. Der begleitende Vokal hängt ab von der Form, welche man der Mundhöhle gibt.

Sprechen wir den Vokal *A* aus, so hat die Mundhöhle ungefähr die Gestalt eines Trichters, der sich von hinten nach vorn erweitert. Von dieser Ausgangsstellung aus können wir den

Vokal nach 3 Hauptrichtungen hin modifiziren und in andere Vokale übergehen lassen: Erstens: von *A* über *O* nach *U*; zweitens von *A* über *Ä* nach *E* und *I*, und drittens von *A* über *Ö* nach *Ü*, wie das folgende, von F. H. du Bois-Reymond gegebene Schema andeutet:



Beim Uebergange von *A* durch *O* nach *U* verändert sich die Form der Mundhöhle derartig, dass die Mundöffnung enger wird, so dass sie bei *U* am engsten ist, während die innere Mundhöhlung sich durch Herabziehen der Zunge allmählich erweitert, so dass sie annähernd die Gestalt einer Flasche ohne Hals annimmt. Bei der Mundstellung, die dem Ausgangspunkte *A* entspricht, ist die Mundhöhle auf den Ton $\bar{\bar{b}}$, das zweigestrichene *b*, abgestimmt, was man dadurch konstatiren kann, dass man eine auf $\bar{\bar{b}}$ abgestimmte Stimmgabel angeschlagen vor die in die *A*-Stellung gebrachte Mundhöhle hält, wobei man bemerken wird, dass dann der Ton der Stimmgabel durch die Resonanz der Mundhöhle bedeutend verstärkt wird. Da es verschiedene Arten von *A* gibt, so wird man freilich, je nach den verschiedenen Abstufungen desselben, auch verschiedene Eigentöne finden. Das $\bar{\bar{b}}$ entspricht der norddeutschen Aussprache des *A*; für das offenere, hellere *A* der Italiener und Engländer steigt der entsprechende Eigenton der Mundhöhle bis auf das dreigestrichene $\bar{\bar{\bar{d}}}$. Helmholtz macht desshalb den Vorschlag, die verschiedenen Abstufungen der Vokale, wie sie verschiedenen Sprachen und verschiedenen Dialekten eigen sind, durch die betreffenden Eigentöne der Mundhöhle eindeutig zu definiren.

Da beim Uebergange von *A* nach *O* und *U* die Mundöffnung sich verkleinert, die Mundhöhlung dagegen vergrössert, so muss der entsprechende Eigenton allmählich sinken, wie bei einer Orgelpfeife deren obere Oeffnung allmählich zugedeckt wird, während sich der Innenraum erweitert. Beim Uebergange von *A* nach *O* sinkt demgemäss der Resonanzton der Mundhöhle von $\bar{\bar{b}}$ allmählich um eine ganze Oktave bis zum eingestrichenen $\bar{b}$, so dass der Ton einer auf $\bar{b}$ abgestimmten Stimmgabel, wenn dieselbe angeschlagen und vor die in *O*-Stellung gebrachte Mundhöhle gehalten wird, die bedeutendste Ver-

stärkung durch Resonanz erfährt. Geht man von *O* weiter zu *U* über, so sinkt der Resonanzton noch bedeutend tiefer bis zum kleinen *f* und darunter. Der *U*-Klang ist der tiefste Vokalklang, und die Sprache wendet ihn auch vorzugsweise da an, wo der Charakter des Düsteren, Gedämpften, Unheimlichen zum Ausdruck kommen soll, wie z. B. in: dumpf, dunkel, unten; während die gegensätzlichen Bezeichnungen: klar, hell, oben u. s. w. vorzugsweise Vokale mit höherem Klange anwenden.

Wenn wir von *A* abzweigend eine andere Seitenlinie einschlagen und über *Ä* und *E* nach *I* gehen, so geht mit der Mundhöhlung eine andere Gestaltsveränderung vor: die Mundwinkel werden mehr und mehr von einander entfernt, so dass die Form der Mundöffnung mehr und mehr länglich wird; zwischen dem Gaumen und dem vorderen Theil der Zunge entsteht ein enger Raum, während der Raum über dem Kehlkopf, der Schlund, sich durch Einziehen der Zungenwurzel mehr und mehr erweitert. Die Form des Resonanzraumes der Mundhöhle ist dann derjenigen einer Flasche mit engem schmalen Halse zu vergleichen, wobei der Bauch der Flasche im Schlunde über dem Kehlkopf, der Hals dagegen vorn zwischen Zunge und Gaumen liegt. Diese Gestalt bringt auch eigenthümliche Resonanzverhältnisse mit sich. Während man nämlich bei derjenigen Form der Mundhöhle, die bei den Vokalen *A*, *O* und *U* in Betracht kommt, wesentlich nur von einem Eigentone der Mundhöhle sprechen kann, kommen der flaschenförmigen Gestalt bei den Vokalen *Ä*, *E*, *I* je zwei Eigentöne zu, von denen der eine, und zwar der tiefere, dem Bauche der Flasche, der andere höhere dagegen deren Hals entspricht. Der enge Hals, der in den bedeutend weiteren Schlund einmündet, verhält sich annähernd wie eine offene Pfeife von derselben Länge. So entsprechen dem Vokale *Ä* die beiden Töne $\overline{\overline{g}}$ (Hals) und $\overline{d}$ (Bauch), dem Vokale *E* die Töne $\overline{\overline{\overline{b}}}$ (Hals) und $\overline{f}$ (Bauch), und dem Vokale *I*, bei welchem die Lippen am meisten zurücktreten, der Hals am kürzesten und der Bauch am weitesten ist, das hohe $\overline{\overline{\overline{d}}}$ für den Hals und das ungestrichene *f* für den Bauch.

Bei der dritten Abzweigung von *A*, derjenigen über *Ö* nach *Ü*, geht mit dem hinteren Hohlraume die nämliche Veränderung vor wie bei der eben betrachteten Zweiglinie; die Lippen treten dagegen weiter vor und formen sich zu einer Art von Röhre. Auch hier hat der Resonanzraum annähernd

die Form einer weiten Flasche mit engem Halse, hier ist aber der Hals der Flasche, wegen des weiteren Vortretens der Lippen, etwas länger als bei *E* und *I*. Man hat demnach auch hier je zwei Eigentöne; die tieferen des Flaschenbauches stimmen mit denjenigen von *E* und *I* ungefähr überein, die höheren sind tiefer als die entsprechenden von *E* und *I*, und zwar hat man für *Ö* die Töne $\overset{\equiv}{cis}$ (Hals) und $\bar{f}$ (Bauch), für *Ü* dagegen die Töne $\overset{=}{g}$ oder $\overset{=}{as}$ für den Hals, und das ungestrichene *f* für den Bauch.

Alles Gesagte lässt sich in Noten übersichtlich ausdrücken wie folgt:



Helmholtz stellte fest, dass die Eigentöne der Mundhöhle für die verschiedenen Vokale zwar bei verschiedenen Sprachen und Mundarten erheblich variiren können, dass sie dagegen von Alter und Geschlecht fast unabhängig sind. Bei Kindern und Frauen wird die tonerhöhende Wirkung der geringeren Geräumigkeit der Mundhöhle durch die vertiefende Wirkung der engeren Mundöffnung aufgehoben.

Dass nur den oben angeführten einfachen Vokalen, nicht aber den Diphthongen: *au*, *eu*, *äu*, *ei* ganz bestimmte Eigentöne der Mundhöhle zukommen können, ist wohl selbstverständlich. Während man einen solchen Doppelvokal ausspricht, verändert sich die Gestalt der Mundhöhle und damit zugleich deren Eigenton. Nur auf einem reinen Vokal, nicht aber auf einem Doppelvokal ist es möglich, einen Gesangston aufzuhalten. Die sog. Guidoni'schen Solmisationssilben: ut (do), re, mi, fa, sol, la, si enthalten lauter einfache reine Vokale *). Die italienische Sprache,

*) Guido von Arezzo lebte um das Jahr 1000 als Benediktinermönch zu Pomposa. Nach einer aus dem 8. Jahrhundert stammenden Hymne an den heil. Johannes d. Täufer, die mit den Worten beginnt: „ut queant laxis resonare fibris mira gestorum famuli tuorum solve polluti labii reatum, Sancte Johannes," und in welcher die Versanfänge ut, re, mi, . . . auf die betreffenden Stufen der Skala fielen, brachte Guido seinen Schülern das Treffen der Töne bei. Viel später wurde von den Franzosen die siebente Silbe si hinzugefügt und ut in do verwandelt.

in welcher keine Diphthonge, sondern nur reine volle Vokale vorkommen, war von jeher die bevorzugte Gesangssprache. Beim Sprechen werden die Vokale mit Konsonanten verbunden. Während bei den Vokalen das klangliche musikalische Element in den Vordergrund tritt, sind die Konsonanten durch Geräusche charakterisirt, die durch die Lippen (z. B. *m*, *p*, *b*, *f*, *v*, *w*), durch die Zunge in Verbindung mit den Zähnen oder dem Gaumen (*c*, *z*, *d*, *l*, *n*, *s*, *t*), oder durch den Gaumen als Kehllaute (*g*, *k*, *q*, *ch*) erzeugt werden. *r* ist ein intermittirender Laut, der entweder mit der Zunge und den Zähnen oder als Kehllaut (guttural) hervorgebracht wird. Das blosse Ansetzen eines Vokales ist auch mit einem gewissen Geräusche verbunden, das die Griechen durch den sog. „spiritus lenis", einen über den Vokal gesetzten kleinen nach links offenen Halbkreis (᾿) bezeichnen (vergleiche z. B. „Meineid" mit „mein Eid").

Alle diese Geräusche sind zur Artikulation beim Sprechen unentbehrlich und tragen wesentlich zur Charakteristik des Lautes bei. Den spezifisch musikalischen Theil des Klanges können sie aber beeinträchtigen, wenn sie sich häufen. Worte mit gehäuften Konsonanten, wie z. B.: „zerschmettre", sind sehr schlecht zu singen. Beim Singen können die Konsonanten nicht in voller Schärfe zur Geltung gebracht werden, da das mit der scharfen Aussprache der Konsonanten verbundene Geräusch sich mit den rein musikalischen Anforderungen nicht immer verträgt. Auch beim Singen der Vokale ist der charakteristische Klang der Vokale nicht unter allen Umständen aufrecht zu erhalten. Da die Stimmbänder die eigentlich tonangebende Rolle spielen und die Resonanz der Mundhöhle erst in zweiter Linie in Betracht kommt, so kann freilich ein Vokal, trotz seines ihm speziell zukommenden Tones, in sehr verschiedenen Tonlagen gesungen werden, indessen wird doch seine Eigenart darunter leiden, wenn man ihn in Tonregionen verlegt, die seiner Natur widersprechen. Ein gesungener Vokal wird dann am reinsten und deutlichsten als solcher erkennbar sein, wenn entweder der gesungene Ton selbst oder einer seiner harmonischen Obertöne mit dem Eigentone des Vokales ganz oder nahezu zusammentrifft. Z. B. wird der Vokal *O* am klarsten erscheinen, wenn man ihn auf $\bar{b}$ (dem Eigentone des *O*), oder auf dessen tieferer Oktave *b*, überhaupt auf einem seiner harmonischen Untertöne (*b*, *es*, *B*, *Ges*, *Es*) singt. Dagegen wird es schon in

den mittleren Tonlagen schwer, ein richtiges *U*, dessen Eigenton sehr tief liegt, zu singen, und in hohen Tonlagen wird es sogar fast unmöglich, das *U* deutlich erkennbar zu machen. Umgekehrt wird ein *I* in sehr tiefer Lage schwer zu singen sein. — Vom 4. Oberton an liegen zwei benachbarte Partialtöne um höchstens eine Terz von einander entfernt, vom 8ten an um höchstens eine Sekunde. Bei tiefen Tönen wird es daher leichter als bei hohen vorkommen, dass irgend einer der Partialtöne des gesungenen Klanges mit dem Eigentone eines Vokales ganz oder nahezu zusammentrifft. Es ist desshalb wohl aus diesem Grunde — bei gleicher Schulung der Stimmen — das gesungene Wort bei Männerstimmen im Allgemeinen besser zu verstehen als bei weiblichen Stimmen. In den hohen Tonlagen einer Sopranstimme liegen dagegen schon die gesungenen Grundtöne höher als die Eigentöne von *U* und *O* und es werden desshalb hier auch die Unterschiede zwischen *U*, *O* und *A* schon recht undeutlich.

Aus den vorstehenden Bemerkungen lässt sich schliessen, dass die Uebersetzung eines Gesangstextes in eine fremde Sprache auf dessen Klangwirkung unter Umständen von Einfluss sein kann.

Helmholtz begnügte sich nicht damit, die Vokalklänge zu analysiren, sondern er stellte sich auch die Aufgabe, dieselben künstlich zu erzeugen, synthetisch darzustellen. Es gelang ihm dies auf verschiedene Weise. Indem er auf eine Zungenpfeife, welche den Ton b gab, einen auf b abgestimmten Resonator setzte, erhielt er den Vokalklang von *U*; nahm er einen auf $\bar{b}$ abgestimmten Resonator, so erhielt er ein deutliches *O*; mit einem Resonator, der $\bar{\bar{b}}$ gab, erhielt er ein *A*, bei einem Resonator auf $\bar{\bar{\bar{d}}}$ ein offenes schärferes *A*. Auch gelang es ihm, die Vokale *Ä*, *Ö*, *E*, *I* darzustellen, indem er an die äussere Oeffnung kugelförmiger Resonatoren ein 6 bis 10 Centimeter langes Glasröhrchen ansetzte und so die der doppelten Resonanz entsprechende Form der Mundhöhle für diese Vokale nachbildete.

Eine andere komplizirtere Methode von Helmholtz bestand darin, dass er eine Reihe von Stimmgabeln, die auf *B* und die harmonischen Obertöne b, $\bar{f}$, $\bar{b}$, $\bar{\bar{d}}$ $\bar{\bar{f}}$, $\overline{\overline{as}}$, $\bar{\bar{b}}$, $\bar{\bar{\bar{d}}}$, $\bar{\bar{\bar{f}}}$, $\overline{\overline{\overline{as}}}$, $\bar{\bar{\bar{b}}}$ eingestimmt waren, von gleichgestimmten Resonatoren aufstellte und durch Elektromagneten dauernd in Schwingung versetzte. Den Ton jeder einzelnen Stimmgabel konnte er beliebig ausschalten oder

einschalten, stärker oder schwächer machen, indem er die zugehörige Resonanzröhre mehr oder weniger verschloss, oder in nähere und weitere Entfernung von der Stimmgabel brachte. So konnte er die verschiedensten Abstufungen eines zusammengesetzten Klanges künstlich herstellen. Es gelang ihm auf diese Weise, nicht nur die Klänge der meisten Vokale, sondern auch die charakteristische musikalische Klangfarbe einiger Register der Orgel sowie der Klarinette und des Horns nachzuahmen. Durch diese künstliche Darstellung bestimmter Klangfärbungen setzte Helmholtz seinen genialen Untersuchungen über das Wesen der Klangfarbe die Krone auf.

78. Schlaginstrumente: Pauke, Trommel; Xylophon. — Glocken. — Mit der Betrachtung der Saiteninstrumente, der Lippenpfeifen, der Zungen und Zungenpfeifen, der Blasinstrumente und des menschlichen Stimmorgans haben wir aller Musikinstrumente gedacht, denen eine höhere musikalische Rolle zufällt. Von den Tonwerkzeugen, die zu keiner der betrachteten Gruppen gehören, beansprucht, vom rein musikalischen Standpunkte aus betrachtet, nur eine Klasse von Instrumenten noch eine gewisse Beachtung, nämlich die sog. Schlaginstrumente, und unter diesen ist es wieder fast ausschliesslich die in keinem Orchester fehlende Pauke (Timpano), auch Kessel-Pauke genannt, die für den Musiker von Interesse ist. Wie bekannt, besteht dieselbe aus einem über einen halbkugelförmigen Kessel gespannten gegerbten Kalbfell, das mit einem oder zwei Schlägeln angeschlagen wird. Im Orchester verwendet man in der Regel 2, zuweilen aber auch mehr (Berlioz in seinem Requiem sogar 16) Pauken. Der Luftraum des Kessels dient als Resonanzraum; die Schwingungen des Paukenfells hängen einerseits von diesem, andrerseits von der durch Schrauben regulirbaren Spannung des Felles ab. Gespannte Membranen geben im Allgemeinen ausser dem Grundtone unharmonische Nebentöne; durch die Erregungsart des Paukentones und durch den Einfluss des Luftraumes erhält aber der Grundton die Oberhand über seine unharmonischen Begleiter, so dass man doch von einer deutlich erkennbaren Tonhöhe des Paukentones sprechen kann. Der Schlag auf die Pauke wird nicht auf die Mitte des Felles geführt, sondern näher am Rande, da der auf die Mitte treffende Schlägel, selbst wenn er sofort zurückprallt, doch die Schwingungen des getroffenen Mittelpunktes durch sein nicht hinreichend kurzes Aufruhen hemmt. Die Stimmung der

Pauken variirt zwischen dem grossen *F* und dem kleinen *f*. Durch einen vervollkommneten Mechanismus kann die Stimmung sehr leicht und in kurzer Zeit verändert werden. Zur Erzielung eines gedämpften Klanges wird das Fell zuweilen mit einem Tuche bedeckt („timpani coperti"). Der Klang hängt auch von dem Material des Schlägels ab; der Kopf des Schlägels ist entweder ohne Ueberzug, oder mit Leder, Filz oder Schwamm überzogen. Filz und Schwamm geben einen weicheren Klang als Holz und Leder. Auch hier kommt das in Betracht, was wir früher bei mehreren Anlässen über Diskontinuität sagten. — Bei den Trommeln ist ein Luftraum zwischen zwei gespannten Fellen eingeschlossen, dem oberen Schlagfell und dem unteren Schallfell. Hier kommt wesentlich die indirekte Erschütterung des letzteren in Betracht, wobei ausserdem die über das Schallfell gespannten Saiten ein rasselndes Geräusch erzeugen.

Mehrere Schlaginstrumente, die in Orchestern nur dann und wann gelegentlich zur Verwendung kommen, beruhen auf transversalen Schwingungen elastischer Stäbe. Ist ein Stab an beiden Enden frei, so besteht die einfachste Art der möglichen Transversalschwingungen darin, dass sich an den freien Enden und in der Mitte des Stabes Schwingungsbäuche bilden, in ungefähr $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Länge (0,224 und 0,776) Schwingungsknoten, wie die folgende schematische Darstellung zeigt:

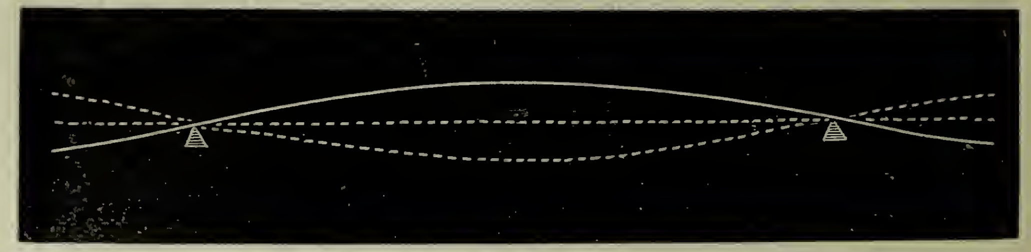


Fig. 49.

Wird der Stab in den beiden Schwingungsknoten unterstützt und in der Mitte angeschlagen, so kommt hauptsächlich diese Schwingungsform zur Geltung. Hierauf beruhen Instrumente wie das Xylophon und die Stahlharmonika. Bei ersterem sind es abgestimmte Holzstäbchen, bei letzterer Stahlstäbe, die in ihren Knotenpunkten auf einer Unterlage aufruhen und in der Mitte mit Hämmerchen angeschlagen werden. — Transversal schwingende Stäbe oder Stäbchen, die nur an einem Ende befestigt sind, werden als Zungen musikalisch verwendet (Harmonium, Zungeninstrumente, Spieldosen).

Bei Glocken bilden sich Knotenlinien, welche vom Scheitelpunkte der Glocke nach dem Rande hin laufen. Sie treten in gerader Anzahl auf und sind gleich weit von einander entfernt, so dass sie die ganze Glocke in eine gerade Zahl unter sich gleicher schwingender Unterabtheilungen theilen. Im einfachsten Falle hat man 4 solche Knotenlinien. In je 2 benachbarten Abtheilungen sind die Schwingungszustände entgegengesetzt, wie die beistehende Figur andeutet. Der Klang von Glocken ist reich an unharmonischen Tönen. Die Kunst des Glockengiessers besteht zum Theil darin, die tieferen Töne durch passende Form der Glocke zu einander harmonisch zu machen.

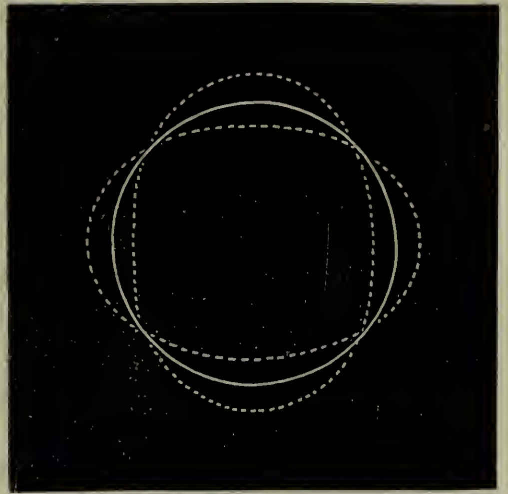


Fig. 50.

Die unendlich mannigfaltigen Schwingungsarten von ebenen Platten und Membranen (Chladni'sche Klangfiguren) genauer zu untersuchen, ist für den Physiker von grossem Interesse*); für den Musiker und die praktische Musik sind sie aber von keinem grossen Belange.

Nur zwei Fälle, wo Platten und Membranen nicht als tonangebende, sondern als tonvermittelnde Werkzeuge funktioniren, sind von allergrösster Wichtigkeit. Man denke nur an das Trommelfell des Ohres, das sog. erzwungene Schwingungen ausführt und willig auf jede Art von Schwingungen eingeht, die ihm zugemuthet werden. Man erinnere sich ferner der sog. Membran des Telephons, eines dünnen Metallplättchens aus Eisenblech, das, so unscheinbar es auch aussieht, die allerwichtigste Rolle bei der Schallvermittlung spielt. Die Macht der Gewohnheit lässt uns die Wirkung dieser beiden kleinen Membranen als selbstverständlich erscheinen. Und doch wie wunderbar ist gerade ihre Empfindlichkeit und die Feinfühligkeit, mit der sie die allerfeinsten Abstufungen von Geräuschen und Klängen durch ihre Schwingungen vermitteln! —

*) Siehe die Originalarbeiten von Chladni; ferner die Schrift von Adolf Elsas: „Der Schall“ (Wissen der Gegenwart, Band LI, 1886), das Werk von Zellner: „Vorträge über Akustik“ (2 Bände, Wien, Hartleben 1892) u. a. m.

79. Musikalische Klangfarbe und Klangfarbe überhaupt. Nebengeräusche, Einsetzen und Ausklingen des Tones. — Zusammenfassende Sätze von Helmholtz. — Wir haben bei unseren Auseinandersetzungen über das Wesen der Klangfarbe fast ausschliesslich von der sog. musikalischen Klangfarbe gesprochen. Wir haben dabei abgesehen von den mit der Erzeugung von Klängen sozusagen ausnahmslos verbundenen unperiodischen Geräuschen. Es bedarf in der Regel keiner angestrengten Aufmerksamkeit, um sich beim Anhören eines von irgendwelchen Instrumenten vorgetragenen Tonstückes aus naher Entfernung der begleitenden Geräusche bewusst zu werden. Bei den Streichinstrumenten ist es ein anhaltendes Reibungsgeräusch, das durch die Reibung der Haare auf den Saiten zu Stande kommt und bei ungeübten Spielern in Kratzen ausarten kann. Bei den Lippenpfeifen der Orgel und bei der Flöte ist es das Blasegeräusch des an der Lippe sich brechenden Luftstromes, das mit dem musikalischen Klange unzertrennlich verbunden ist. Aber selbst da, wo während der eigentlichen Dauer des Klanges kein nennenswerthes Geräusch wahrzunehmen ist, ist häufig die Art des Einsetzens und Ausklingens des Tones charakteristisch. Bei den Blechblasinstrumenten z. B. zeigt die Art des Tonansatzes einen gewissen Grad von Schwerfälligkeit; es bedarf einer gewissen Zeit, um die lange Luftsäule gerade zu derjenigen Art ihrer Eigenschwingungen zu zwingen, die man hervorrufen will. Bei den Holzblasinstrumenten dagegen, wo die Art des Anblasens nicht in dem Maasse zu ändern und die Länge der Luftsäule nicht so gross ist und zudem leicht und rasch durch die Seitenlöcher verändert werden kann, ist die Art des Toneinsatzes eine weniger starre, leichter bewegliche. — Bei den gerissenen Saiten ist die Art des Ausklingens charakteristisch. Wird eine Saite mit dem Fingerwulste auf das Griffbrett niedergedrückt und dann gerissen, so klingt der Ton sehr rasch aus, um so rascher je kürzer die Saite und je grösser die Spannung ist; die Schwingungen theilen sich dem unelastischen Fingerwulste mit und werden dadurch gedämpft. Wird dagegen der schwingende Theil der Saite nicht vom weichen Fingerwulste, sondern von einem harten elastischen Körper begrenzt, so dämpft dieser die Saitenschwingungen weit weniger; er macht dieselben durch seine eigene Elastizität gewissermaassen selbstthätig mit. Der Pizzicatoklang einer sog. leeren Saite der Violine hält länger

an als derjenige einer mit dem Fingerwulste niedergedrückten Saite. Ebenso klingt der Ton einer Guitarre oder Mandoline, wo die „Bünde“ eine schärfere Begrenzung geben als der Fingerwulst, länger aus als das gegriffene Pizzicato der Geige.

Von der eigentlichen musikalischen Klangfarbe ganz abgesehen, können wir also in vielen Fällen aus dem blossen Ansetzen oder Ausklingen des Tones oder aus den andauernden Nebengeräuschen erkennen, von welchem Instrumente ein Klang herstammt. Mit wachsender Entfernung von der Tonquelle verschwinden alle diese sekundären Faktoren rascher als der musikalische Klang, und es bleibt dann nur die rein musikalische Klangfarbe übrig, auf die sich unsere bisherigen Auseinandersetzungen bezogen. Es ist bekannt, dass es bei einer grösseren Entfernung von der Quelle des Klanges auch grösserer Uebung bedarf, um aus dem Klange mit Sicherheit auf das erzeugende Musikinstrument zu schliessen.

Die begleitenden Geräusche wird man bei musikalischen Tönen im Allgemeinen möglichst zu beseitigen suchen. Nur beim Gesange sind sie — in Form von Konsonanten — unentbehrlich, wenn das gesungene Wort nicht unverständlich werden soll; sie werden aber auch hier soweit gemildert werden, als es mit letzterer Bedingung irgendwie vereinbar ist.

Wenn der Begriff der Klangfarbe nicht ausschliesslich in rein musikalischem Sinne verstanden zu werden pflegte, so könnte man auch von einer Klangfarbe der Geräusche sprechen. Es ist geradezu erstaunlich, wie unendlich viel verschiedene Arten von Geräuschen wir mit absoluter Sicherheit von einander zu unterscheiden vermögen. Fast jeden Menschen, den wir kennen, werden wir mit Sicherheit an seiner Stimme, an einem einzigen gesprochenen Worte erkennen, sehr häufig sogar an seinem Schritte, an seiner Gangart, auch wenn wir ihn nicht sehen. Die Sprache vermag nicht alle Geräusche zu beschreiben; sie sucht sie nur durch entsprechende Wortbildung nachzuahmen. So bezeichnen z. B. die Zeitwörter: zischen, krachen, brummen, summen, sausen, zirpen, plätschern, quaken, murmeln, krächzen u. s. f. durch ihren blossen Klang schon mehr oder weniger deutlich das Geräusch, dessen Vorstellung sie in uns erwecken sollen.

Zur Bezeichnung musikalischer Klangfarben ist die Sprache noch ärmer und reicht nicht aus, um auch nur die gebräuchlichsten Klangfärbungen klar zu kennzeichnen. Welche

Fülle von Farben bietet der Apparat eines Orchesters dar, und wie wenig eignet sich die Sprache dazu, dieselben zu bezeichnen! Machen wir aber dennoch einen Versuch, die gewonnenen Resultate, die fast ausschliesslich der Genialität von Helmholtz zu verdanken sind, in ganz wenigen Worten zusammenzufassen, so können wir etwa sagen:

Einfache Töne und solche Klänge, die ausser dem Grundtone nur wenige und sehr schwache Partialtöne enthalten, sind sehr weich und unkräftig, in der Tiefe dumpf, in der Höhe hell aber doch mild (Stimmgabeln mit Resonanzröhren, weite gedackte Orgelpfeifen, Flöten und schwach angeblasene Flötenregister der Orgel).

Klänge, die neben dem Grundtone die niederen Partialtöne bis zum sechsten in mässiger Stärke enthalten, sind klangvoller, prächtiger und dabei doch wohllautend und frei von Rauhigkeit (Klavier, offene nicht zu eng mensurirte Orgelpfeifen, weichere Töne des Horns und der menschlichen Stimme).

Klänge mit Partialtönen von nur ungerader Ordnung sind bei geringer Anzahl von Obertönen hohl, bei grösserer Anzahl werden sie näselnd (enge gedackte Orgelpfeifen, Klarinette).

Klänge, die ausser den niederen Partialtönen noch höhere vom 6. bis zum 10. enthalten, sind bei nicht zu grosser Stärke der letzteren klar und von einem gewissen Grad von Schärfe, der ihrer Brauchbarkeit keinen Eintrag thut, sondern ihnen im Gegentheil Ausdrucksfähigkeit und höheren musikalischen Werth verleiht (Streichinstrumente, Zungenpfeifen, Oboe, Fagott, menschliche Stimme). Werden die höheren Obertöne stärker, so wird der Klang schärfer, durchdringender, rauher (Posaunen und Trompeten).

Bedingung eines vollen Klanges ist, dass der Grundton wesentlich stärker ist als alle Obertöne. Je mehr der Grundton zurücktritt, um so mehr wird der Klang leer. —

Durch seine Untersuchungen über das Wesen der Klangfarbe hat sich Helmholtz als Forscher auf dem Gebiete der Akustik ein Denkmal errichtet, das auch von den Gegnern einer akustischen Begründung der Musiktheorie in Ehren gehalten wird und voraussichtlich, „aere perennius“, den zerstörenden Einflüssen der Zeit Trotz bieten wird.

Dritter Abschnitt.

Die Wahrnehmung des Klanges. Interferenz, Schwebungen und Combinationstöne. Consonanz und Dissonanz.

80. Aufgabe der physiologischen Akustik. — Das menschliche Gehörorgan. — Nachdem wir im ersten Abschnitte den musikalischen Ton als Ganzes in Bezug auf seine Höhe betrachtet haben, im zweiten etwas tiefer in seine Natur eingedrungen sind und die Abhängigkeit der Klangfarbe von den Partialtönen, als den elementaren Bestandtheilen des musikalischen Tones erkannt haben, betreten wir nun einen Boden, der unter seiner Oberfläche reiche, zum grössten Theil noch ungehobene und äusserst schwer zu gewinnende Schätze birgt, das Gebiet der physiologischen Akustik. — Wir haben uns bisher wenig darum bekümmert, wie sich der Akt des Hörens vollzieht, wie es kommt, dass wir im Stande sind, die komplizirte Wellenbewegung, welche einem Klange entspricht, bald als Ganzes zu erfassen, bald in ihre einfachsten Bestandtheile zu zerlegen; wir haben es einfach als eine Erfahrungsthatsache hingenommen, dass wir die einen Intervalle als Consonanzen, die andern als Dissonanzen empfinden und wenig danach gefragt, warum dies so ist. Wenn wir die Frage: „Warum?“ auf Tonempfindungen anwenden, nähern wir uns nicht nur den Grenzen der musikalischen Akustik, sondern häufig den Grenzen des Erkennens überhaupt. Wir werden sehen, dass oft, wenn wir der Lösung einer Frage nahe zu sein glauben, im letzten Momente noch ein Wall sich vor uns aufthürmt, der uns das weitere Vordringen verwehrt oder zum mindesten sehr erschwert. — Wer eine Wanderung im Hochgebirge unternimmt, wird

nach kurzer Zeit die Erfahrung machen, dass ihn die Fähigkeit, Entfernungen auch nur annähernd richtig zu beurtheilen, häufig ganz im Stiche lässt. Man klimmt einen Bergrücken hinan, man sieht vor sich die Kante dieses Rückens und drüber den blauen Himmel, in kurzer Zeit glaubt man oben zu sein, ganz oben auf dem höchsten Punkte, und die ganze Umgebung zu Füssen zu haben. Hat man endlich den Bergrücken erklommen, so erkennt man, dass man sich getäuscht hat, man sieht vor sich einen weit höheren Berg, der dem Auge bisher durch die Kante des eben erklommenen Berges verdeckt war. Will man weiter vordringen, so sieht man sich vielleicht gezwungen, die erreichte Höhe zu verlassen, wieder in ein tiefes Thal hinabzusteigen und von dort einen Angriff auf den neuen höheren Berg zu unternehmen. Wird der Gipfel, den wir jetzt vor uns sehen, auch wirklich der höchste sein, werden wir von dort aus den ersehnten Rundblick geniessen? —

Beginnen wir unsere Wanderung mit einer kurzen Betrachtung desjenigen Organs, welches die nothwendige Voraussetzung der Akustik bildet, des menschlichen Ohres.

Die beistehende Figur gibt eine schematische Uebersicht des Gehörorgans.

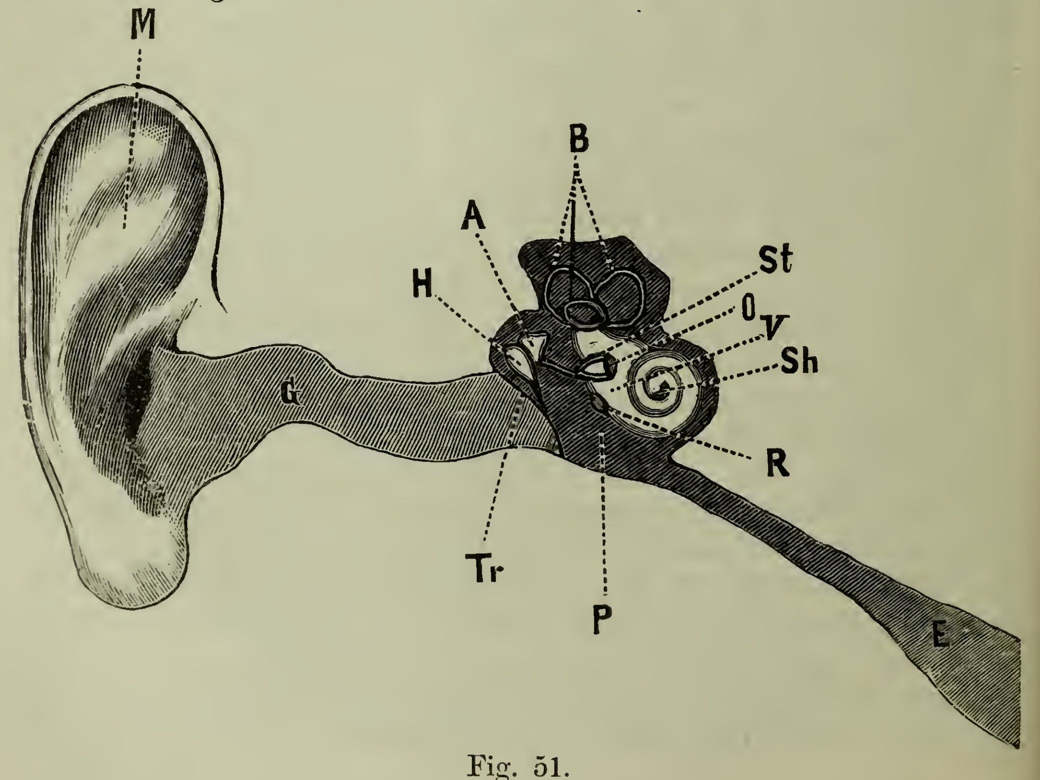


Fig. 51.

Das äussere Ohr besteht aus der Ohrmuschel M und dem Gehörgange G, der sich von Aussen nach Innen zunächst trichterförmig verengt und nachher wieder etwas erweitert. Das innere Ende des Gehörganges ist durch das Trommelfell Tr abgeschlossen, eine dünne elastische Membran von nahezu kreisförmiger Gestalt (eigentlich ein Oval, dessen kürzere Axe 8—9 Millimeter und dessen längere Axe 10—11 Millimeter lang ist).

Das Trommelfell scheidet das äussere Ohr von dem mittleren Ohr. Der Hohlraum unmittelbar hinter dem Trommelfelle heisst die Trommelhöhle oder Paukenhöhle P, die durch die Eustachische Trompete E, eine enge, nach dem Schlunde zu sich trompetenartig erweiternde Röhre, mit dem Nasenrachenraum in Verbindung steht. Abgesehen von dieser Oeffnung und von drei durch Membranen verschlossenen Oeffnungen ist die Paukenhöhle rings von dem festen Knochen des Schläfenbeines umschlossen. Die drei durch Membranen abgeschlossenen Oeffnungen sind: die eben erwähnte vom Trommelfelle verschlossene Einmündungsstelle des äusseren Gehörganges,

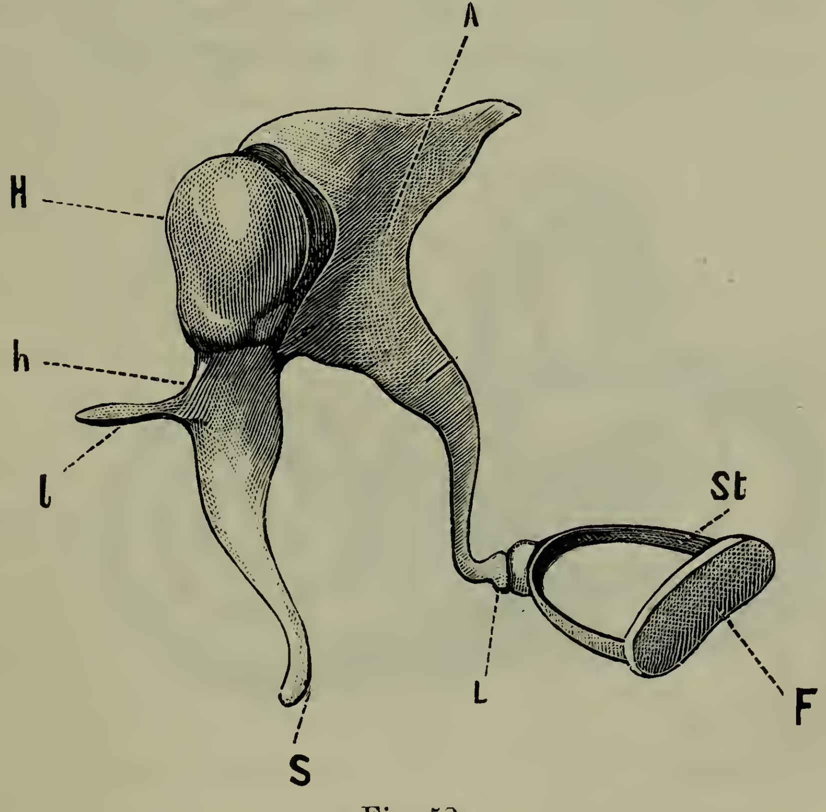


Fig. 52.

ferner das ovale Fenster O und das runde Fenster R. Zwischen dem Trommelfell und dem elastischen Häutchen, welches das ovale Fenster verschliesst, spannt sich die Kette der Gehörknöchelchen aus: der Hammer H, der Amboss A mit dem Linsenbeinchen L, und der Steigbügel St, die in Fig. 52 in bedeutend vergrössertem Maassstabe abgebildet sind. Der Stiel s des Hammers ist an das Trommelfell festgeheftet, und seine Spitze zieht das Trommelfell stark nach Innen in einem Punkte, der ungefähr in der Mitte des Felles liegt und als Nabel bezeichnet wird. Der auf der Figur sichtbare lange Fortsatz l des Hammers liegt in Bandmassen versteckt. Am Hammer ist in der Gegend seines Halses h der Spannmuskel befestigt, durch den der Hammerstiel mehr oder weniger nach Innen gezogen, die Spannung des Trommelfells somit erhöht oder vermindert werden kann. An die auf der Hinterseite des Hammerkopfes befindliche Gelenkfläche schliesst sich der Amboss an, dessen langer Fortsatz mit dem Linsenbeinchen L endigt, an das sich unmittelbar der Steigbügel St anschliesst. Die Fussplatte f des Steigbügels ist an die Membran des ovalen Fensters festgeheftet und bedeckt dieselbe bis auf einen schmalen Rand. Die Knöchelchen sind unter sich durch geschmeidige Gelenke verbunden. Die Paukenhöhle ist mit Luft erfüllt und mit Schleimhaut ausgekleidet.

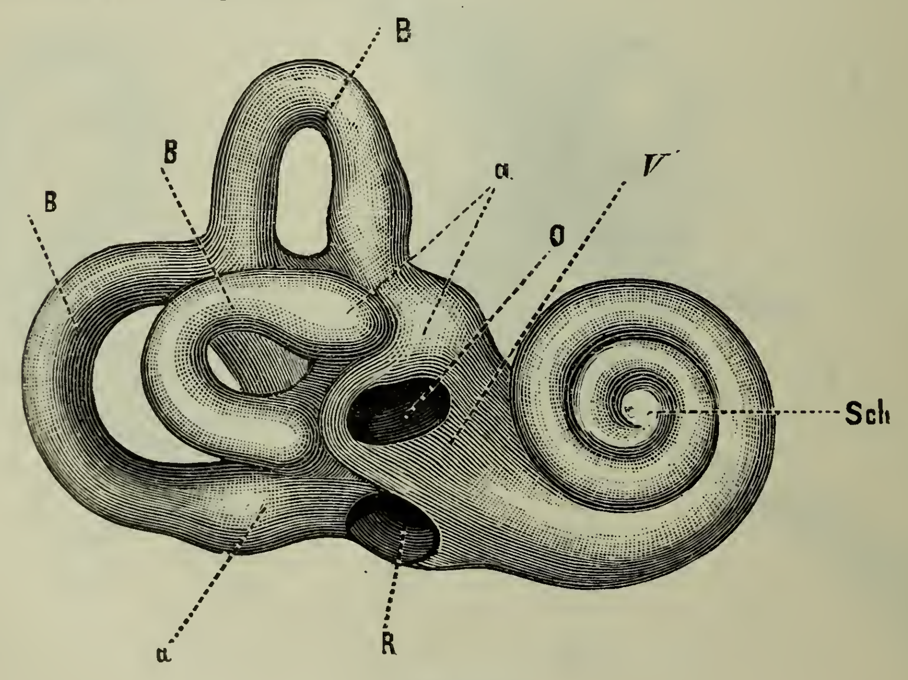


Fig. 53.

Das innere Ohr, dessen äussere Gestalt in der vorstehenden Figur in vergrössertem Maassstabe abgebildet ist, ist der wichtigste aber auch komplizirteste Theil des Gehörorgans. Es ist rings von festen Knochen umschlossen und in das Felsenbein eingebettet. Nur die beiden schon erwähnten Fenster, das ovale O und das runde R setzen das innere Ohr in Verbindung mit der Aussenwelt. Seinem verwickelten Baue verdankt es seine Benennung als Labyrinth. Treten wir beim ovalen Fenster in das Labyrinth ein, so gelangen wir zunächst in den Vorhof V, von da aus nach der Seite des Hinterkopfes fortschreitend zu den drei Bogengängen B, halbzirkelförmigen Kanälen, die vom Vorhof ausgehen und wieder in denselben einmünden. Die etwas erweiterten sackartigen Anfänge der Bogengänge heissen Ampullen a. Gehen wir dagegen vom Vorhofe nach der entgegengesetzten Richtung hin (in der Figur nach rechts), so gelangen wir in die Windungen der Schnecke Sch. Vorhof, Bogengänge und Schnecke sind sämmtlich mit einer Flüssigkeit, dem äusseren Labyrinthwasser angefüllt.

Die Schnecke hat $2^1/_2$ Windungen, die nach Innen immer enger werden und in der sog. Kuppel (dem Hamulus) endigen, einer Wendeltreppe ähnlich, die sich um ihre Axe, die Spindel, in sich verjüngenden Windungen herumwindet. Der Gang der Schnecke wird durch ein von der Spindel her eintretendes knöchernes Spiralblatt Kn (Fig. 54) in zwei Haupttheile getrennt, von denen der eine (in der Figur der obere) die Vorhoftreppe Vtr, der andere (in der Figur der untere) die Paukentreppe Ptr genannt wird.

Die Figur 54 stellt einen Durchschnitt durch den Gang der Schnecke dar. Das knöcherne Spiralblatt reicht nicht bis ganz zur gegenüberliegenden Wand, sondern die vollständige Trennung der beiden Treppen wird erst durch zwei ausgespannte Membranen durchgeführt, durch die Reissner'sche Membran R (Membrana vestibularis) und durch die Basilarmembran oder Grundmembran B (Membrana basilaris). Der zwischen diesen beiden Membranen liegende Kanal Kl heisst Mitteltreppe (Ductus cochlearis).

Der Ausgangspunkt der Vorhoftreppe ist der Vorhof, die Paukentreppe dagegen geht vom runden Fenster R aus; sie wäre ohne jegliche Verbindung mit dem Vorhof, wenn nicht die Scheidewand der beiden Treppen nahe an der Kuppel von einer Oeffnung, dem Helikotrema, durchbrochen wäre. Durch

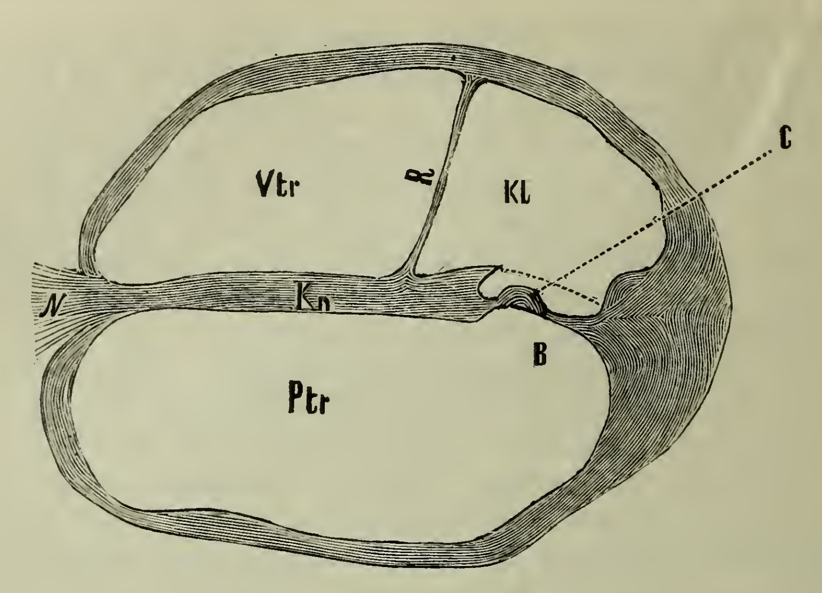


Fig. 54.

diese Oeffnung kann das Labyrinthwasser von der einen Treppe zur andern übertreten. Wird auf die Membran des ovalen Fensters ein starker Druck ausgeübt, so muss das Labyrinthwasser (das wie alle Flüssigkeiten nur äusserst wenig komprimirbar ist) dem Drucke ausweichen, indem es von der Vorhofstreppe durch das Helikotrema nach der Paukentreppe übertritt und dort die Membran des runden Fensters nach Aussen biegt.

In dem knöchernen Labyrinthe befindet sich das sog. häutige Labyrinth, eine häutige Masse, die im Labyrinthwasser schwimmt und da und dort mit den umgebenden Knochenwänden durch eintretende Nervenfasern und Bindegewebe verbunden ist. Das häutige Labyrinth hat im Ganzen die Form des umgebenden knöchernen Gehäuses; es ist im Vorhofe, in den Bogengängen und in der Schnecke verbreitet und selbst mit einer Flüssigkeit, dem inneren Labyrinthwasser, gefüllt. Im Vorhofe hat es die Gestalt zweier getrennter Säckchen, von denen das eine (der Utriculus) mit der häutigen Auskleidung der Bogengänge, das andere (der Sacculus) mit dem häutigen Schneckenkanal in Verbindung ist. In der häutigen Auskleidung der Ampullen und den verdickten Stellen der Vorhofssäckchen finden sich Zellen, aus denen eigenthümliche steife mikroskopische, in eine feine Spitze zulaufende Härchen in die Flüssigkeit ragen. Dort endigen die Ausläufer des Gehörnervs. Im Innern der Säckchen befinden sich kleine

kalkige krystallinische Steinchen, die sog. Hörsteine (Otolithen, Gehörsand), welche an der Innenwand anliegen und, ebenso wie die Härchen, auf die Nervenenden des Gehörnervs mechanische Reize ausüben, wenn sie vom Labyrinthwasser bewegt werden.

Von grosser Wichtigkeit sind die Membranen innerhalb der Schnecke, insbesondere die Basilarmembran mit dem sog. Corti'schen Organ C (Fig. 54). Dieses Organ besteht im Wesentlichen aus einer Reihe neben einander stehender Bögen, der Corti'schen Bögen. Jeder Bogen wird durch zwei gekrümmte gegen einander gestemmte elastische Fasern oder Stäbchen gebildet und ruht mit seinen beiden Enden auf der Basilarmembran auf. Die Reihe der Bögen folgt den Windungen der Schnecke, so dass dieses ganze System eine Art von Klaviatur bildet, in bildlichem Sinne vergleichbar mit einer Harfe mit verschieden langen und verschieden abgestimmten Saiten. Die Spannweite der einzelnen Bögen ist am Ausgangspunkte der Schnecke (am runden Fenster) am kleinsten (0,019 Millimeter) und nimmt von da gegen die Kuppel der Schnecke hin allmählich zu (0,085 Millimeter)*). Die Stäbchen sind in Verbindung mit den Ausläufern des Gehörnervs, dessen Fasern bei N (Fig. 54) von der Spindelseite her in die knöcherne Scheidewand Kn der Schnecke eintreten und sich von da nach der Basilarmembran und dem Corti'schen Organ zu verbreiten. Ueber das Corti'sche Organ hin ist, parallel zur Basilarmembran, ein Deckblatt (Membrana tectoria) ausgebreitet (in Fig. 54 durch eine punktirte Linie angedeutet). — Die elastische Basilarmembran selbst ist von parallel oder vielmehr radial neben einander ausgespannten Fasern durchzogen. In der Richtung dieser Fasern ist die Spannung der Basilarmembran weit bedeutender als in der dazu senkrechten, den Schneckenwindungen folgenden Richtung, so dass diese Membran ebenfalls als ein System neben einander ausgespannter Saiten aufgefasst werden kann. Die Länge dieser Saiten, d. h. die Breite der Membran, ist da am kleinsten, wo die Schnecke am weitesten ist, also am Eingange der Treppe (0,04 Millimeter); sie wächst von dort an allmählich gegen die Schneckenkuppel hin bis ungefähr auf das Zwölffache (0,49 Millimeter, ebenfalls nach Hensen).

---

*) Nach Messungen von Hensen an Neugeborenen.

81. Theorie des Hörens. Helmholtz'sche Resonanzhypothese. — Wie vollzieht sich nun der Akt des Hörens? Das ist die nächste Frage, die sich uns aufdrängt. —

Der schallerregende Körper überträgt seine Schwingungen an die Luft und erzeugt darin eine fortschreitende Wellenbewegung, die direkt oder indirekt zum Gehörorgan gelangt. Wenden wir das Ohr der Schallquelle zu, wie wir es thun, wenn wir recht gut, besonders scharf hören wollen, so tritt die Wellenbewegung direkt in den Gehörgang ein. Aber auch wenn wir das Ohr abwenden, findet die fortschreitende Wellenbewegung Mittel und Wege, zum Gehörorgan zu gelangen. In einem geschlossenen Raume wird der Schall oder vielmehr die Wellenbewegung an den Wänden reflektirt und kann so indirekt zum Ohre gelangen, wie ein Billardball, der von einem geschickten Spieler auf die verschiedensten Arten, unter ein- oder mehrmaliger Zurückwerfung (Reflexion) an den Banden dazu gebracht wird, sein Ziel zu erreichen, selbst in Fällen, wo es einem ungeübten Spieler von vornherein als fast unmöglich erschien. Auch im freien Raume kann der Schall im schlimmsten Falle wenigstens durch sog. Beugung zum abgewandten Ohre gelangen, indem die Wellenbewegung ein sich ihr entgegenstellendes Hinderniss womöglich umgeht, allerdings unter theilweiser Einbusse ihrer Energie (Huyghens'sches Prinzip). Es verhält sich damit einigermaassen ähnlich, wie sich eine sehr aufgeregte, stürmische See auch hinter dem Hafendamme fühlbar macht, wenn auch nur in geringem Maasse.

Die fortschreitende Wellenbewegung wird nun, mag sie auf diesem oder jenem Wege zum Ohre gelangen, von der Ohrmuschel aufgenommen; sie tritt in den Gehörgang ein und trifft auf das Trommelfell, das sie dazu zwingt, bis in die feinsten Einzelheiten alle Bewegungen mitzumachen, die sie von ihm verlangt. Der Eigenton, den das Trommelfell durch die ihm eigene Spannung vielleicht hat, kommt nicht zur Geltung, da die von Aussen an das Trommelfell herantretenden Impulse weit mächtiger sind als die dem Trommelfelle innewohnende selbständige Schwingungsenergie. Die Schwingungen des Trommelfells werden durch den Hammerstiel auf den Hammer übertragen und gehen von da auf den Amboss über, der sie mit seinem langen Fortsatze auf den Steigbügel fortpflanzt. Die Fussplatte des Steigbügels endlich zwingt die mit ihm verwachsene Membran des ovalen Fensters, die Schwingungen mit-

zumachen und weiter an das Labyrinthwasser des inneren Ohres mitzutheilen.

Die Kette der Gehörknöchelchen ist ein mit wunderbarer Präzision wirkendes System von Hebeln, das die vom Trommelfelle übernommene relativ bedeutende Bewegung in eine geringere Bewegung von um so grösserer Energie verwandelt und der im Verhältniss zum Trommelfelle viel kleineren Membran des ovalen Fensters mittheilt. (Die Flächenausdehnung dieser Membran ist ungefähr 20 mal geringer als diejenige des Trommelfells.) — Bei besonders aufmerksamem Hören, beim sog. Lauschen, wird durch den Spannmuskel der Stiel des Hammers noch mehr nach Innen gezogen und die Spannung des Trommelfells erhöht. Die Gehörknöchelchen rücken noch dichter zusammen und die Uebertragung der Bewegung wird noch vollkommener.

Die Dichtigkeit der in der Paukenhöhle eingeschlossenen Luft ist in normalem Zustande gleich derjenigen der umgebenden Luft; wäre sie kleiner, so würde das Trommelfell vom überwiegenden äusseren Luftdrucke nach Innen gedrückt und in seiner Bewegungsfreiheit beeinträchtigt. Die Eustachische Trompete stellt die Verbindung der Luft der Paukenhöhle mit der äusseren Luft her. Gewöhnlich ist aber dieser Kanal geschlossen und wird nur bei einer Schlingbewegung geöffnet. Wenn man bei verschlossener Nase und geschlossenem Munde ein- oder mehrmals eine Schlingbewegung macht, so saugt man dadurch Luft aus der Paukenhöhle aus und man fühlt nachher deutlich eine gewisse Spannung im Trommelfell, welche sofort nachlässt, sobald man bei geöffneter Nase eine neue Schlingbewegung macht. Im Momente des Schluckens wird die Eustachische Trompete geöffnet und die Kommunikation zwischen der äusseren und der inneren Luft hergestellt. Die Schlingbewegung gibt also ein Mittel an die Hand, allfällige Druckdifferenzen auszugleichen. Starker Ueberdruck von der einen Seite bricht sich, auch ohne dass man eine Schlingbewegung macht, durch die Eustachische Trompete Bahn. Es wird deshalb z. B. Artilleristen empfohlen, beim Abfeuern eines Geschützes den Mund zu öffnen, damit die heftige Lufterschütterung nicht nur von Aussen, sondern gleichzeitig durch die Eustachische Trompete von Innen auf das Trommelfell eindringen kann, so dass es nicht in Folge allzu starken einseitigen Ueberdruckes platzt.

Das Labyrinthwasser nimmt die Schwingungen, die ihm von

den Gehörknöchelchen durch die Membran des ovalen Fensters mitgetheilt werden, auf und pflanzt sie zu den weitverzweigten Endigungen des Gehörnervs fort. Durch jeden vom Steigbügel auf die Flüssigkeit des inneren Ohres ausgeübten Stoss entsteht eine Bewegung im Labyrinthwasser, in Folge deren sich die membranösen Wände des Schneckenkanals nach der Paukentreppe hin ausbuchten. Je grösser die durch den Steigbügel verdrängte Flüssigkeitsmenge ist, um so weiter wird sich der in Bewegung gesetzte Theil der membranösen Wände erstrecken, und nöthigenfalls wird von der Vorhofstreppe her durch die nahe der Schneckenkuppel befindliche Oeffnung (das Helikotrema) Flüssigkeit nach der Paukentreppe hin überfliessen und dort die Membran des runden Fensters nach Aussen biegen.

Helmholtz gründet nun seine Theorie des Hörens auf das bekannte Phänomen des Mittönens. Wir haben gesehen, dass sowohl das System der Bögen des Corti'schen Organs, als die radialen Fasern, welche die Basilarmembran ihrer Breite nach durchziehen, einem Systeme ausgespannter Saiten zu vergleichen sind. Jede dieser Saiten ist auf einen bestimmten einfachen Ton abgestimmt und geräth in Schwingung, sobald dieser Ton erklingt, sie klingt mit. Die kürzeren Bögen oder Fasern entsprechen den hohen, die längeren den tiefen Tönen. Es kann auch angenommen werden, dass die längeren Fasern eine grössere Belastung zu tragen haben, ähnlich wie die übersponnenen tieferen Saiten der Streichinstrumente. Früher schrieb man hauptsächlich den Corti'schen Fasern die Eigenschaft des Mitschwingens zu. Seit aber durch mikroskopisch-anatomische Untersuchungen (namentlich von Hasse) festgestellt ist, dass die Corti'schen Bögen bei Vögeln und Amphibien fehlen, ist man geneigt, diesen Bögen nur eine untergeordnete Rolle zuzuerkennen; denn den genannten Thieren kann das Vermögen, Töne verschiedener Höhe von einander zu unterscheiden, nicht unbedingt abgesprochen werden, namentlich nicht den Singvögeln. — Helmholtz nimmt demnach an, dass die Fasern der Basilarmembran es seien, welche in Mitschwingung gerathen, jede bei dem ihr entsprechenden einfachen Tone. Die mitschwingenden Fasern üben auf die Endigungen des Gehörnervs Reize aus, und diese werden zum Gehirn fortgepflanzt. Damit sind wir aber auch an den Grenzen des Erkennens angelangt. Die Fasern selbst klingen nicht, sie führen nur Schwingungen aus und üben dadurch einen rein mechanischen Reiz auf die

Nervenendigungen aus, mit denen sie in Verbindung stehen. Darüber, wie der physische Nervenreiz im Gehirn sich in die seelische Empfindung eines Tones verwandelt und Tonvorstellungen erzeugt, die auch nach Aufhören des äusseren Reizes dauernd festgehalten werden können, werden wir wohl niemals erschöpfende Auskunft erhalten. Denn hier stehen wir an denjenigen Grenzen, welche der menschliche Geist nicht überschreiten wird. Das innerste Wesen der Natur ist unergründlich. Wir müssen zufrieden sein, wenn es uns gelingt, den Grenzen des Erkennens sehr nahe zu kommen und verwickelte Naturerscheinungen auf die sie bedingenden einfachsten Elemente zurückzuführen.

Erweist sich die Helmholtz'sche Hypothese als richtig, so ist man allerdings in hohem Grade dazu berechtigt, von der Zurückführung einer höchst komplizirten Erscheinung auf wesentlich einfachere ihr zu Grunde liegende Elementarerscheinungen zu sprechen. Die einem Klange oder einer Verbindung von Klängen entsprechende Wellenbewegung der Luft ausserhalb des Gehörorgans ist freilich an und für sich ein einheitliches Ganzes; die schwingende Bewegung jedes einzelnen an der Wellenbewegung theilnehmenden Luftttheilchens ist eine vollkommen eindeutige, klar und bestimmt vorgeschriebene. Aber doch ist in Beziehung auf das Ohr dieses Ganze in der Regel ein höchst komplizirtes Zusammengesetztes, und das Ohr hat die wunderbare Fähigkeit, das Zusammengesetzte als eine Summe einfacherer Bestandtheile zu erkennen und in seine Bestandtheile aufzulösen. G. S. Ohm hat das fundamentale Gesetz aufgestellt, wonach nur eine „pendelartige“ Bewegung (wie wir sie von einer Stimmgabel aufzeichnen liessen), nur eine sog. Sinus-Schwingung vom Ohre als einfacher Ton empfunden, jede andere schwingende Bewegung aber als Summe solcher einfacher Schwingungen aufgefasst und in vollkommen bestimmter eindeutiger Weise in die einzelnen Summanden zerlegt wird. Wir haben im letzten Abschnitte Gelegenheit gefunden, uns von der Richtigkeit dieses Ohm'schen Satzes zu überzeugen. Dass das Ohr, und zwar besonders das musikalisch geübte Ohr, im Stande ist, eine ganze Klangmasse wenigstens zunächst in die einzelnen Klänge zu zerlegen, einen Akkord als aus drei, vier oder mehr Klängen bestehend zu erkennen und bei vielstimmiger Musik jede einzelne Stimme nach Belieben zu verfolgen, ist eine jedem Laien bekannte Thatsache. Wir haben im letzten Abschnitte gesehen, dass diese Zerlegung noch weiter

gehen kann und das Ohr bei gehörig angespannter Aufmerksamkeit sehr häufig im Stande ist, aus dem Klange die einzelnen Partialtöne herauszuhören, eine Fähigkeit, die durch Uebung bedeutend entwickelt werden kann. Hält man sich vor Augen, dass in der zum Ohre gelangenden Wellenbewegung der Luft weder die einzelnen Klänge noch deren einzelne Partialtöne als solche, d. h. gewissermaassen neben einander, von einander getrennt, existiren, sondern die Wellenbewegung für jeden andern Sinn ein vollkommen einheitliches Ganzes bildet, und dass die Zerlegung erst vom Gehörorgane und zwar mit absoluter Sicherheit und Präzision vorgenommen wird, so steht man allerdings vor einer räthselhaften Erscheinung. Diese verwickelte Erscheinung, welche in dem Ohm'schen Gesetze einen präzisen wissenschaftlichen Ausdruck findet, wird dem Verständniss durch die Helmholtz'sche Hypothese des Hörens, seine sog. Resonanzhypothese, wesentlich näher gebracht. Wenn man bei einem Klavier alle Saiten von ihrem Dämpfer befreit und von einem Instrumente oder einer Singstimme kräftig einen musikalischen Ton erklingen, oder mehrere Instrumente oder Singstimmen einen Akkord angeben lässt, so wird man bemerken, dass alle diejenigen Klaviersaiten mit- und nachklingen, deren Tonhöhe mit den angegebenen Tönen übereinstimmt, und zwar werden auch die den einzelnen Partialtönen entsprechenden Saiten mittönen, was sich dem Ohre daraus zu erkennen gibt, dass auch der Klangcharakter des erregenden Klanges einigermaassen wiedergegeben wird. Ganz unabhängig vom Ohre kann das Mitschwingen durch aufgestellte Papierreiterchen bewiesen werden, die von den in Mitschwingung versetzten Saiten abgeworfen werden. Das System ausgespannter Klaviersaiten ist also ganz ähnlich wie das menschliche Ohr selbst, dazu fähig, die Zerlegung einer Klangmasse in ihre elementaren Bestandtheile vorzunehmen. Es gewährt entschieden eine grosse Befriedigung, von einem ausserhalb des Gehörorgans unabhängig von diesem auftretenden Phänomen durch Analogie auf die Vorgänge innerhalb des Gehörorgans zu schliessen.

Dass das unbewaffnete menschliche Ohr viel leichter im Stande ist, eine Klangmasse in die einzelnen sie zusammensetzenden Klänge, als einen Klang in seine Partialtöne zu zerlegen, erklärt Helmholtz durch die mit einer derartigen Zerlegung verbundenen psychischen Vorgänge. Im Zerlegen einer Klangmasse in ihre einzelnen Klänge haben wir weit grössere Uebung

als im Analysiren eines musikalischen Tones in Bezug auf seine Obertöne. Welch grossen Einfluss Uebung und Gewohnheit haben, ist bekannt. Ein geübter Orchesterdirigent wird aus jeder Klangmischung die einzelnen Orchesterinstrumente herauszuhören vermögen, was auch einem musikalisch beanlagten Laien oft schwer gelingt. Ein an die Beobachtung der Obertöne gewöhntes Ohr wird auch einen einzelnen von einem musikalischen Instrumente oder einer Singstimme hervorgebrachten Ton als etwas Zusammengesetztes zu empfinden vermögen. Wir haben oben schon erwähnt, dass G. Engel sich die Fähigkeit, die Obertöne der menschlichen Stimme zu hören, abgewöhnen musste, weil sie ihn in seinem Berufe störte. Wirkliche einfache Töne bekommt man aber in der Praxis fast nie zu hören, unser Ohr ist also im Allgemeinen nicht daran gewöhnt, einfache Töne als selbständige Individuen aufzufassen. Dadurch wird dem nicht geübten und unbewaffneten Ohre die Zerlegung eines Klanges in seine Partialtöne erschwert; denn „wenn von den Summanden nur eine einigermaassen verwaschene und schwankende Kenntniss da ist, so wird auch die Zerlegungsweise der Summe in entsprechendem Maasse unsicher werden müssen“ (Helmholtz). Es ist gut so; denn es ist jedenfalls besser, wenn für die psychische Empfindung die Partialtöne eines Klanges sich nur als Faktoren der Klangfarbe geltend machen, als wenn sie einzeln als einfache Töne bewusst wahrgenommen werden. Dass aber letzteres durch die blosse Macht der Uebung und des Willens in vielen Fällen möglich ist, unterliegt keinem Zweifel, und die Helmholtz'sche geniale Hypothese des Hörens rückt diese Thatsache dem Verständniss wesentlich näher.

Die Thatsache, dass wir im Stande sind, bei raschen Läufen und Trillern die einzelnen Töne klar zu hören und von einander zu sondern, nöthigt zu der Annahme, dass die erregten Fasern sehr bald nach Aufhören des äussern Anstosses zur Ruhe kommen; denn würden sie auch nur kurze Zeit in merklicher Stärke nachschwingen, so würden sich die Empfindungen der aufeinanderfolgenden Töne nicht scharf sondern lassen, sondern sie müssten sich zeitlich theilweise decken und verwischen. Es muss also ein gewisser Grad von Dämpfung im Ohre vorhanden sein. Diese Dämpfung ist nicht in allen Tonlagen gleich vollkommen; es ist bekannt, dass nach der Tiefe zu Triller und rasche Läufe dem Ohre bei einem gewissen Grade von Schnelligkeit anfangen unklar und verwischt zu er-

scheinen, während sie in höheren Tonlagen unter denselben Bedingungen noch klar zu hören sind. Helmholtz nimmt an, dass der Grad der Dämpfung mindestens so gross sei, dass nach $\frac{1}{5}$ Sekunde die Stärke des Mitschwingens auf $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Stärke gesunken sei.

Wir haben gesehen, dass leicht bewegliche elastische Körper, die leicht in Mitschwingung gerathen und nach Aufhören des äusseren Anstosses auch rasch ausklingen, auch durch solche Töne zum Mitschwingen gebracht werden können, deren Tonhöhe nur annähernd mit dem Eigentone des mitschwingenden Körpers übereinstimmt. Die Stärke des Mitschwingens wird allerdings sehr rasch und um so mehr abnehmen, je weiter der Ton des erregenden Körpers sich vom Eigentone des mitschwingenden entfernt. Einen solchen Fall haben wir bei den mitschwingenden Fasern den Basilarmembran vor uns, und hier kommt noch ausserdem der Umstand hinzu, dass die einzelnen Fasern nicht von einander isolirt sind, sondern mit einander eben durch die Membran zusammenhängen. Es wird desshalb durch einen bestimmten einfachen Ton nicht nur eine Faser in Mitschwingung versetzt, sondern bis zu einer gewissen Entfernung hin auch die beiderseits benachbarten. Die eine Faser, deren Eigenton genau mit dem erregenden Tone im Einklang ist, wird freilich bei weitem stärker als alle andern benachbarten Fasern in Mitschwingung gerathen. Helmholtz nimmt an, dass die Stärke des Mitschwingens derjenigen Faser, deren Eigenton vom erregenden Tone um einen Halbton entfernt ist, schon auf $\frac{1}{10}$ gesunken sei.

Wenn durch einen einfachen Ton nur eine einzige Faser in Schwingung versetzt würde, so könnten wir genau so viele Tonstufen von einander unterscheiden als die Zahl der Fasern beträgt, und der Uebergang von einer Stufe zur andern müsste in sehr kleinen Sprüngen erfolgen, in um so kleineren, je grösser die Zahl der Fasern ist. Für unser Ohr kann aber (wenn wir krankhafte Fälle ausschliessen) der Uebergang von einem Tone zu einem beliebigen andern in vollkommen kontinuirlicher Weise erfolgen. Mit dieser Thatsache ist die Annahme, dass durch einen erregenden Ton die Faser mit vollkommen übereinstimmendem Eigentone bei weitem am stärksten, in geringerem rasch abnehmendem Grade aber auch die benachbarten Fasern zum Mitschwingen gezwungen werden, in vollster Uebereinstimmung.

Bei Geräuschen kann angenommen werden, dass durch sie nicht nur einzelne neben einander liegende Fasern, sondern ausgedehntere Theile der Basilarmembran in Schwingung versetzt werden, wodurch ein komplizirtes Gemisch von Empfindungen hervorgebracht wird. Starke äussere Anstösse werden auf alle Theile der Basilarmembran einwirken, und jeder dieser Theile wird mit der ihm eigenthümlichen Schwingungsperiode ausklingen. — Gewiss ist, dass für Gehörsempfindungen jeder Art die Schnecke das perzipirende Organ ist; es steht nach neueren Untersuchungen fest, dass der sog. Vestibularapparat (Vorhofssäckchen, Ampullen, Bogengänge) nicht der Perzeption von Geräuschen, sondern andern Zwecken (Funktionen des Gleichgewichts) dient.

Der wesentlichste Theil des Gehörorgans ist das innere Ohr. Wenn das Trommelfell und die Gehörknöchelchen beschädigt sind, so wird zwar die Deutlichkeit des Hörens beeinträchtigt, die Fähigkeit Töne zu hören und zu unterscheiden hört aber nicht auf, wenn die Beschädigung sich nicht auf die Membranen der beiden Fenster oder noch weiter erstreckt. Der Verlust des Gehörwassers hat völlige Taubheit zur Folge. Dagegen wurden von Ohrenärzten Fälle beobachtet, in denen einzelne Theile der Schnecke abgestorben waren, ohne dass das Unterscheidungsvermögen für Töne verschiedener Höhe darunter sehr gelitten hätte, sobald nur das Labyrinthwasser in dem unverletzten Theile der Schnecke erhalten und rings eingeschlossen war.

So überraschend einfach, klar und genial die Helmholtzsche Theorie der Gehörsempfindungen ist, so darf doch nicht vergessen werden, dass sie eine Hypothese ist, welche nur so lange unangefochten bleiben kann, als keine Thatsachen mit ihr in Konflikt gerathen. Helmholtz selbst war zu sehr von streng wissenschaftlichem Geiste durchdrungen, um seine Hypothese als unanfechtbare Wahrheit hinzustellen. Nach ächter Forscher Weise wollte er seine Theorie nur als Hypothese aufgefasst wissen.

In neuerer und neuester Zeit sind denn auch zahlreiche und zum Theil schwere Angriffe auf die Helmholtz'sche Theorie gemacht worden. Physiologen und Psychologen wie Hermann, Ebbinghaus u. A. suchten dieselbe zunächst durch Erweiterungen und Zusätze denjenigen Thatsachen anzupassen, die sie nicht zu erklären vermag. Ihr Fall scheint aber nur mehr eine

Frage der Zeit zu sein. Dieselben Physiologen und Psychologen jedoch, welche den stolzen Helmholtz'schen Bau abbrechen, begnügen sich nicht mit ihrer zerstörenden Arbeit, sondern sind eifrig bestrebt, an Stelle des niedergerissenen ein neues Gebäude zu errichten. Die Fundamentirungsarbeiten dazu sind in vollem Gange. Hoffen wir, dass das Fundament solide und der Bau dauerhaft sein wird.*)

82. Tonstärke. Stärke der Empfindung und objektive Tonstärke. — Im ersten Abschnitte haben wir der Tonhöhe, im zweiten der Klangfarbe eingehendere Betrachtungen gewidmet; von dem dritten charakteristischen Merkmale des Tones, der Tonstärke, haben wir dagegen nur kurz bei Anlass der Betrachtung von Stimmgabelschwingungen gesprochen.

So einfach im Vergleich zur Tonhöhe und Klangfarbe die Definition der Tonstärke auf den ersten Blick zu sein scheint, so schwierig stellt es sich heraus, wenn man der Sache tiefer auf den Grund geht.

Wenn wir eine Saite durch Zupfen, Schlagen oder Streichen in Schwingung versetzen, so werden wir allerdings einen um so stärkeren Klang hören, je energischer die Erregung der Saite erfolgte, je weiter sie sich bei ihren Schwingungen von der Gleichgewichtslage entfernte. Nennen wir „Schwingungsamplitude" die grösste Entfernung, welche der am stärksten erregte Punkt von der Gleichgewichtslage annehmen kann, so können wir also wenigstens so viel sagen, dass die Stärke der Tonempfindung, unter übrigens gleichen Umständen, um so grösser ist, je grösser die Schwingungsamplitude ist. Was von einer Saite gilt, ist ohne weiteres übertragbar auf jede schwingende Bewegung, sei es einer Zunge, einer Membran oder einer Luftsäule; stets wird unter übrigens gleichen Umständen die Stärke der Tonempfindung mit wachsender Schwingungsamplitude zunehmen, mit abnehmender kleiner werden.

Wir haben ferner gesehen, dass der Ton einer Stimmgabel bedeutend verstärkt wird, wenn wir sie mit ihrem Stiele auf ein Resonanzkästchen, oder auch nur auf eine hölzerne Tisch-

*) Man sehe die interessante Arbeit von Max Meyer: „Zur Theorie der Differenztöne und der Gehörsempfindungen überhaupt" in der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane Band XVI (Leipzig, Ambrosius Barth). In dieser Abhandlung fasst Meyer die Einwände gegen die Helmholtz'sche Resonanztheorie zusammen und stellt die Grundlagen einer neuen Theorie des Hörens auf.

platte aufsetzen, und dass eine mit einem Resonanzboden in Verbindung stehende Saite einen viel kräftigeren Klang gibt als eine frei schwingende. Die ausgedehntere Fläche des Resonanzbodens überträgt ihre Schwingungen an ein grösseres Luftquantum, an eine grössere Zahl einzelner Lufttheilchen, und die Bewegungen dieser einzelnen Lufttheilchen summiren sich im Gehörgange zu einer Gesammtbewegung von grösserer Schwingungsamplitude; es bestätigt sich also auch in dieser Erscheinung das eben aufgestellte Gesetz. Es darf diese Erscheinung jedoch nicht so aufgefasst werden, als ob aus einer kleinen Kraft gewissermaassen kostenlos eine grössere geschaffen würde. Auf einem Markte kann man wohl Waaren unter sich und gegen Geld umtauschen; wer aber mit leeren Händen kommt, wird auch mit leeren Händen abziehen. Aehnlich ist es hier. Durch das Aufsetzen einer schwingenden Stimmgabel auf eine Resonanzplatte werden die Schwingungen freilich auf eine grössere Luftmenge übertragen und dadurch deutlicher hörbar; sie erlöschen aber andrerseits auch nach kürzerer Zeit als bei einer frei schwingenden Gabel, vorausgesetzt, dass sie nicht durch eine äussere Kraftwirkung andauernd aufrecht erhalten werden.

Eine bekannte Thatsache ist es weiter, dass mit zunehmender Entfernung von der Schallquelle die Stärke der entsprechenden Schallempfindung rasch abnimmt. Da die von der Schallquelle ausgehende Wellenbewegung sich ringsum nach allen Richtungen fortpflanzt, so wird die in Bewegung gesetzte Luftmenge immer grösser, je mehr die Entfernung von der Schallquelle wächst. Würde die Stärke der Bewegung mit ihrer wachsenden Verbreitung nicht in entsprechendem Verhältniss abnehmen, so würde wieder eine Kraft aus nichts entstehen, was dem eben erwähnten Grundsatze gemäss unmöglich ist. (Prinzip der Erhaltung der Energie.) In genau demselben Maasse als die Oberfläche einer Kugel mit wachsendem Radius zunimmt, muss die Schwingungsamplitude der Wellenbewegung abnehmen. Das Centrum der Kugel ist hier die Schallquelle, der Radius die Entfernung des Ohres von der Schallquelle. Die Geometrie lehrt, dass die Oberfläche einer Kugel 4, 9, 16, 25, 36 mal so gross wird, wenn ihr Radius beziehungsweise auf das 2, 3, 4, 5, 6 fache wächst. Die Schwingungsamplitude muss dann resp. auf $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{36}$ sinken. Der Mathematiker drückt diese Wahrheit durch den Satz aus, dass die Schwingungsamplitude mit dem Quadrate der Entfernung ab-

nehme oder sich umgekehrt verhalte wie das Quadrat der Entfernung. Verhindert man die allseitige Verbreitung des Schalles und die Ausdehnung der Wellenbewegung auf immer grössere Flächen, indem man den Schall in Röhren von konstantem Querschnitt leitet, so nimmt auch die Intensität in viel langsamerem Maasse ab. Darauf beruhen die Sprachrohre.

Auch mit der Dichtigkeit der Luft steht die Energie der Schallbewegung im Zusammenhange. Wenn man eine Uhr unter die Glocke einer Luftpumpe setzt und die Luft auspumpt, so wird der durch das Ticken erzeugte Schall immer schwächer hörbar, je weiter die Verdünnung voranschreitet. Ganz ebenso ist ein und derselbe Schall auf dem Gipfel eines hohen Berges schwächer als unten am Fusse desselben. Es erklärt sich dies in der Weise, dass die Energie einer Bewegung um so grösser ist, je grösser (unter sonst gleichen Bedingungen) die in Bewegung gesetzte Masse ist. Wenn zwei Lokomotiven aufeinanderplatzen, so wird, bei gleicher Geschwindigkeit, die Macht des Anpralles um so grösser sein, je schwerer sie sind, d. h. je grösser ihre Masse ist. So wird auch die schwingende Bewegung einer Luftmenge eine grössere Wirkung ausüben, wenn die Dichtigkeit der Luft unter sonst gleichen Umständen grösser ist.

So weit reicht unsere Kenntniss der äusseren Umstände, von denen die Stärke einer Schallempfindung abhängig ist. Die Empfindungen selbst als solche entziehen sich jedoch jeder objektiven Messung. Zwei Empfindungen von genau derselben Art können wir freilich mit einander vergleichen und in der Amplitude der Wellenbewegung, durch welche die Empfindungen hervorgerufen werden, ein gemeinsames physikalisches Maass objektiver Natur finden. Ueber diesen einen Spezialfall hinaus erstreckt sich jedoch die Möglichkeit einer exakten Vergleichung nicht. Schon zur Vergleichung zweier einfacher Töne von ungleicher Höhe reicht das objektive Maass der Schwingungsamplitude nicht aus. Wenn von zwei Tönen verschiedener Höhe der eine eine viel intensivere Empfindung in unserem Gehörorgan hervorruft als der andere, so dürfen wir daraus keineswegs schliessen, dass diesem einen Tone eine viel intensivere Wellenbewegung zu Grunde liege als dem andern. Es ist sehr wohl möglich, dass die Amplitude der Wellenbewegung, welche einen hohen Ton hervorruft, viel geringer ist als die einem tiefen Tone entsprechende Amplitude, und dass dennoch

der hohe Ton eine viel intensivere Empfindung erzeugt als der tiefe. Schwingende Bewegungen von grosser Wellenlänge und geringer Schwingungszahl können von grosser Kraft sein und heftige mechanische Erschütterungen hervorrufen, ohne doch im Ohre den Eindruck eines auch nur einigermaassen kräftigen Tones zu erzeugen. Andrerseits können hohe Töne von geringer objektiver Stärke (Amplitude) auf das Gehörorgan sehr intensiv wirken und den Eindruck grosser Stärke machen.

Ebensowenig gibt es ein objektives Maass zur Vergleichung zweier musikalischer Töne verschiedener Klangfarbe. Schon die Bezeichnung der Klangfarben als dumpf, hell, glänzend, näselnd, hohl u. s. w. deutet darauf hin, wie verschieden die Art der Empfindung ist, welche Klänge verschiedener Art bei gleicher objektiver Stärke in uns hervorrufen. Empfindungen verschiedener Art messend mit einander zu vergleichen ist ein Unternehmen, welches zu keinem Resultate von objektiver Bedeutung führt.

Immerhin ist es für die exakte Behandlung akustischer Fragen schon von grossem Werthe, dass man für die Stärke einfacher Töne (pendelartiger oder Sinus-Schwingungen) ein objektives Maass in der Schwingungsamplitude hat. Man ist also berechtigt, von der Stärke der Partialtöne oder Obertöne eines Klanges als von etwas Objektivem zu sprechen; nur hat man darunter nicht die Stärke der Empfindung, sondern das physikalische Maass der Amplitude zu verstehen. In dieser Weise aufgefasst, ist die Stärke einer einfachen Schwingung oder eines einfachen Tones dem Quadrate der Amplitude proportional zu setzen, d. h. sie wird 4, 9, 16, 25, 36, 49 mal so gross, wenn die Amplitude resp. auf das 2, 3, 4, 5, 6, 7fache wächst.

(Die Stärke ist durch die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ zu messen, wo v die grösste Geschwindigkeit im Momente des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage bedeutet; diese Geschwindigkeit ist aber selbst der Amplitude a proportional, wie im Anhange gezeigt werden wird; also ist in der That die lebendige Kraft oder die objektive Tonstärke dem Quadrate der Amplitude proportional.)

83. Interferenzerscheinungen. — Die unter dem Namen der Interferenz bekannten Erscheinungen treten bei gleichzeitigem Erklingen zweier Töne von derselben Tonhöhe ein,

oder, in physikalischer Sprache ausgedrückt, bei dem Zusammenwirken zweier einfacher Wellenbewegungen von derselben Wellenlänge auf dieselben materiellen Theilchen.

Nehmen wir an, zwei einfache Tonwellen von der in beistehender Figur dargestellten Art treffen irgendwo in der Luft oder im Ohre zusammen und erregen gleichzeitig einen und denselben Punkt.

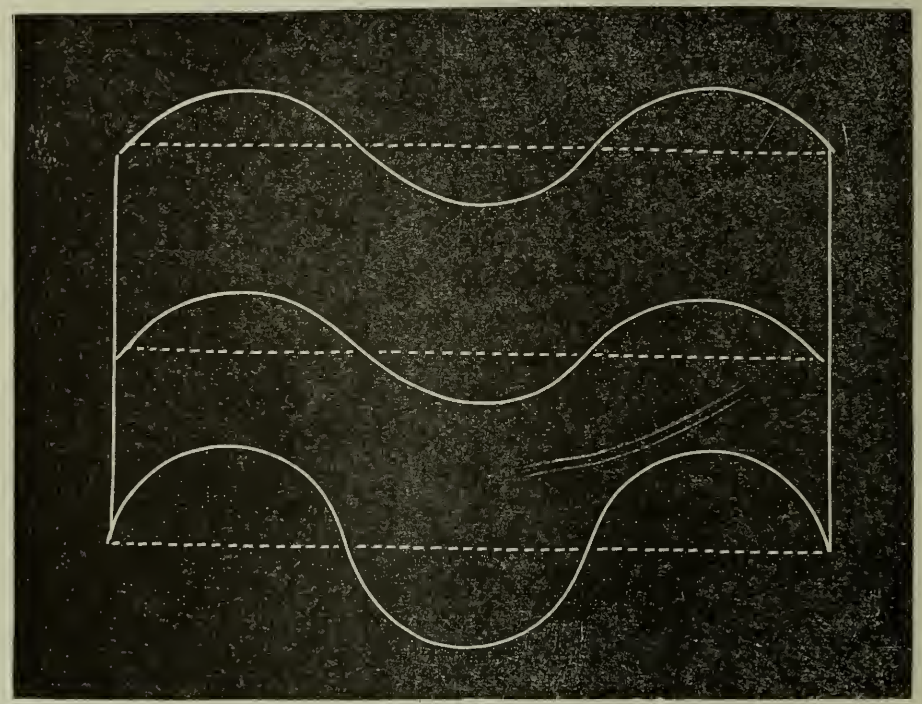


Fig. 55.

Wirken die beiden zusammentreffenden Wellen in demselben Sinne, d. h. trifft Wellenberg mit Wellenberg und Wellenthal mit Wellenthal zusammen (gleiche Phasen), so summirt sich ihre Wirkung; es entsteht eine neue Welle, deren Wellenberg in unserem Falle (s. Fig. 55) doppelt so hoch ist als der Wellenberg jeder einzelnen Welle und deren Wellenthal doppelt so tief ist als die beiden einzelnen Wellenthäler.

Die Amplitude der resultirenden Welle ist doppelt so gross als die Amplitude jeder einzelnen Welle, die objektive Stärke der Wellenbewegung oder des ihr entsprechenden Tones wird also, dem eben ausgesprochenen physikalischen Gesetze gemäss, viermal so gross.

Erregen dagegen zwei Wellenbewegungen einen und denselben Punkt in entgegengesetztem Sinne, trifft der Wellenberg

der einen Welle mit dem Wellenthal der andern zusammen und umgekehrt (ungleiche Phasen), so kann sich ihre Wirkung gegenseitig vernichten, wenn die Intensität (Amplitude) der beiden Wellen dieselbe ist (s. Fig. 56).

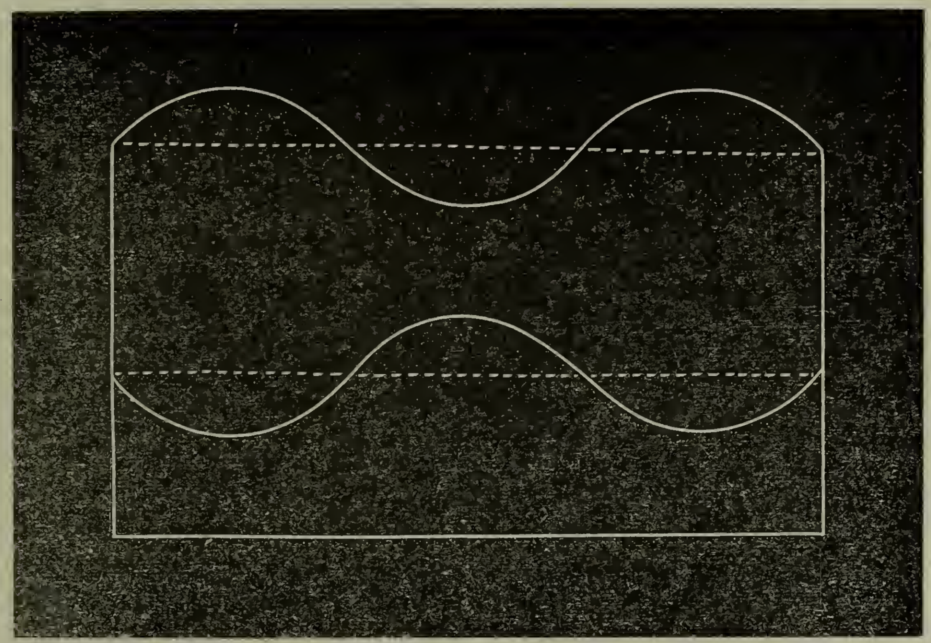


Fig. 56.

Es ist also möglich, dass zwei Töne, von denen jeder, wenn er allein erklingt, deutlich hörbar ist, sich bei gleichzeitigem Erklingen gegenseitig aufheben, so dass Stille entsteht. Das Experiment beweist diese Möglichkeit, wenn man nur dafür sorgt, dass die erforderlichen Bedingungen erfüllt sind.

Bei den allgemeinen Betrachtungen über Wellenbewegung (unter N. 66) nannten wir Wellenlänge die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Wellenberge, oder auch zweier aufeinanderfolgender Wellenthäler eines Wellenzuges. Die Entfernung eines Berges vom nächst benachbarten Thale (oder umgekehrt) ist eine halbe Wellenlänge. Zwei Punkte eines Wellenzuges, welche um eine ganze oder mehrere ganze Wellenlängen von einander entfernt sind, befinden sich zu derselben Zeit in demselben Schwingungszustande, in derselben „Schwingungsphase“; Punkte dagegen, die um eine halbe, oder um 3 halbe oder 5 halbe Wellenlängen von einander abstehen, haben entgegengesetzte Schwingungsphasen. Diese Betrachtungen machen das folgende einfache und sinnreiche Experiment verständlich.

Man nehme zwei sich gabelförmig verzweigende sog. Quincke-sche Interferenzröhren und stelle mittels Kautschukschläuchen die aus der folgenden Figur zu ersehende Verbindung her.

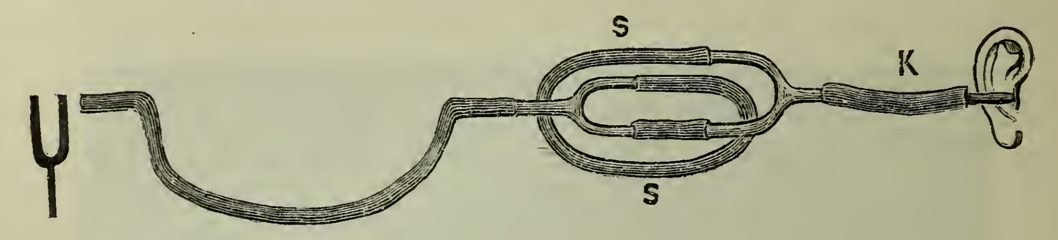


Fig. 57.

Wird die Stimmgabel links in Schwingungen versetzt, so tritt die von ihr ausgehende Wellenbewegung in die Kautschukröhre ein, gelangt zu der gabelförmigen Verzweigung und theilt sich dort in 2 Zweige, von denen der eine durch einen kürzeren, der andere durch einen längeren Verbindungsschlauch nach der zweiten rechtsstehenden gabelförmigen Röhre gelangt. Dort treffen beim Vereinigungspunkte die beiden Zweige wieder zusammen, gelangen zur Interferenz und die resultirende Bewegung wird vom Ohre aufgenommen. — Da die beiden eben erwähnten Verbindungsschläuche ungleich lang sind, so haben die beiden Zweige der Wellenbewegung, wenn sie beim Vereinigungspunkte wieder zusammentreffen, ungleiche Wege zurückgelegt. Beträgt die Differenz dieser beiden Weglängen, d. h. der Unterschied der Länge der beiden Verbindungsschläuche, gerade eine ganze Wellenlänge oder mehrere ganze Wellenlängen des betreffenden Tones, so trifft, nach dem eben Gesagten, Wellenberg mit Wellenberg und Wellenthal mit Wellenthal zusammen und die beiden Zweige summiren sich wieder zu einem Ganzen von (nahezu) derselben Intensität, als ob keine Verzweigung stattgefunden hätte. Beträgt dagegen der Unterschied der Länge der beiden Verbindungsschläuche eine halbe Wellenlänge (oder überhaupt ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge) des betreffenden Tones, so trifft beim Vereinigungspunkte der beiden Zweige jeweilen ein Wellenberg des einen Zweiges mit einem Wellenthal des andern zusammen und diese beiden Wirkungen heben sich auf. Gibt z. B. die Stimmgabel das Normal-$\bar{a}$ von 435 Schwingungen und ist der eine Verbindungsschlauch um 39 Centimeter länger als der andere, so wird das Ohr vom Tone der Stimmgabel nichts hören, während der Ton

sofort hörbar wird, wenn man einen der Zweige durch Zusammendrücken des entsprechenden Schlauches unterbricht.

Eine sehr bekannte und mit einer einfachen Stimmgabel hervorzurufende Interferenzerscheinung ist die folgende: Hält man eine angeschlagene Stimmgabel vor das Ohr und dreht sie um ihren Stiel als Axe, so hört man sehr deutlich, dass ihr Ton abwechselnd stärker und schwächer wird. Man findet bei einer vollen Umdrehung der Gabel 4 Stellungen grösster Tonstärke und dazwischen 4 Stellungen, in denen der Ton gänzlich erlischt. Es erklärt sich dies daraus, dass jeder der beiden Zinken schon für sich allein einen Ton gibt, beide natürlich einen und denselben, und dass diese beiden Töne zur Interferenz kommen. Wir wissen, dass die beiden Zinken der Stimmgabel gleichzeitig nach Innen und nach Aussen schwingen. Wenn die Stimmgabel dem Ohre ihre Breitseite zuwendet, so dass beide Zinken dieselbe Entfernung und Lage zum Gehörorgan haben, so ist kein Grund vorhanden, warum die eine Zinke anders wirken sollte als die andere, und die Wirkung der beiden Zinken wird sich summiren. Dreht man die Stimmgabel um einen rechten Winkel, so dass sie dem Ohre nun ihre schmale Seite zuwendet, so üben freilich beide Zinken eine entgegengesetzte Wirkung aus, da die eine gegen das Ohr zu schwingt, während die andere sich von ihm entfernt. Da jedoch die Entfernung der beiden Zinken vom Ohre nicht dieselbe ist, so wirkt die nähere stärker auf das Ohr als die entferntere und es bleibt daher ein Ueberschuss, der noch hinreichend kräftig auf das Ohr wirkt. Dreht man die Gabel langsam weiter, so entfernt sich die stärker wirkende Zinke vom Ohre, die andere nähert sich und es kommt ein Punkt, wo die Wirkung beider Zinken gleich stark wird, aber doch entgegengesetzt bleibt, so dass sie sich gerade aufhebt. Diesen Punkt erreicht man nach einer Drehung um einen halben rechten Winkel. So haben wir also Maxima der Tonstärke in 4 um je einen rechten Winkel von einander verschiedenen Stellungen der Gabel, und in der Mitte zwischen je 2 solchen Stellungen, also in 4 Punkten, die sich von einander ebenfalls durch eine Drehung von je einem rechten Winkel unterscheiden, verschwindet der Ton gänzlich. Dass in diesen letzteren Stellungen in der That die Schwingungen der einen Zinke diejenigen der andern aufheben, lässt sich dadurch beweisen, dass man über die eine Zinke eine kleine Röhre schiebt, welche die Zinke umschliesst ohne sie zu

berühren; dann wird der Ton sofort wieder deutlich hörbar, da die Wirkung der umschlossenen Zinke nach Aussen dann geschwächt ist und nicht mehr hinreicht, um die von der freien Zinke ausgehende Wirkung zu neutralisiren.

Interferenzerscheinungen treten in Wirklichkeit sehr häufig auf, eigentlich immer dann, wenn zwei gleich hohe Töne gleichzeitig erklingen. In den meisten Fällen wird man aber dabei nichts besonders Auffallendes hören, da es immerhin ein ganz spezieller relativ selten vorkommender Fall ist, wenn die beiden Töne mit genau derselben Stärke und genau entgegengesetzter Schwingungsphase auf das Ohr einwirken. Zwischen der grösstmöglichen Verstärkung und gänzlicher Vernichtung gibt es unendlich viele Zwischenstufen, und diese werden die Regel bilden. Sonst müsste es in Wirklichkeit viel häufiger vorkommen, dass Schall durch Schall aufgehoben wird. Allerdings tritt dieser relativ seltene Fall doch da und dort auf, wo man gar nicht an eine solche Wirkung denkt. Es ist z. B. eine vielen Orgelbauern bekannte recht unliebsame Thatsache, dass zuweilen Töne des gedackten Subbass-Registers der Orgel an einzelnen Punkten im Innern der Kirche gar nicht oder schwach gehört werden, während sie wenige Schritte davon entfernt sehr kräftig zu hören sind. Hier hat man es mit einem solchen Spezialfall gänzlicher oder nahezu gänzlicher Vernichtung durch Interferenz zu thun. Der Ton kann sowohl direkt als indirekt durch Reflexion an den Wänden der Kirche zum Gehörorgane gelangen; die direkte Wellenbewegung gelangt mit der reflektirten zur Interferenz und es ist daher sehr wohl möglich, dass für ganz bestimmte Punkte im Innern der Kirche das Resultat der Interferenz eine Schwächung oder gänzliche Vernichtung des Tones ist. Man würde in einem solchen Falle sehr unrecht thun, dem Orgelbauer daraus einen Vorwurf zu machen, da die Umstände, unter denen diese unangenehme Interferenzwirkung eintritt, von der Beschaffenheit der Orgel unabhängig und in den Raumverhältnissen des Innern der Kirche begründet sind.

84. Schwebungen einfacher Töne. — Nehmen wir nun den Fall an, es erklingen gleichzeitig zwei einfache Töne, die mit einander keinen reinen Einklang bilden, sondern gegen einander etwas verstimmt seien, so dass der eine etwas höher sei als der andere. Dann tritt eine jedem Musiker bekannte Erscheinung ein, welche man mit dem Namen der Schwebungen

oder Stösse bezeichnet: der Zusammenklang wird unruhig, man hört ein regelmässiges Anschwellen und Abschwellen, das in um so kürzeren Zeitabschnitten erfolgt, je mehr die beiden Töne gegen einander verstimmt sind. Erfolgt das Anschwellen und Abschwellen nicht zu rasch, so macht dieses Auf-, und Abwogen des Tones, das „Schweben", noch keinen unangenehmen Eindruck und ist dann wenigstens erträglich. Steigert sich aber die Zahl der Anschwellungen und Abschwellungen innerhalb einer gegebenen Zeit mehr und mehr, so machen sie sich mehr als „Stösse" fühlbar und werden dann recht unangenehm.

Es ist nicht schwer, sich von der Art, wie Schwebungen zu Stande kommen, und von dem Gesetze, nach welchem ihre Zahl von der Grösse des Intervalls der beiden Töne abhängt, Rechenschaft abzulegen.

Nehmen wir an, wir haben zwei Stimmgabeln, von denen die eine z. B. 1000, die andere dagegen 1010 Schwingungen in der Sekunde mache, so dass die zweite Stimmgabel die erste in jeder Sekunde um 10 Schwingungen überhole. Zu Beginn der ersten Sekunde mögen die beiden Stimmgabeln genau in demselben Sinne wirken und es möge ein Wellenberg des einen Tones in diesem Momente genau mit einem Wellenberg des andern zusammenfallen, so dass sich die Wirkungen der zwei Gabeln dann verstärken. Dieses Wirken in gleichem Sinne dauert aber nicht lange an, die schneller schwingende Gabel überholt die langsamere in kürzester Zeit und hat schon nach $\frac{1}{10}$ Sekunde eine ganze Schwingung mehr gemacht als diese, nämlich 101 Schwingungen, während die andere nur 100 vollführt hat. Nach $\frac{2}{10}$ Sekunden hat die schneller schwingende Stimmgabel die andere um 2 Schwingungen überholt (202 und 200), nach $\frac{3}{10}$ Sekunden um 3 Schwingungen (303 und 300) u. s. w., nach $\frac{10}{10}$ Sekunden oder 1 Sekunde um 10 ganze Schwingungen (1010 und 1000). Jedesmal wenn die eine Stimmgabel der andern wieder um eine ganze Schwingung vorangeeilt ist, trifft wieder Wellenberg mit Wellenberg zusammen und tritt Verstärkung ein, in unserem Falle in der Sekunde also genau 10 mal. Wir haben also jedenfalls 10 Verstärkungen des Zusammenklanges innerhalb einer Sekunde; diese würden aber nicht so sehr auffallen, wenn nicht zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Verstärkungen eine Schwächung oder gar gänzliche Vernichtung liegen würde. So oft nämlich die eine Stimmgabel der andern nicht um eine ganze oder um 2, 3,

4, ... ganze Schwingungen vorangeeilt ist, sondern um eine halbe, oder um $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ .... Schwingungen, so trifft nicht ein Wellenberg des einen Tones mit einem Wellenberg des andern zusammen, sondern ein Wellenberg des einen mit einem Wellenthal des andern und umgekehrt. Die Wirkungen der beiden Wellenbewegungen auf das Ohr schwächen sich dann, oder heben sich bei gleicher Stärke sogar gänzlich auf. Man hat also in unserem Falle in der That ein 10 maliges Anschwellen und Abschwellen des Zusammenklanges in jeder Sekunde, d. h. 10 Schwebungen oder Stösse.

Man darf hier nicht etwa glauben, der eine Ton eile dem andern voraus in der Weise, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des einen grösser sei als die des andern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für beide Töne genau dieselbe, nur die Wellenlänge und Schwingungszahl ist verschieden; die Wellenlänge ist in demselben Maasse kleiner als die Schwingungszahl grösser ist (gemäss der Relation $\lambda \cdot z = c$). Man denke sich z. B. zwei Fussgänger, die neben einander hergehen und mit einander Schritt halten müssen, trotzdem der eine längere Schritte macht als der andere. Ist die Schrittlänge des einen z. B. 80 Centimeter und die des andern nur 72 Centimeter, so wird der zweite 10 Schritte in derselben Zeit machen müssen, in welcher der erste nur 9 macht, denn 10 Schritte des zweiten machen gerade so viel aus als 9 Schritte des ersten, nämlich 10 . 72 oder 9 . 80 Centimeter, d. h. 7,2 Meter. Haben beide Fussgänger ursprünglich sich gleichzeitig in Bewegung gesetzt und mit dem linken Fuss angetreten, so werden sie beim 9. Schritte des ersten, beim 10. des zweiten gleichzeitig den Fuss zur Erde setzen, der erste aber den linken, der zweite den rechten Fuss. Erst nach 18 Schritten des ersten und 20 Schritten des zweiten werden beide wieder mit demselben Fuss antreten wie zu Beginn der Bewegung. Auch hier hat man ein Vorauseilen des einen Fussgängers vor dem andern, was die Schrittzahl anbetrifft, die Geschwindigkeit der Fortbewegung ist aber für beide dieselbe. Ein einfacher Schritt entspricht hier einer halben Schwingungsdauer (oder einer einfachen Schwingung nach französischer Zählweise), ein Doppelschritt (altrömischer Schritt) einer ganzen Schwingungsperiode nach der von uns adoptirten Zählweise.

Bei unsern beiden Stimmgabeln von 1000 und 1010 Schwingungen entstehen also 10 Schwebungen oder Stösse in der

Sekunde, d. h. gerade so viel als der Ueberschuss der Schwingungszahl der höheren Gabel über diejenige der tieferen beträgt. Es ist einleuchtend, dass sich diese Betrachtungsweise verallgemeinern lässt und zu dem Schlusse führt, dass die Zahl der Schwebungen zweier benachbarter Töne der Differenz ihrer Schwingungszahlen gleich ist.

[Der eine Ton mache in der Sekunde n Schwingungen, der andere höhere dagegen m, und es sei $d = m - n$ die Differenz der beiden Schwingungszahlen. Coincidiren zu Beginn einer Sekunde die Schwingungen beider Töne, so hat nach $\frac{1}{d}$ Sekunde der tiefere Ton $\frac{n}{d}$ Schwingungen gemacht, der höhere dagegen $\frac{m}{d}$ oder (da $m = n + d$ ist) $\frac{n + d}{d}$, d. h. $\frac{n}{d} + 1$ Schwingungen, also eine ganze Schwingung mehr als der tiefere. Nach $\frac{1}{d}$ Sekunde hat man also wieder Coincidenz, in einer ganzen Sekunde also d Coincidenzen und d Schwebungen. Es ist also in der That allgemein die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahlen. — Die Erscheinungen der Interferenz und der Schwebungen erfolgen nach dem Prinzip der Superposition einfacher Schwingungen; sie gehen daraus als Spezialfall hervor.]

Schwebungen können für das Auge sichtbar in sehr einfacher Weise zur Darstellung gebracht werden. Schiebt man nämlich eine mit einem Schreibstift versehene Stimmgabel über eine berusste Platte, die selbst nicht ruhend, sondern an einer der Zinken einer zweiten schwingenden Stimmgabel befestigt ist, in der Weise wie es die folgende Figur darstellt, so ist die auf der berussten Platte eingezeichnete Kurve das Resultat der kombinirten Schwingungen beider Stimmgabeln. Sind die zwei Gabeln genau im Einklange, so tritt gewöhnliche Interferenz

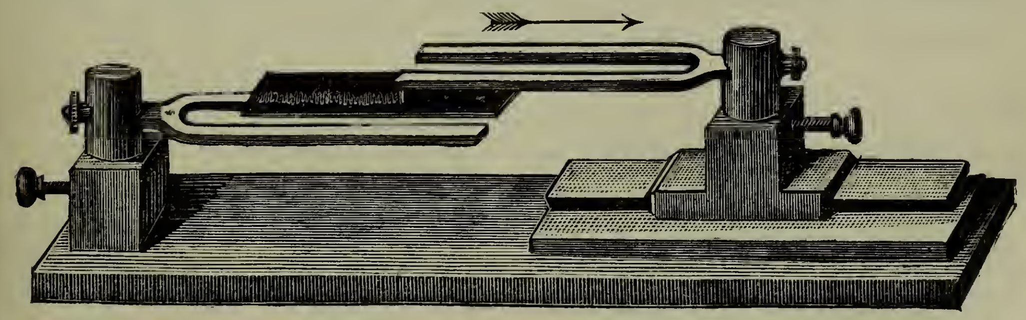


Fig. 58.

ein und es entsteht eine einfache Wellenlinie (Sinus-Kurve), deren Amplitude das Resultat dieser Interferenz ist und von der (konstanten) Phasendifferenz der beiden sich zusammensetzenden Wellenlinien abhängt, wie es unter voriger Nummer auseinandergesetzt wurde und im Anhange mathematisch abgeleitet werden wird.

Verstimmt man nun aber die eine der Gabeln dadurch, dass man an einer ihrer Zinken ein Wachsklümpchen befestigt, wodurch ihre Schwingungen verlangsamt werden, so zeigt die entstehende Kurve, wenn beide Gabeln schwingen, ein wesentlich anderes Bild, wie es in den folgenden Figuren in grösserem Maassstabe dargestellt ist:

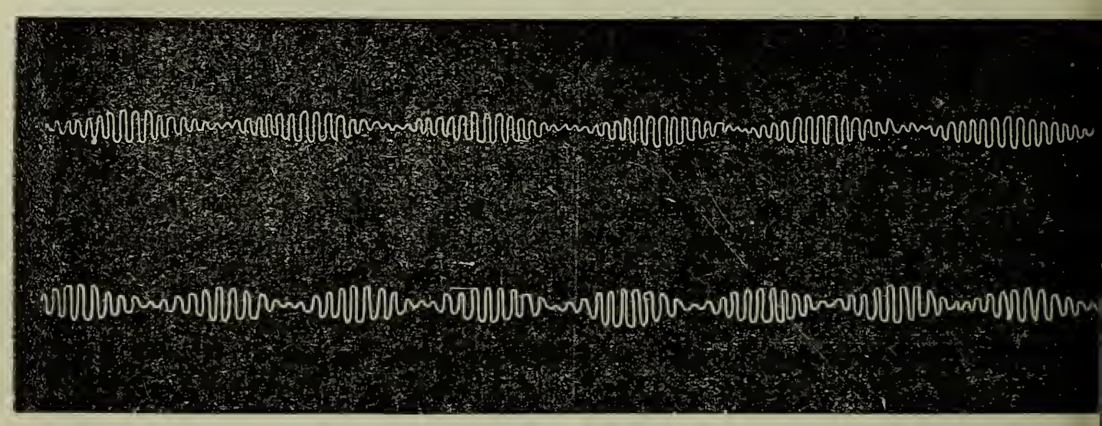
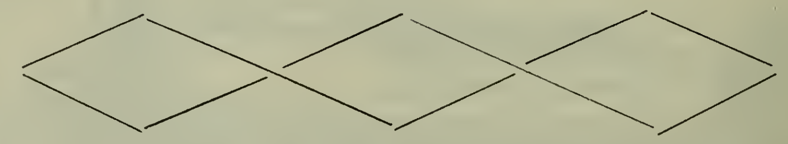


Fig. 59.

Die erste Figur entspricht dem Intervall eines grossen Halbtons ($\frac{16}{15}$), die zweite demjenigen eines grossen Ganztons ($\frac{9}{8}$).

Man sieht sehr deutlich, wie die Amplitude der resultirenden Bewegung abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, wie sich also die beiden Wellenbewegungen abwechselnd verstärken und schwächen. Die Umrisse der Figur lassen sich geradezu durch aneinandergereihte Crescendo- und Decrescendo-Zeichen skizziren:



Wie verhält sich nun das Ohr zu diesen Schwebungen? — Macht man das Intervall zweier schwebender Töne allmählich grösser, so wächst die Zahl der Schwebungen mit der Differenz der Schwingungszahlen. Kann man die Schwebungen noch be-

quem einzeln zählen und verfolgen, so ist der Eindruck noch kein unangenehmer; werden sie aber zahlreicher, so dass man sie nicht mehr leicht zu zählen, aber doch noch als getrennt zu erkennen vermag, so wird der Eindruck immer unangenehmer. Es entsteht ein intermittirender Reiz, der den Gehörnerv in ähnlich unangenehmer Weise berührt, wie ein flackerndes Licht das Auge. Die Analogie mit den Gesichtsempfindungen ist hier überhaupt eine sehr weitgehende. Wenn wir von der Sonne durch ein hohes Gitter getrennt sind und diesem Gitter entlang schreiten, so wird das Auge abwechselnd von den Sonnenstrahlen getroffen und wieder davon verschont, wenn es in den Schatten eines Gitterstabes eintritt. Beschleunigen wir unsern Schritt, so wird der intermittirende Lichtreiz immer unangenehmer, indem die Zahl der Unterbrechungen der kontinuirlichen Bestrahlung immer grösser wird. Ueber einen gewissen Punkt lässt sich aber das Unangenehme des Eindrucks nicht steigern. Fahren wir mit der Geschwindigkeit eines Kurierzuges an dem Gitter vorüber, so bemerken wir kaum eine Unterbrechung der kontinuirlichen Bestrahlung. Die einzelnen Lichteindrücke sind dann durch so kleine Pausen von einander getrennt, dass sie doch zu einem einheitlichen zusammenhängenden Ganzen verschwimmen. — Ganz ähnlich wirkt ein intermittirender Reiz auf das Gehörorgan ein. Steigert man die Zahl der Schwebungen durch Vergrösserung des Intervalls der beiden Töne, so wird der Eindruck zunächst immer unangenehmer und erreicht den Höhepunkt des Unbehagens bei 30 bis 40 Schwebungen in der Sekunde. Von da an nimmt mit steigender Zahl der Schwebungen das Unangenehme des Eindruckes allmählich wieder ab.

Indessen ist zu betonen, dass es nicht allein die Zahl der Schwebungen an und für sich ist, von welcher die Rauhigkeit eines Zusammenklanges abhängt, d. h. nicht allein die *Differenz* der Schwingungszahlen der beiden Töne, sondern auch ihr *Verhältniss*, d. h. ihr musikalisches *Intervall*.

Lassen wir z. B. gleichzeitig mit dem zweigestrichenen $\bar{\bar{c}}$ von 522 Schwingungen das um einen grossen Halbton ($\frac{16}{15}$) tiefere $\bar{h}$ erklingen, welchem 489 Schwingungen (genau 489,375) zukommen, so haben wir 33 (genau 32,625) Schwebungen in der Sekunde, die auf das Ohr einen höchst widerwärtigen Eindruck machen. Genau dieselbe Zahl von Schwebungen gibt das tiefer liegende Ganztonintervall $\bar{c} — \bar{d}$, das schon etwas

weniger rauh, aber doch noch sehr schlecht klingt (es ist nämlich $\bar{c} = 261$ und $\bar{d} = 293{,}625$). Ebenso liefern 33 Schwebungen: die kleine Terz $e — g$ ($e = 163{,}125$; $g = 195{,}75$), die grosse Terz $c — e$ ($c = 130{,}5$; $e = 163{,}125$), die Quarte $G — c$ ($G = 97{,}875$; $c = 130{,}5$) und die Quinte $C — G$ ($C = 65{,}25$; $G = 97{,}875$). Bei der nämlichen Anzahl von Schwebungen wird also nach der Tiefe zu das schwebende Intervall immer grösser, gleichzeitig nimmt aber die Intensität der Schwebungen, die Rauhigkeit des Zusammenklanges mehr und mehr ab. Bei gleicher Zahl von Schwebungen ist für engere Intervalle das Unangenehme des intermittirenden Reizes grösser als für weitere Intervalle.

Diese Thatsache erklärt sich nach der Helmholtz'schen Hypothese des Hörens in folgender Weise:

Das Ohr zerlegt die ihm zugeführte Wellenbewegung nach dem Ohm'schen Gesetze (pag. 179). Erklingt gleichzeitig ein höherer und ein tieferer Ton, so wirkt der höhere Ton auf andere Fasern des Corti'schen Organs oder der Basilarmembran ein als der tiefere, wenn beide Töne hinreichend weit aus einander liegen. Die beiden Töne werden vom Nervenapparat gesondert und gelangen getrennt zur Empfindung. Anders wird aber die Sache, wenn die beiden Töne einander immer näher rücken. Wir sahen, dass durch einen einfachen Ton nicht nur eine Faser in Mitschwingung versetzt wird, sondern in geringerem Maasse auch die beiderseitig angrenzenden Fasern, um so schwächer je weiter sie von der mit dem erregenden Tone genau im Einklang schwingenden Faser entfernt sind. Rücken die beiden Töne einander näher, so wird ein Punkt kommen, von welchem an die erregten Stellen des Nervenapparates im Gehörorgan nicht mehr örtlich völlig von einander getrennt sind, sondern sich theilweise überdecken. Von diesem Punkte an wird das Ohr anfangen, Schwebungen als solche zu empfinden. Es liegen dann nämlich zwischen den zwei Fasern, deren Eigenton genau demjenigen der beiden erregenden Töne entspricht, solche Fasern, die gleichzeitig von beiden Tönen in Mitschwingung versetzt werden, welche also die Wellenbewegung als Ganzes aufnehmen und einen intermittirenden Reiz empfangen. Je näher die beiden Töne zusammenrücken, um so zahlreicher werden die von beiden Tönen gleichzeitig erregten Fasern und um so stärker ist die Erregung. Es erklärt sich also, warum bei engen Intervallen die gleiche

Anzahl von Schwebungen unangenehmer wirkt als bei weiten. Entfernen sich die beiden Töne um weiter als eine kleine oder grosse Terz von einander, so liegen (nach Helmholtz) die beiden Erregungsstellen im Gehörorgan schon zu weit von einander entfernt, als dass Schwebungen von merklicher Stärke vom Ohr empfunden werden könnten.

Der Eindruck der Schwebungen auf den Gehörnerv hängt also wesentlich von 2 Faktoren ab: von der Differenz der Schwingungszahlen der beiden erklingenden Töne und von deren Verhältniss, oder mit anderen Worten, von der Zahl der Schwebungen und von der Grösse des schwebenden Intervalls. Je enger das Intervall, um so unangenehmer wirken (bei übrigens gleicher Anzahl) die Schwebungen. Bei gleicher Grösse mehrerer schwebender Intervalle sind die Schwebungen desjenigen Intervalles am störendsten, für welches die Differenz der Schwingungszahlen sich am meisten der Anzahl von 30 bis 40 nähert.

Die Maximalzahl von Schwebungen, welche vom Ohre noch als intermittirender Reiz empfunden werden, gibt Helmholtz auf ungefähr 132 pro Sekunde an, allerdings mit dem Zusatze: „Wahrscheinlich haben wir damit die obere Grenze noch nicht erreicht.“

Es werden demnach die Schwebungen eines Halbtonintervalls bis nahe zur oberen Grenze der musikalisch brauchbaren Tonlage noch wahrgenommen werden, die Schwebungen eines Ganztones bis in die dreigestrichene Oktave hinein, diejenigen einer kleinen und grossen Terz bis in die zweigestrichene Oktave. Grössere Intervalle als Terzen erzeugen (einfache Töne vorausgesetzt) nach Helmholtz keine Schwebungen mehr. Grosse und kleine Terzen klingen aber selbst in tieferen Lagen noch ziemlich rauh. Wie wir soeben sahen, entsprechen sowohl der kleinen Terz *e — g* als der grossen *c — e* je 33 Schwebungen, und diese mögen, trotz der Breite des Intervalls, zur Rauhigkeit noch wesentlich beitragen. Aus diesem Grunde wohl pflegt man in tieferen Tonlagen Terzen zu vermeiden und Akkorde nicht in sog. enger Lage anzuwenden.

Schwebungen werden zuweilen als musikalisches Ausdrucksmittel mit Absicht verwandt. Langsame Schwebungen vermögen allerdings durch das periodische Auf- und Abwogen einem starren Tone Leben zu verleihen und einen gewissen zitternden bewegten Ausdruck hervorzubringen. Die unter dem

Namen „Unda maris“ und „Vox coelestis“ bekannten Stimmen der Orgel sind Zinnregister, bei welchen Schwebungen dadurch erzeugt werden, dass bei jedem Tastendrucke gleichzeitig 2 Pfeifen erklingen, von denen die eine ganz wenig höher gestimmt ist als die andere. Natürlich darf die absichtliche Verstimmung nur eine äusserst geringe sein. Da ein und dasselbe Intervall bei der Verlegung in die nächst höhere Oktave die doppelte Anzahl von Schwebungen gibt und überhaupt von Oktave zu Oktave die Zahl der Schwebungen desselben Intervalls sich verdoppelt, so macht sich eine geringe Verstimmung in höheren Tonlagen schon leicht bemerkbar durch eine grössere Zahl von Schwebungen, welche unangenehm berühren kann. Es muss also bei Abstimmung eines solchen Registers mit grosser Sachkenntniss vorgegangen werden und die Anwendung des Registers darf nur mit Vorsicht und Geschmack geschehen, wenn sie nicht unangenehm wirken soll.

Eine ähnliche Wirkung wie die Schwebungen bringt das sog. Tremoliren der Sänger und der Spieler von Streichinstrumenten hervor. Begrifflich ist das Tremoliren allerdings vom Schweben verschieden; denn bei Schwebungen haben wir es stets mit mindestens zwei Tönen zu thun, während der Sänger und Geiger auf einem Tone tremolirt. Das Tremoliren besteht theils in einer geringen periodischen Schwankung der Tonhöhe, theils in einer periodischen Unterbrechung oder Schwächung des Tonflusses, in sog. Intermittenzen. Die Wirkung auf das Gehörorgan ist aber im Wesentlichen dieselbe. Das Tremoliren kann ausnahmsweise bei gewissen Stellen von guter Wirkung sein, wenn es mit Geschmack angewandt wird. Es kann aber sehr leicht zur abscheulichen Unart werden und das Ohr ebenso verletzen, wie ein unruhig flackerndes Licht das Auge.

Intermittenzen entstehen stets dann, wenn ein Ton in sehr kleinen Zeitintervallen periodisch unterbrochen wird, oder der Weg zum Gehörorgan abwechselnd geöffnet und gesperrt wird. Im Grunde genommen muss schon ein Ton an und für sich einen intermittirenden Reiz auf den Gehörnerv ausüben. Beim Kontra-*C* von 33 Schwingungen erfolgen in der Sekunde 33 Impulse auf den Nervenapparat, und in der That machen so tiefe Töne noch einen etwas rauhen Eindruck, während mit steigender Schwingungszahl das Kontinuirliche der Empfindung mehr und mehr zunimmt.

Mit Hülfe der Schwebungen kann die absolute Schwingungszahl eines Tones auf indirektem Wege ermittelt werden. Kennt man nämlich das musikalische Intervall zweier Töne und kann man die Schwebungen dieses Intervalls zählen, so kennt man einerseits das Verhältniss, andrerseits die Differenz der Schwingungszahlen der beiden Töne, und daraus lassen sich nach elementaren algebraischen Regeln die Schwingungszahlen selbst berechnen (Sauveur 1700). Scheibler stellte (1834) ein sog. Tonometer her, eine ganze Reihe von Stimmgabeln, von denen jede genau 4 Schwingungen in der Sekunde mehr machte als die nächst vorhergehende. Die Schwingungszahl der tiefsten Stimmgabel und damit zugleich diejenige aller andern war bekannt. Sollte mittels des Tonometers die Schwingungszahl irgend eines Tones gemessen werden, so brauchte man nur zu zählen, wie viele Schwebungen in der Sekunde dieser Ton mit der seiner Höhe am nächsten kommenden Stimmgabel machte. Daraus ergab sich unmittelbar die gesuchte Schwingungszahl.

Die Schwebungen bieten ein bequemes Mittel dar, um die Existenz schwacher Töne, die das Ohr leicht überhört, nachzuweisen. Einen gleichmässigen schwachen Ton überhört man leicht, während er sofort bemerkbar wird, wenn seine Intensität schwankt. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur eine angeschlagene Stimmgabel vor dem Ohre nahezu ausklingen zu lassen. Wenn man den Ton kaum mehr hört, wird man sofort auf seine Existenz aufmerksam gemacht, sobald man die Gabel vor dem Ohre um ihren Stiel dreht. —

85. Schwebungen von Klängen. Helmholtz'sche Theorie der Consonanz und Dissonanz. Klangverwandtschaft. — Wir haben soeben gesehen, dass Schwebungen einfacher Töne wahrnehmbar sind vom geringsten Grade der Verstimmung zweier im Einklang befindlicher Töne an bis ungefähr zum Intervall einer kleinen oder grossen Terz hin. Lässt man, wie es Helmholtz thut, Schwebungen als Ursache der Dissonanz gelten, so ist damit erklärt, dass alle Intervalle zwischen dem vollen Einklange und der kleinen Terz, also besonders die kleine und die grosse Sekunde dissonant sind.

Nun sind aber einerseits auch Schwebungen weit grösserer Intervalle, wie z. B. der Septimen und verstimmten Oktaven zu konstatiren, und andrerseits auch andere Intervalle als kleine und grosse Sekunden oder verstimmte Einklänge musikalisch

dissonant. Eine vollständige Erklärung der Dissonanz wäre also nach unseren bisherigen Betrachtungen noch nicht gewonnen. Es ist jedoch daran zu erinnern, dass wir bisher stets von dem Zusammenklange zweier einfacher Töne und den daraus entstehenden Schwebungen sprachen.

Lassen wir nun aber zwei Klänge, musikalische Töne, von denen jeder eine grössere oder geringere Anzahl von Partialtönen enthält, gleichzeitig erklingen, so ist viel mehr Gelegenheit zur Entstehung von Schwebungen geboten, da nicht nur die Grundtöne, sondern auch die Partialtöne der beiden Klänge unter sich Schwebungen bilden können, wenn sie einander nur hinreichend nahe liegen.

Haben wir z. B. zwei offene Prinzipalpfeifen der Orgel, die zunächst genau im Einklang gestimmt seien und deren Grundtöne z. B. 100 Schwingungen machen, so fallen auch alle Obertöne der beiden Pfeifen genau zusammen. Dem zweiten Partialton entsprechen bei beiden Pfeifen 200, dem dritten 300, dem vierten 400 Schwingungen u. s. w. Verstimmen wir nun die eine Pfeife um eine Schwingung (101 statt 100), so geben die beiden Grundtöne eine Schwebung (101—100) in der Sekunde, die zweiten Partialtöne unter einander gleichzeitig deren zwei (202—200), die dritten deren drei (303—300) u. s. w. Es gibt also die Störung des Einklanges in diesem Falle zu weit mehr Schwebungen Anlass, als bei einfachen Tönen, wo allein die Grundtöne schweben. Die gemeinsamen Partialtöne bilden bei völliger Uebereinstimmung eine Art von Bindemittel, zugleich aber auch ein scharfes Abgrenzungsmittel gegen Verstimmung.

Der Einklang ist die vollkommenste und am schärfsten abgegrenzte Consonanz.

Lassen wir zu einem musikalischen Tone von 100 Schwingungen, dessen Obertönen also die Zahlen 200, 300, 400, 500, 600, u. s. f. zukommen, die höhere Oktave erklingen, so verstärkt diese einfach die geradzahligen Partialtöne des ersten Klanges:

Grundklang:	100,	200,	300,	400,	500,	600,	. . . .
Oktave:		200,		400,		600,	. . . .

Die relativen Schwingungszahlen der Partialtöne eines beliebigen Klanges sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., diejenigen eines um eine Oktave höheren Klanges 2, 4, 6, 8, ...
Die hinzutretende Oktave bringt also keinen Ton mit, der nicht

schon im ersten Klange enthalten war. Es werden bei vollkommener Reinheit nur die Partialtöne geraden Ranges verstärkt, es tritt Verschmelzung mit Aenderung der Klangfarbe ein; der Klang wird heller. Aber auch hier muss sich die geringste Abweichung von der Reinheit durch Schwebungen der gemeinsamen Partialtöne verrathen.

Ganz ähnlich verhält sich die Sache, wenn zu irgend einem Klange dessen Duodecime oder dessen zweithöhere Oktave gefügt wird. Sind die rel. Schwingungszahlen des Grundklanges und seiner Obertöne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . , so sind sie für die höhere Duodecime 3, 6, 9, 12, . . . , für die zweithöhere Oktave 4, 8, 12, u. s. w. In keinem dieser Fälle bringt der hinzutretende höhere Klang irgend welche Partialtöne mit, welche dem ersten Klange fremd sind. Es ist also bei vollkommener Reinheit des Intervalles keine Möglichkeit zu irgend welchen Schwebungen da, während auf der andern Seite schon eine geringe Verstimmung Anlass zu Schwebungen der gemeinsamen Obertöne gibt.

Genau dasselbe gilt stets dann, wenn der Grundton irgend eines Klanges mit einem Partialton eines andern Klanges übereinstimmt. Solche Klänge fliessen gleichmässig ohne Schwebungen dahin, vorausgesetzt, dass die höheren Partialtöne, vom 7ten oder 8ten an, nur schwach oder gar nicht vorhanden sind. Ist diese letzte Bedingung nicht erfüllt, so ist schon ein einzelner Klang nicht frei von Schwebungen. Der 8te und 9te Partialton geben zusammen schon das Intervall eines grossen Ganztones ($\frac{9}{8}$) und dieses kann sehr merkbar schweben, wenn es nicht in sehr hohen Tonlagen liegt, wo die Schwebungen wegen ihrer zu grossen Zahl nicht mehr als solche empfunden werden. Die Partialtöne höheren Ranges bilden mit einander noch kleinere schwebende Intervalle. Daraus erklärt es sich, dass die an höheren Obertönen reichen Klänge eines kräftig angeblasenen Blechblasinstrumentes an und für sich, ohne Hinzutreten eines zweiten Klanges, rauh und durchdringend klingen können. Es kann also, so widersprechend es klingt, unter Umständen schon die Consonanz eines einzigen Klanges in Frage gestellt werden. Wir sehen uns gezwungen, ungefähr beim 7ten Partialton eine Grenze zu ziehen und die eben aufgestellte Behauptung dahin einzuschränken, dass ein Klang mit einem zweiten Klange dann zu einem schwebungsfreien Ganzen verschmilzt, wenn der Grundton des einen Klanges genau mit

einem der 6 ersten Partialtöne des andern Klanges übereinstimmt. Da bei den musikalisch brauchbaren Klangfarben gerade die 6 ersten Partialtöne von Wichtigkeit sind und die höheren meist nur schwach oder gar nicht auftreten, so ist diese Grenze in der Regel schon von selbst gezogen.

Die Intervalle der Oktave, Duodecime und Doppeloktave nennt Helmholtz, da sie völlig frei von Schwebungen sind, absolute Consonanzen.

Gehen wir nun zu den innerhalb des Umfangs einer Oktave liegenden Intervallen über. — Für die Quinte ist das charakteristische Schwingungsverhältniss des tieferen Tones zum höheren dasjenige von 2 zu 3. Macht der Grundton 2 Schwingungen, so macht die höhere Quinte in derselben Zeit 3. Nehmen wir also zwei um eine Quinte von einander entfernte Klänge nebst ihren Partialtönen, so haben wir das Schema

Grundklang:	2		4	6	8		10	12
Höhere Quinte:		3		6		9		12

Der dritte und 6te Partialton des Grundklanges fallen resp. mit dem 2ten und 4ten der Quinte zusammen, diese bilden das verbindende Glied. Dazwischen gibt es aber andere nicht zusammenfallende Partialtöne, welche, wenn sie hinreichend stark vorhanden sind, Schwebungen verursachen können: die Partialtöne 8, 9 und 10. Die Quinte steht also hinter den absoluten Consonanzen, was ruhiges schwebungsfreies Dahinfliessen anbetrifft, merklich zurück. Immerhin überwiegt die bindende Kraft der gemeinsamen Partialtöne.

Für die Quarte mit dem Schwingungsverhältniss 3 : 4 erhält man die folgende Uebersicht:

Grundklang:	3		6		9	12	15		18
Höhere Quarte:		4		8		12		16	

Hier fällt der 4te Partialton des Grundklanges (12) mit dem dritten der höheren Quarte zusammen. Der erste zusammenfallende Partialton ist also schon um ein Glied weiter verschoben als bei der Quinte, die bindende Kraft also schon etwas geringer als bei dieser, da die Stärke der Partialtöne in der Regel mit steigender Ordnungszahl rasch abnimmt. Schwebungen können verursacht werden durch folgende Paare von Partialtönen: 8, 9; 15, 16; 16, 18. Die Quarte ist um einen Grad

weniger consonant als die Quinte, sie hat aber die in musikalischer Hinsicht ungemein wichtige Eigenschaft, dass sie die Ergänzung der Quinte zur Oktave bildet. Quinte und Quarte werden desshalb auf eine und dieselbe Stufe gestellt und von Helmholtz als vollkommene Consonanzen bezeichnet.

Ganz ähnliche Schemata lassen sich für die Terzen und Sexten aufstellen. Für die grosse Sexte 3 : 5 fällt der 5te Partialton des Grundklanges mit dem dritten des höheren zusammen (3 . 5 = 5 . 3 = 15), für die grosse Terz 4 : 5 der 5te des tieferen mit dem 4ten des höheren (4 . 5 = 5 . 4 = 20), für die kleine Terz 5 : 6 der 6te mit dem 5ten (5 . 6 = 6 . 5 = 30) und für die kleine Sexte 5 : 8 der 8te mit dem 5ten (5 . 8 = 8 . 5 = 40). Dazwischen gibt es immer Paare von Partialtönen, welche mit einander Schwebungen bilden können. Statt durch Worte und Zahlen lassen sich diese Verhältnisse übersichtlicher in Noten ausdrücken. Wir nehmen als Grundklang beispielsweise das kleine *c* mit den 7 ersten Partialtönen bis zur Naturseptime $\bar{\bar{b}}$ ($\bar{\imath}$), wobei stets im Auge zu behalten ist, dass bei guten Klangfarben die Stärke der höheren Partialtöne im Verhältniss zu derjenigen des Grundtones sehr gering ist. Neben den Grundklang stellen wir den mit ihm gleichzeitig erklingenden höheren Klang nebst seinen Partialtönen. Die Grundtöne sind durch ganze, die Obertöne durch Viertelnoten dargestellt. Man ersieht deutlich, welche Partialtonpaare mit einander im Einklang sind, und welche Anlass zu Schwebungen geben können. Erstere Paare sind durch Bogen mit einander verbunden.



2 : 3 Quinte. 3 : 4 Quarte. 3 : 5 Gr. Sexte. 4 : 5 Gr. Terz. 5 : 6 Kl. Terz. 5 : 8 Kl. Sexte. 2 : 5 Gr. Decime.

Das hohe b bedeutet überall die Naturseptime, ausgenommen da, wo es mit einem × bezeichnet ist (bei der kl. Terz).

Diese Uebersicht bedarf keiner Erläuterung. Sie redet eine Sprache, die sich der Leser selbst deuten mag.

Je komplizirter das Zahlenverhältniss der beiden Klänge,

um so höher rückt der gemeinsame Partialton, um so schwächer wird das Band, welches sie zusammenkettet.

Auf der Uebereinstimmung gemeinsamer Partialtöne und der Abwesenheit von Schwebungen baut Helmholtz den Begriff der Consonanz auf.

Das ruhige Dahinfliessen einer Klangmasse ohne störende Schwebungen heisst Consonanz, das durch merkbare Schwebungen gestörte Abfliessen Dissonanz.

Dissonant sind also vor Allem ausser dem gestörten Einklange (kleine und grosse Sekunde) die der Oktave benachbarten Intervalle: grosse und kleine Septimen und Nonen; denn Septimen und Nonen bilden mit dem zweiten Partialton des Grundklanges, mit der Oktave, störende Schwebungen.

Consonant in grösserem oder geringerem Grade sind die oben aufgeführten Intervalle, deren Klänge sich durch die Gemeinsamkeit wenigstens eines Partialtones nicht zu hoher Ordnung auszeichnen. Je stärker der gemeinsame Partialton, um so besser ist der Zusammenklang und um so schärfer ist das Intervall gegen Verstimmung abgegrenzt durch die Schwebungen des gestörten Einklanges der zusammenfallenden Obertöne.

Helmholtz theilt die Consonanzen in folgende Gruppen ein:

1. Absolute Consonanzen: Einklang, Oktave, Duodecime, Doppeloktave.
2. Vollkommene Consonanzen: Quinte und Quarte.
3. Mittlere Consonanzen: Grosse Sexte und grosse Terz.
4. Unvollkommene Consonanzen: Kleine Terz und kleine Sexte.

Von Intervallen, die grösser als eine und kleiner als zwei Oktaven sind, sind ausser der Duodecime noch zu nennen: Die grosse Decime 2 : 5 als Erweiterung der grossen Terz, nach Helmholtz vollkommener consonirend als diese; ferner die Undecime 3 : 8, die grosse und kleine Tredecime 3 : 10, resp. 5 : 16 und die kleine Decime 5 : 12, welche alle als weniger consonant gelten als die entsprechenden um eine Oktave kleineren Intervalle.

Die natürliche Septime 4 : 7 und die aus ihr ableitbaren Intervalle bilden den Uebergang zu den Dissonanzen. Die natürliche Septime selbst ist noch ziemlich wohllautend; ihre Umkehrung, das Intervall 7 : 8, ist aber schon zu eng, um frei von Schwebungen zu sein.

Die Schwebungen bilden ein den Organisten und Orgelbauern längst bekanntes Mittel, um consonante Intervalle rein

einzustimmen. Am leichtesten ist die Oktave rein einzustimmen, sodann die Quinte und in dritter Linie die grosse Terz. Man stimmt so lange, bis man keine langsamen Schwebungen mehr hört. Aus Oktave, Quinte und grosser Terz lassen sich aber alle andern Intervalle ableiten. Soll gleichschwebend temperirt gestimmt werden, so darf natürlich nur bei Oktaven Schwebungsfreiheit angestrebt werden; alle andern Intervalle müssen eine bestimmte grössere oder geringere Zahl von Schwebungen erhalten, was im Grunde schwerer zu erreichen ist als vollkommene Reinheit. —

Auf die Uebereinstimmung gemeinsamer Partialtöne stützt Helmholtz den Begriff der Klangverwandtschaft.

Klangverwandt im ersten Grade sind zwei Klänge dann, wenn ihnen wenigstens ein Partialton gemeinsam ist. — Klangverwandt im ersten Grade mit *c* sind also, abgesehen von der Oktave, Duodecime und Doppeloktave, offenbar gerade diejenigen Klänge, welche mit *c* die soeben als consonant bezeichneten Intervalle bilden: Quinte, Quarte, grosse Sexte, grosse Terz, kleine Terz, kleine Sexte. Gruppiren wir diese in bekannter Weise um *c* herum, so haben wir die Gruppe:

a *e*
f *c* *g*
as *es*

Die innerhalb des Umfanges einer Oktave liegenden Klangverwandten ersten Grades von *c* gruppiren sich also um *c* herum in symmetrischer Weise. Auf Versetzungen des einen oder des andern Tones um eine oder mehrere Oktaven kommt es nicht an, die Klangverwandtschaft ersten Grades bleibt bestehen. Indessen muss doch eine Grenze gezogen werden. Die Gemeinsamkeit von Partialtönen, welche den Zahlen 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17 u. s. f. entsprechen, welche also nicht durch Versetzung eines der 6 ersten Partialtöne in höhere Oktaven erhalten werden können, wird nicht mehr als Verwandtschaft ersten Grades anerkannt. Dagegen erhält man eine Verwandtschaft zweiten Grades, wenn zwei Klänge mit einem und demselben dritten Klange klangverwandt im ersten Grade sind.

So ist z. B. *c* mit *d* nicht im ersten Grade verwandt, wohl aber im zweiten Grade durch Vermittlung von *g*. Es ist nämlich sowohl *c* als *d* mit *g* im ersten Grade verwandt, und zwar speziell quintverwandt: *c* —— *g* —— *d*; *g* ist das bindende Mittelglied zwischen *c* und *d*.

Ebenso sind *c* und *h* im zweiten Grade mit einander verwandt durch Vermittlung von *g*: *c* —— *g* —— *h*; ferner *c* mit *b* ebenfalls durch Vermittlung von *g*: *c* —— *g* —— *b*.

Fügen wir zur obenstehenden Gruppe die drei neugewonnenen Verwandten zweiten Grades *d*, *h*, *b* hinzu, so erhalten wir genau die Eitz'sche „tonale Gruppe“:

	a		*e*		*h*	
f		*c*		*g*		*d*
	as		*es*		*b*	

und ein einziger Blick auf diese Gruppe genügt, um die Möglichkeit zu erkennen, alle nach harmonischem Prinzip gebauten Tonleitern mit Hülfe des Begriffs der Klangverwandtschaft aus Verwandten ersten und zweiten Grades abzuleiten. — Die auf der Gemeinsamkeit von Partialtönen beruhende Klangverwandtschaft zweier Klänge verleiht denselben eine gewisse Aehnlichkeit, kraft deren wir (nach Helmholtz) ihr consonantes Verhältniss auch dann anerkennen, wenn sie nicht gleichzeitig erklingen, also auch bei melodischer Folge. —

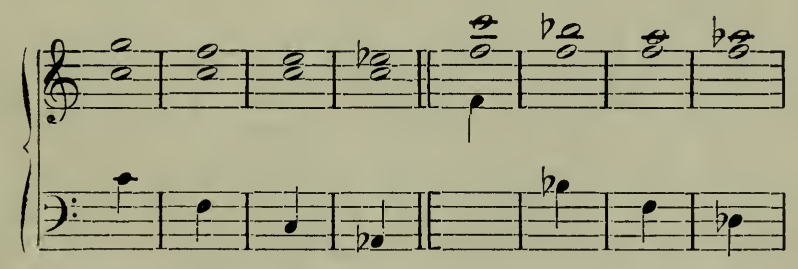
Es wäre am Platze, unter den Verwandten ersten Grades noch eine graduelle Abstufung zu machen und die Quinten- (resp. Quarten-) Verwandtschaft der Terzen- (resp. Sexten-) Verwandtschaft gegenüberzustellen. Die Quintenverwandtschaft ist eine engere als die Terzenverwandtschaft. Der erste Abschnitt hat uns gezeigt, dass die Quintenverwandtschaft zu allen Zeiten und bei allen Stimmungssystemen anerkannt war und in der Melodik sowohl wie in der Harmonik unbestritten ist, während die Terzenverwandtschaft loser ist und in der Melodik zuweilen selbst einer indirekten Quintenverwandtschaft weichen muss.

86. Combinationstöne. Differenz- und Summationstöne. — Eine Erscheinung von hohem wissenschaftlichem und praktischem Interesse sind die sog. Combinationstöne.

Schon gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts machte der deutsche Organist Sorge („Vorgemach musikalischer Composition“ 1740) darauf aufmerksam, dass bei gleichzeitigem kräftigem Erklingen zweier Orgeltöne ein dritter schwächerer Ton in der Tiefe mitklingt. Ist das Intervall der beiden Töne eine Quinte, z. B. $\bar{\bar{c}}$ — $\bar{\bar{g}}$, so hört man deutlich das eingestrichene $\bar{c}$, die

tiefere Oktave des Grundtones mitklingen. Ist das Intervall eine Quarte, z. B. $\bar{\bar{c}}$ — $\bar{\bar{f}}$, so hört man in der Tiefe das kleine *f* als zweittiefere Oktave des höheren Tones $\bar{\bar{f}}$. Die grosse Terz $\bar{\bar{c}}$ — $\bar{\bar{e}}$ gibt als tieferen Combinationston das kleine *c*, die kleine Terz $\bar{\bar{c}}$ — $\overline{\overline{es}}$ das grosse *As*. — Nicht allein auf der Orgel, sondern z. B. auf jedem Streichinstrumente kann man diese Thatsache leicht konstatiren. Bei der Violine sind diese tieferen mitklingenden Töne mit ausserordentlicher Deutlichkeit wahrzunehmen, wenn die genannten Intervalle kräftig und rein gespielt werden, um so deutlicher, je höher die Tonlage des betreffenden Intervalls ist. Diese Töne bieten dem Geiger sogar ein sehr bequemes Mittel dar, um zu kontroliren, ob ein Intervall harmonisch vollkommen rein ist oder nicht. Dieses Kontrolmittel ist zwar für die vollkommeneren Stufen der Consonanz, für Quinten und Quarten, kaum nothwendig, da das Ohr, ohne auf die Begleiterscheinungen zu achten, für die Quintenverwandtschaft einen recht hohen Grad von Empfindlichkeit hat. Bei der grossen und kleinen Terz dagegen bietet der mitklingende tiefere Combinationston ein werthvolles Hülfsmittel um festzustellen, ob das betreffende Intervall harmonisch rein ist oder nicht, d. h. ob es den einfachen Zahlenverhältnissen $\frac{5}{4}$, resp. $\frac{6}{5}$ entspricht oder andern weniger einfachen Verhältnissen. Eine sehr geringe Verstimmung des Intervalls genügt schon, um eine beträchtliche Verschiebung des Combinationstons herbeizuführen.

Stellen wir das Gesagte in Noten dar und bezeichnen wir die beiden direkt angegebenen sog. primären Töne mit ganzen Noten, den tieferen mitklingenden Combinationston mit Viertelnoten, so haben wir die folgende Uebersicht:



Jeder Geiger, der die oben angegebenen Intervalle rein und kräftig spielt, wird die in Viertelnoten angegebenen tieferen Töne sehr deutlich hören. Nächst dem Organisten Sorge war es denn auch ein Geiger, der berühmte Tartini (1692—1770),

der auf diese Töne aufmerksam wurde und aufmerksam machte. Nach ihm werden sie auch häufig Tartini'sche Töne genannt. —

Suchen wir zunächst nach dem Gesetze, welches einen solchen Tartini'schen Ton mit den beiden primären Tönen verbindet, so ergibt sich in erster Linie, dass der mitklingende tiefere Ton um so mehr sinkt, je enger (bei festgehaltenem Grundton) das Intervall der zwei primären Töne wird. Wir erkennen ferner einen gewissen harmonischen Zusammenhang zwischen den primären Tönen und dem mitklingenden Tone. Die ersteren stehen zu letzterem in dem Verhältniss von harmonischen Obertönen zu ihrem Grundton. Betrachten wir mit Rücksicht hierauf die obenstehenden Beispiele näher, so finden wir in der That, dass für das Intervall der Quinte die beiden primären Töne den 2ten und 3ten Partialton des tiefen Combinationstones repräsentiren (2 : 3), d. h. dieser tiefe Combinationston würde, wenn er als Klang existiren würde, die beiden primären Töne als 2. und 3. Partialton enthalten. In demselben Sinne kann man sagen, dass bei der Quarte die zwei primären Töne als 3. und 4. Partialton des tiefen Combinationstones aufgefasst werden können (3 : 4), bei der grossen Terz als 4. und 5. Partialton (4 : 5) und bei der kleinen Terz als 5. und 6. Partialton (5 : 6). Die Quinte $\bar{\bar{c}}$—$\bar{\bar{g}}$ im obigen Beispiele erscheint also als $\bar{c}$-Klang mit verstärktem 2. und 3. Partialton, die Quarte $\bar{\bar{c}}$—*f* dagegen als *f*-Klang mit verstärktem 3. und 4. Partialton, die grosse Terz $\bar{\bar{c}}$—$\bar{\bar{e}}$ wieder als *c*-Klang mit verstärktem 4. und 5. und die kleine Terz endlich als *As*-Klang mit verstärktem 5. und 6. Partialton. Während in diesem Beispiele Quinte und grosse Terz einem *c*-Klange angehören und in uns das Gefühl von *c*-dur erwecken, weisen Quarte und kleine Terz durch ihren tieferen Combinationston auf fremde Tonarten hin, die Quarte $\bar{\bar{c}}$—$\bar{\bar{f}}$ nach *f*-dur und die kleine Terz $\bar{\bar{c}}$—$\overline{\overline{es}}$ nach *as*-dur. Der Quarte und der kleinen Terz muss also ein gewisser modulatorischer Zug zuerkannt werden. Diese Thatsache wirft auf zwei Punkte ein bemerkenswerthes Streiflicht: einerseits auf die Jahrhunderte alte musiktheoretische Streitfrage, ob die Quarte als Dissonanz zu behandeln und aufzulösen sei oder nicht, ein Streit, der sich daraus erklärt, dass die Gegner der Consonanz sich auf den Standpunkt derjenigen Tonart stellten, die dem tieferen Tone des Quartenintervalls entspricht (bei der Quarte *c*—*f* also auf den Standpunkt von *c*-dur), während die Freunde der Consonanz den Standpunkt einnahmen, dass der Wohlklang der

Quarte entweder isolirt oder nur von derjenigen Tonart aus zu beurtheilen sei, auf welche ihr höherer Ton hinweist (bei *c—f* also *f*-dur). Der andere Punkt, auf welchen der eben erwähnte modulatorische Zug der reinen kleinen Terz hinweist, ist der, dass die harmonisch reine Mollterz (*c—es*) vom Standpunkte ihres tieferen Tones (*c*) aus betrachtet, nicht als selbständiges charakteristisches Intervall erscheint, sondern entschieden nach einer verwandten Durtonart (*as*-dur) hinweist, zu deren Tonika-Dreiklang die kleine Terz als sekundär sich ergebendes Intervall (zwischen gr. Terz *c* und Quinte *es* des Dreiklanges *as c es*) gehört. (Siehe oben unter N. 53.) —

Ueberblicken wir in unseren Beispielen nochmals den Zusammenhang zwischen den primären Tönen und dem tiefen Combinationston, so erkennen wir leicht, dass die Schwingungszahl des letzteren genau der Differenz der Schwingungszahlen der beiden primären Töne gleich ist. Es bedarf durchaus keiner weitschweifigen Rechnung, um dies zu zeigen. Beziehen wir die Tonhöhen oder rel. Schwingungszahlen in obenstehenden Beispielen stets auf den Combinationston als den tiefsten Ton, setzen wir also die Schwingungszahl des letzteren stets gleich 1, so haben wir:

	Combin.-Ton	Primäre Töne				
für die Quinte:	1	2	3			
für die Quarte:	1	.	3	4		
für die grosse Terz:	1	.	.	4	5	
für die kl. Terz:	1	.	.	.	5	6

In allen 4 Fällen ergibt sich die rel. Schwingungszahl 1 des Combinationstones als Differenz der rel. Schwingungszahlen der beiden primären Töne: $3—2 = 1$; $4—3 = 1$; $5—4 = 1$; $6—5 = 1$. Was von den relativen Schwingungszahlen gilt, ist natürlich auch für die absoluten gültig. Zwei primäre Töne von 300 und 450 Schwingungen geben als Combinationston einen Ton von 150 Schwingungen, primäre Töne von 300 und 400 Schwingungen einen solchen von 100 Schwingungen u. s. w. Man nennt aus diesem Grunde diese tieferen, Sorge-Tartini'schen Combinationstöne, die ohne unsere bewusste Absicht entstehen, kurzweg Differenztöne.

Die Differenztöne befolgen also dasselbe Zahlengesetz wie die Schwebungen; sowohl die Zahl der letzteren als die Schwingungszahl der Differenztöne stimmt genau mit der Differenz

der Schwingungszahlen der beiden primären Töne überein. Es lag daher nahe, zwischen Schwebungen und Differenztönen einen innigen Zusammenhang zu vermuthen und anzunehmen, dass Schwebungen dann in Differenztöne übergehen, wenn ihre Zahl nur hinreichend gross wird, um als Ton empfunden werden zu können. Dieser von dem englischen Physiker Thomas Young (1773—1829) aufgestellten sehr plausiblen Erklärung der Differenztöne stehen jedoch gewichtige Bedenken gegenüber. Erstens ist von Differenztönen nur bei erheblicher Stärke der primären Töne etwas zu hören, während Schwebungen schon bei ganz schwachen Tönen zu bemerken sind. Sodann müsste schon von 30 bis 40 Schwebungen pro Sekunde an der charakteristische Eindruck der Schwebungen, als einer intermittirenden Empfindung, allmählich in den kontinuirlichen eines Tones übergehen, während doch Schwebungen bis mindestens zur Zahl von 132 pro Sekunde noch ihren Charakter als den einer diskontinuirlichen Empfindung beibehalten. Ferner lassen sich in vielen Fällen Differenztöne als objektiv ausserhalb des Ohres existirend, durch ihre entsprechende objektive Wellenbewegung nachweisen, während Schwebungen erst durch die Thätigkeit des Nervenapparates des Ohres sich in Differenztöne umwandeln würden. Endlich steht die Young'sche Erklärung mit dem durch die Erfahrung sonst ausnahmslos bestätigten Ohm'schen Gesetze in Widerspruch, wonach das Ohr nur sog. pendelartige Schwingungen als einfache Töne empfindet.

Die Unzulänglichkeit der Young'schen Erklärung bewog Helmholtz dazu, nach einer andern bessern Erklärung zu suchen. Der Umstand, dass nur bei grosser Stärke der primären Töne Differenztöne auftreten, liess Helmholtz vermuthen, dass die elementaren elastischen Kräfte, ohne deren Wirkung überhaupt keine schwingende Bewegung zu Stande kommen würde, bei grösserer Schwingungsamplitude ein komplizirteres Kraftgesetz befolgen als bei sehr geringer. Unter Annahme eines solchen komplizirteren Gesetzes, für welches das Prinzip der Superposition einfacher Schwingungen nicht mehr streng gültig ist, gelangte Helmholtz auf rein mathematisch-analytischem Wege zu Ausdrücken, die nicht nur das Entstehen von Differenztönen erklärten, sondern auf die Möglichkeit der Entstehung einer zweiten Art von Combinationstönen, der sog. Summationstöne aufmerksam machten. Helmholtz publizirte seine diesbezüglichen Untersuchungen im Jahre 1856 (in Poggendorff's

Annalen der Physik Bd. 99, auszugsweise in Beilage XII der „Tonempfindungen“ mitgetheilt). Nach Helmholtz besteht der fundamentale Unterschied zwischen Combinationstönen und Schwebungen darin, dass bei den Combinationstönen die Addition der Schwingungen objektive Störungen herbeiführt, die jedoch vom Ohr nach dem Ohm'schen Gesetze in einfache Töne zerlegt werden, während bei den Schwebungen die Schwingungen selbst dem einfachen Gesetze gehorchen und die Störung erst im Ohre bei der Addition der Empfindungen stattfindet.

Die auf mathematischem Wege theoretisch abgeleiteten Summationstöne müssen, wie der Name sagt, der Summe der Schwingungszahlen der primären Töne entsprechen. Für die Helmholtz'sche Theorie musste es von entscheidender Wichtigkeit sein, ob diese Summationstöne auch in Wirklichkeit experimentell nachweisbar seien oder nicht. In der That gelang es ohne Mühe, mit Hülfe passend abgestimmter Resonatoren die Existenz der theoretisch berechneten Summationstöne zu beweisen. Für die Richtigkeit der Helmholtz'schen Theorie war dies eine mächtige Stütze, für die ältere Young'sche Theorie dagegen ein vernichtender Schlag.

Dass sowohl den Differenztönen als den Summationstönen in vielen Fällen eine objektive Existenz zukommt, lässt sich durch gespannte Membranen nachweisen, welche durch diese Töne in Mitschwingung versetzt werden, sobald einer ihrer Eigentöne mit einem Combinationston in Einklang ist. Die Schwingungen der Membran können durch das Auge (durch aufgestreuten Sand), also unabhängig vom Gehörorgan, konstatirt werden. Der Fall der objektiven Existenz tritt dann ein, wenn die Erregungsstellen der beiden primären Töne räumlich nicht von einander getrennt sind und dieselbe Luftmasse von beiden Tönen in heftige Erschütterung versetzt wird. Dies ist (abgesehen von der Helmholtz'schen mehrstimmigen Sirene) z. B. beim Harmonium und bei der Violine der Fall. Beim Harmonium ist ein gemeinsamer Windraum vorhanden, aus welchem der die Zungen in Schwingung versetzende Wind strömt. Die Schwingungen der Zunge wirken zurück auf die Luft des Windraumes und versetzen diese in Schwingungen; sind zwei kräftige primäre Töne vorhanden, so wirkt jeder der beiden Töne auf die Luft des gemeinsamen Behälters ein und die Schwingungen der letzteren werden um so kräftiger sein, je kleiner der Behälter im Verhältniss zu der Grösse der Oeffnungen

ist. Die den Combinationstönen entsprechenden Schwingungen, aus der Addition der Schwingungen der primären Töne entstehend, existiren hierbei objektiv im Luftraume. Aehnlich sind die Verhältnisse bei der Violine. — Sind dagegen die Erregungsstellen der beiden primären Töne räumlich von einander getrennt, so addiren sich die Schwingungen erst im Ohre, und es kann dann angenommen werden, dass die den Combinationstönen entsprechenden Schwingungen in den äusseren schwingenden Theilen des Ohres (Trommelfell und Gehörknöchelchen) objektiv vorhanden sind. Der unsymmetrische Bau des Trommelfelles begünstigt nach der Theorie diese objektiven Schwingungen.

Neuere Forscher erkennen zwar an, dass in gewissen Fällen Combinationstöne objektiven, physikalischen Ursprungs auftreten, sind jedoch der Ansicht, dass in der überwiegenden Mehrzahl aller Fälle Combinationstöne nur durch eigenthümliche schwer aufzuklärende Funktionen unseres Gehörorgans entstehen und nicht durch eine mechanisch-physikalische Theorie ableitbar seien.

Wie dem auch sei, Thatsache ist es, dass für unser Gehörorgan, für unsere Empfindung Combinationstöne existiren. Die Musik hat mit ihnen zu rechnen, seien sie objektiven oder subjektiven Ursprungs. Der Mangel einer allseitig ausgebildeten gänzlich unanfechtbaren Theorie macht es dagegen zur Pflicht, in Bezug auf rein theoretische Folgerungen grösste Vorsicht walten zu lassen und überall das Experiment in den Vordergrund zu stellen.

Halten wir uns also an das Experiment, so können wir ohne jegliche Schwierigkeit in den meisten Fällen, wo zwei Töne gleichzeitig kräftig erklingen, Differenztöne und Summationstöne deutlich hören. Summationstöne sind allerdings in der Regel — und glücklicherweise — sehr schwach, so dass sie nur mit Hülfe gleichgestimmter Resonatoren gehört werden können. Ihre geringe Stärke ist insofern ein Glück, als sie mit den beiden primären Tönen meist unharmonische Intervalle bilden und die Harmonie bedenklich stören würden, wenn sie sich der Wahrnehmung aufdrängen würden. Das Intervall einer Quarte (3 : 4) gibt z. B. als Summationston die Naturseptime ($3+4=7$), das Intervall einer grossen Terz (4 : 5) die None des Grundtons ($4+5=9$), die kleine Terz und kleine Sexte geben ganz unharmonische Töne ($5+6=11$; $5+8=13$); nur die Oktave, die Quinte und die grosse Sexte geben Summationstöne, welche mit den primären Tönen harmonische Intervalle bilden ($1+2=3$; $2+3=5$; $3+5=8$).

Dagegen sind Differenztöne bei einiger Aufmerksamkeit meist ohne jegliches Hülfsmittel mit unbewaffnetem Ohre wahrzunehmen und machen sich häufig theils in angenehmer, theils in störender Weise bemerklich.

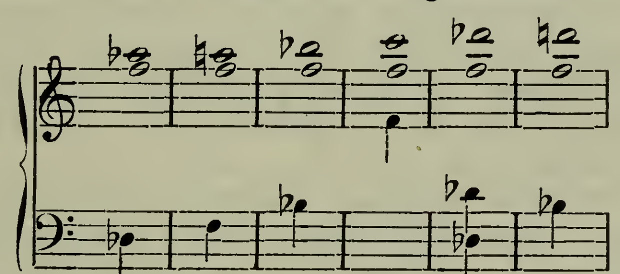
Die Theorie lässt die Möglichkeit offen, dass nicht nur die primären, direkt erzeugten Töne unter sich, sondern auch die Combinationstöne mit den primären Tönen und die Combinationstöne unter sich neue Combinationstöne bilden. So unterscheidet man ausser den bisher besprochenen direkten Differenz- und Summationstönen, die man Combinationstöne erster Ordnung nennt, noch Combinationstöne zweiter, dritter, vierter und höherer Ordnung (sowohl Differenz- als Summationstöne). Ausserdem können die Partialtöne zweier Klänge oder auch eines einzigen Klanges unter sich wieder Combinationstöne verschiedener Ordnung bilden. Theoretisch ist also oft die Möglichkeit einer fast unbegrenzten Anzahl von Combinationstönen vorhanden. Es muss jedoch in jedem speziellen Falle experimentell festgestellt werden, welche der möglichen Töne wirklich auftreten; verlässt man den Boden des praktischen Versuchs, so setzt man sich der Gefahr grober Irrthümer aus.

Haben wir einen Klang mit einer Reihe harmonischer Obertöne vor uns: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... so können nach der Theorie die einzelnen Partialtöne unter sich sowohl Differenz- als Summationstöne verschiedener Ordnung bilden; es werden aber offenbar alle Töne, welche auf diese Weise entstehen, wieder der natürlichen Zahlenreihe angehören und theils die bereits vorhandenen Partialtöne verstärken, theils ursprünglich nicht vorhandene höher liegende Partialtöne erzeugen. Der Klang selbst muss dabei sehr kräftig sein. Die Theorie lässt also wenigstens vermuthen, dass sehr kräftige Klänge im Allgemeinen (ceteris paribus) reicher an starken und hohen Obertönen sein werden als schwache. Diese Vermuthung wird durch viele Erfahrungen bestätigt. Der schmetternde rauhe Klang der Trompete z. B. wird den hohen nahe bei einander liegenden Partialtönen zugeschrieben; dieselbe Trompete kann aber, von einem geschickten Bläser mit geringerer Kraft angeblasen, fast singend und einschmeichelnd klingen. Der sanfte Charakter der Trompete ist allerdings in dem Maasse weniger allgemein bekannt, als ein weicher Klang weniger weit dringt als ein schmetternder. Man kann die hohen Partialtöne des schmetternden Trompetenklanges als aus den niedrigeren Partialtönen hervor-

gehende Summationstöne auffassen, deren Auftreten an eine bestimmte Minimalstärke des Klanges gebunden ist. — Schwingende Stimmgabeln geben nach Verlöschen des beim Anschlagen entstehenden unharmonischen hohen Obertones im Allgemeinen nur einen einfachen Ton, bei grosser Stärke der Schwingungen treten aber zuweilen, wenn auch nur schwach, harmonische Obertöne auf, zunächst die Oktave, bei tiefen sehr kräftig schwingenden Gabeln auch höhere harmonische Obertöne bis zum fünften. Ueber diese sog. „Lufttöne“ sind die Ansichten allerdings noch nicht völlig aufgeklärt; man kann sie aber nach Helmholtz auch als Summationstöne auffassen, die der ursprünglich einfache Ton gewissermaassen mit sich selbst bildet. Bei grosser Schwingungsamplitude kommt natürlich auch bei einem einzigen Tone dasselbe komplizirtere Kraftgesetz zur Geltung, welches Helmholtz seiner Theorie der Combinationstöne zu Grunde legte. Sehr kräftige einfache Töne sind also nach dieser Theorie kaum zu erhalten, was die Praxis auch bestätigt.

Verfolgen wir die Erscheinung der Differenztöne auf der Violine noch um einen Schritt weiter und lassen wir die kleine Sexte $\bar{\bar{c}}$—$\bar{\bar{as}}$ (5 : 8) erklingen, so hören wir als Grundbass in der Tiefe das grosse *As* mitklingen. Nun ist aber die Differenz der Schwingungszahlen der beiden primären Töne 8—5 = 3, der erste Differenzton müsste also die tiefere grosse Sexte (5 : 3) des primären Tones $\bar{\bar{c}}$ sein, d. h. das eingestrichene $\bar{es}$. Es ist somit hier nicht der erste Differenzton, den wir hören. Das grosse *As*, das wir wirklich hören, ist um eine ganze Duodecime tiefer als der erste Differenzton $\bar{es}$, ihm kommt also die relative Schwingungszahl 1 zu. *As* ist auch ein Differenzton, aber kein solcher erster Ordnung. Man kann ihn durch fortgesetzte Subtraktion in folgender Weise erhalten: Die beiden primären Töne $\bar{\bar{c}}$ 5 und $\bar{\bar{as}}$ 8 geben als Differenzton erster Ordnung das $\bar{es}$ 3; dieser letzte Ton $\bar{es}$ 3 gibt mit dem primären Ton $\bar{\bar{c}}$ 5 den Differenzton zweiter Ordnung *as* 2. Ein Differenzton zweiter Ordnung würde mit einem der primären Töne einen Differenzton dritter Ordnung geben, mit einem Differenztone erster Ordnung gibt er dagegen einen solchen vierter Ordnung. Der letztgewonnene Differenzton zweiter Ordnung *as* 2 gibt also mit demjenigen erster Ordnung $\bar{es}$ 3 endlich das tiefe *As* 1 als Differenzton vierter Ordnung. Wir hören in unserem Beispiele deutlich einen *As*-Klang, ein Gemisch der Differenztöne

vierter und zweiter Ordnung *As* 1 und *as* 2; den Differenzton erster Ordnung $\bar{es}$ 3 beachten wir zuerst kaum; er ist zwar da, aber wir hören ihn nur bei besonderer Aufmerksamkeit oder mit Hülfe eines Resonators. Es ist also ein Irrthum, ohne weiteres, wie es fast allgemein geschieht, anzunehmen, der erste Differenzton sei stets der stärkste und die Differenztöne höherer Ordnung seien immer bedeutend schwächer. — Dieselbe Erscheinung zeigt sich bei der grossen Sexte $\bar{\bar{c}}$—$\bar{\bar{a}}$ (3 : 5). Hier ist der erste Differenzton 5—3 = 2, also das eingestrichene $\bar{f}$. Wir hören aber bei einem Versuche auf der Violine deutlich die tiefere Oktave *f* mit der relativen Schwingungszahl 1; man kann diesen Ton hier als Differenzton zweiter Ordnung zwischen den Tönen $\bar{\bar{c}}$ 3 und $\bar{f}$ 2 auffassen. — Für die Violine sind die am deutlichsten hörbaren Differenztöne der 6 innerhalb einer Oktave liegenden consonirenden Intervalle im folgenden Notenbeispiele wieder durch Viertelnoten angedeutet:



Wäre es stets der Differenzton erster Ordnung, der sich der Wahrnehmung aufdrängt, so müsste der Ton, den man hört, mit Erweiterung des Intervalls mehr und mehr steigen. Wir bemerken aber, sobald das Intervall grösser als eine Quinte wird, wieder einen Rückgang, ein Sinken des hörbaren Differenztones. Die reine grosse Sexte gibt denselben Differenzton *b* wie die Quarte, die reine kleine Sexte denselben wie die kleine Terz, nur mit dem Unterschiede, dass bei der kleinen Sexte der am deutlichsten hörbare Differenzton (*d*) mit seiner nächst höheren Oktave ($\bar{d}$) zu einem schwer zu trennenden Ganzen verschmolzen erscheint. — Es wird hierbei stets stillschweigend vorausgesetzt, dass die betreffenden Intervalle harmonisch absolut rein, d. h. den Verhältnissen $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$ entsprechend gegriffen und kräftig mit gleichmässigem Striche gespielt werden. —

Die auftretenden Differenztöne gehören stets der nach der Helmholtz'schen Theorie möglichen Reihe an; es dürfen aber niemals ohne experimentelle Prüfung alle nach dieser Theorie

möglichen Töne als wirklich vorhanden angenommen werden, und vor allem muss davor gewarnt werden, dem ersten Differenzton stets die grösste Bedeutung zuzuerkennen. Das Experiment muss stets entscheiden, welche Combinationstöne wirklich auftreten. Da jedes beliebige Paar von Partialtönen die Entstehung von Combinationstönen herbeiführen kann, so wird vor allem auch die Klangfarbe der primären Klänge wesentlich in Betracht kommen.

In der schon oben zitirten Abhandlung: „Zur Theorie der Differenztöne und der Gehörsempfindungen überhaupt" fasst Max Meyer die Resultate gewissenhafter experimenteller Untersuchungen über Differenztöne einfacher Töne in folgende Sätze zusammen:

Eine allgemein geltende Formel, aus der man für jeden Einzelfall ableiten könnte, welche Differenztöne entstehen müssen, gibt es nicht. Dagegen darf Folgendes als Regel gelten:

Bei Halbtonintervallen oder bei noch kleineren Intervallen entsteht einzig und allein der Differenzton erster Ordnung, welcher der Differenz der Schwingungszahlen der beiden Primärtöne entspricht. (Bei den Intervallen $\frac{16}{15}$, $\frac{20}{19}$, $\frac{25}{24}$ z. B. also einzig der Differenzton 1.)

Bei Intervallen zwischen Halbton und Oktave entstehen ausser diesem ersten Differenzton noch andere Differenztöne. Bei Intervallen, die kleiner sind als eine Quinte, tritt der erste Differenzton am stärksten auf; bei Intervallen zwischen Quinte und Oktave tritt dagegen der erste Differenzton an Stärke zurück gegenüber Differenztönen höherer Ordnung. Ist h die Schwingungszahl des höheren, t diejenige des tieferen Tones, so entstehen bei Intervallen zwischen Quinte und Oktave die 3 Differenztöne: $h - t$, $2t - h$ und $2h - 3t$, von denen $2t - h$ der stärkste ist. Dieselben 3 Differenztöne entstehen stets dann, wenn die Verhältnisszahlen der Primärtöne sich um mehr als eine Einheit von einander unterscheiden (z. B. bei den Intervallen $\frac{9}{7}$, $\frac{16}{9}$ u. s. f.), aber nur bei Intervallen, die kleiner als die Quinte sind, ist der erste Differenzton $h - t$ der stärkste.

Bei Intervallen, welche grösser sind als eine Oktave, entsteht der tiefere der zwei Differenztöne $\pm (h - 2t)$ und $\pm (h - 3t)$, wobei von den beiden Zeichen $\pm$ natürlich dasjenige zu wählen ist, durch welches die Differenz positiv wird. Beim Intervall $\frac{9}{4}$ hört man also den Differenzton $+ (9-2 . 4) = 1$, beim Intervall $\frac{11}{4}$ den Ton $- (11-3 . 4) = 1$.

Bei drei und mehr primären Tönen, bei Dreiklängen und Vierklängen, entstehen im Allgemeinen ausser den Differenztönen, welche die einzelnen Intervalle für sich geben, noch neue Differenztöne. Auf eine Regel darf man sich jedoch nicht verlassen, wenn man sich vor Täuschungen bewahren will. Durch Beobachtung muss festgestellt werden, welche Differenztöne in jedem einzelnen Falle auftreten. —

Bei dem Dur-Dreiklange $\bar{e}$ — $\bar{g}$ — $\bar{\bar{c}}$ z. B., dessen drei Töne den Verhältnisszahlen 5 : 6 : 16 entsprechen, sind die Differenztöne erster Ordnung die Töne 6 — 5 = 1 (C), 16 — 6 = 10 ($\bar{e}$) und 16 — 5 = 11 (ein Ton zwischen $\bar{\bar{f}}$ und $\bar{\bar{fis}}$). Helmholtz schreibt diesem Dreiklange in der That die genannten drei Differenztöne zu, während Max Meyer bei seinen sorgfältigen Beobachtungen, bei denen Töne von Stimmgabeln auf Resonanzkästen verwandt wurden, einzig und allein den Differenzton 1 (C) feststellte und von den beiden andern keine Spur fand. Beim Moll-Dreiklange in seiner engsten Lage dagegen, dessen Verhältnisszahlen $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$ oder 10 : 12 : 15 sind, konnte Meyer unter denselben Bedingungen die ganze Reihe der folgenden Töne beobachten: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15. Die Differenztöne 2 und 1 oder vielmehr ein Gemisch von beiden war bei weitem am deutlichsten hörbar, ziemlich stark noch der Ton 7, am schwächsten der Ton 9. Helmholtz zieht dagegen bei diesem Dreiklange nur die drei Differenztöne erster Ordnung 2, 3 und 5 in Betracht (Tonempfindungen 4. Aufl. pag. 361 und 362). Man sieht aus diesen beiden Beispielen, wie sehr man sich davor hüten muss, aus Tönen, deren Existenz nicht zuvor durch Beobachtung festgestellt wurde, Schlüsse zu ziehen und ganze Theorien darauf zu stützen.

Das ist gewiss, dass Differenztöne da, wo sie in merklicher Stärke auftreten, es häufig erleichtern, ein Intervall harmonisch rein einzustimmen, wie jeder Geiger leicht konstatiren kann, und dass Differenztöne namentlich bei Klängen, die an Obertönen arm sind, durch die bei einer Abweichung von der Reinheit entstehenden Schwebungen einen Ersatz bieten können für die die Reinheit präzisirende Wirkung der mit einander coincidirenden resp. schwebenden Obertöne. Man lasse z. B. zwei Klarinetten irgend ein Oktavenintervall angeben. Da Klänge von Klarinetten nur Partialtöne ungeraden Ranges enthalten, so gibt die tiefere die Tonreihe 1, 3, 5, 7, ... , die um eine Oktave höhere die Tonreihe 2, 6, 10, 14, ... Zusammenfallende Partial-

töne gibt es hier nicht. Wenn das Oktavenintervall verstimmt wird, so können also hier keine Schwebungen von Partialtönen entstehen. Wenn jedoch bei hinreichender Stärke der beiden Klarinettenklänge der erste Differenzton $2 - 1 = 1$ entsteht, so wird sich dieser bei einer Verstimmung des Oktavenintervalls selbst verstimmen und mit dem Grundton 1 offenbar Schwebungen geben müssen. —

Eine bemerkenswerthe praktische Anwendung der Differenztöne ist die von Abt Vogler (1749—1814 Darmstadt) vorgeschlagene und praktisch durchgeführte Ersetzung sehr tiefer Orgelstimmen durch zwei höhere, deren Differenzton die tiefe Stimme vertritt. Zwei Orgelpfeifen, deren Tonhöhen im Verhältniss von 2 : 3 stehen, also eine Quinte bilden, geben den Differenzton 1 und ersetzen also ein Register, welches diesem Differenzton entspricht. Abt Vogler verband eine Prinzipalstimme von 16' mit einer Quinte von $10\frac{2}{3}$' und erzeugte dadurch einen 32'-Ton. Da Schwingungszahlen sich umgekehrt wie Wellenlängen oder Pfeifenlängen verhalten, so verhalten sich die Schwingungszahlen entsprechender Töne der Register von 32', 16', $10\frac{2}{3}$' wie $\frac{1}{32} : \frac{1}{16} : \frac{1}{10\frac{2}{3}}$, d. h. wie 1 : 2 : 3, es muss also in der That der Differenzton eines 16'- und eines $10\frac{2}{3}$'-Tones ein 32'-Ton sein. Man pflegt dieses kombinirte Register der Orgel als „akustisches 32'-Register“ zu bezeichnen. Es wird nicht selten angewandt, in der Regel da, wo die Höhe der Kirche das Anbringen eines wirklichen offenen Registers von 32' nicht gestattet, oder aber zum Theil einfach aus Rücksichten der Sparsamkeit. Diese Register gehören natürlich zu der Klasse der Mixturregister. In einigen grossen Orgelwerken (z. B. in der Votiv-Kirche in Wien) finden sich unter dem Namen: 32' Grand Bourdon auch auf demselben Prinzip beruhende akustische Register grösseren Stils: Prinzipalbass 16', Quintbass $10\frac{2}{3}$', Oktavbass 8', Terzbass $6\frac{2}{5}$' und Oktavbass 4', die sich alle zu einem runden, kraftvollen 32'-Klange vereinigen. Die Tonhöhen der entsprechenden Pfeifentöne verhalten sich wie $\frac{1}{16} : \frac{1}{10\frac{2}{3}} : \frac{1}{8} : \frac{1}{6\frac{2}{5}} : \frac{1}{4}$ oder wie 2 : 3 : 4 : 5 : 8 ; es entsteht ein kräftiger Differenzton 1, der mit dieser fünffachen Mixtur einen vollen Klang mit den Partialtönen 1, 2, 3, 4, 5, 8 bildet.

87. Klangvertretungsprinzip von Helmholtz. Durdreiklang und Molldreiklang. Dualistische Theorien von Hauptmann, v. Oettingen und Riemann. — Knüpfen wir zunächst wieder an die Helmholtz'sche Theorie der Consonanz und Dissonanz an und verfolgen wir dieselbe noch um einen Schritt weiter, indem wir von den consonanten Intervallen, den Zweiklängen, zu den consonanten Dreiklängen, dem Durdreiklang und dem Molldreiklang übergehen.

Die Partialtöne eines Klanges enthalten — wenn wir von den Partialtönen 7, 9, 11, 13, 14, 15, ... absehen — einen reinen vollkommenen Durdreiklang, z. B. wenn wir den Klang *C* nehmen:

C	c	g	$\bar{c}$	$\bar{e}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{e}}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
1	2	3	4	5	6	8	10	12	16

Jeder Durdreiklang kann als Bestandtheil eines und desselben Grundklanges aufgefasst werden und diesen Grundklang mehr oder weniger vollständig *vertreten*. Und umgekehrt bildet der Grundklang ein gemeinsames starkes Band, welches die drei Töne eines Durdreiklanges zusammenhält und als ein Ganzes erscheinen lässt.

Ein Durakkord, der einen Ruhepunkt bezeichnen soll, z. B. der Schlussakkord eines vielstimmigen Satzes, erscheint um so befriedigender, je mehr die Lage der einzelnen Töne des Akkordes mit der Anordnung der Partialtöne übereinstimmt. Es ist ein bekanntes Gesetz der Harmonielehre, dass ein Durdreiklang nur in sog. Grundstellung die Rolle eines Ruhepunktes übernehmen kann, während die beiden „Umkehrungen" des Dreiklanges, der „Sextakkord" und „Quartsextakkord" nur im Verlaufe eines Satzes als Uebergangsstufen auftreten dürfen. In der Grundstellung eines Dreiklanges liegt sein Grundton als tiefster Ton im Basse.

Abgesehen davon, dass die drei Töne eines Durdreiklanges als Vertreter eines gemeinsamen Klanges gelten können, kommt noch der Umstand hinzu, dass die ersten Differenztöne eines Durdreiklanges in enger Lage (4, 5, 6; Differenztöne 1 und 2) deutlich auf denselben Grundklang hinweisen, wenn sie überhaupt auftreten. Der tief liegende Grundton bildet eine Art von Grundbass. *Rameau* gab ihm den Namen *Fundamentalbass*.

Das eben skizzirte *Prinzip der Klangvertretung* ist wohl für den Durdreiklang recht anschaulich und bestechend, nicht aber für den Molldreiklang. In einem Klange, dessen

Partialtöne bis zum 15ten hinaufreichen, bilden allerdings die Partialtöne 10 : 12 : 15 ($1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$) einen Molldreiklang:

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathit{As} & \mathit{as} & \overline{\mathit{es}} & \overline{\mathit{as}} & \overline{\overline{c}} & \overline{\overline{\mathit{es}}} & \overline{\overline{\mathit{as}}} & \overline{\overline{\overline{c}}} & \overline{\overline{\overline{\mathit{es}}}} & \overline{\overline{\overline{g}}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15; \end{array}$$

allein der Grundklang *(As)*, dem dieser Molldreiklang ($\overline{\overline{\overline{c}}}$—*es*—$\overline{\overline{\overline{g}}}$) angehört, erscheint hier als fremd, nicht als ein die drei Töne des Molldreiklanges zusammenhaltendes Band. Auf denselben fremden Grundton *(As)* weisen auch die beiden kräftigsten Differenztöne (1 und 2) hin, wie oben schon betont wurde. Das Klangvertretungsprinzip lässt uns also im Stiche, wenn wir es auf den Molldreiklang anwenden wollen, und Helmholtz verzichtet auch auf eine derartige Ausdehnung.

Im Molldreiklange *c—es—g* sind wohl alle drei darin auftretenden Intervalle: *c—es*, *es—g*, und *c—g* consonant; aber das gemeinsame Band, welches die drei Töne des Molldreiklanges zu einem einheitlichen Ganzen vereinigt, ist hier weit schwerer zu finden als beim Durdreiklange. Der gemeinsame Grundklang *As* hat hier viel eher trennenden als verknüpfenden Einfluss.

Helmholtz gibt dem Molldreiklange *c—es—g* zweierlei verschiedene Deutungen: einerseits als *c*-Klang mit einem klangfremden Elemente *es* an Stelle von *e*; andrerseits, von der Sextakkord-Stellung *es—g—c* ausgehend, als *es*-Klang mit einem klangfremden Elemente *c* an Stelle von *b*. Im ersten Falle ist *c* Grundton oder Fundamentalbass, und der Molldreiklang *c—es—g* erscheint dann als Vertreter eines veränderten oder getrübten *c*-Klanges; im zweiten Falle ist *es* Grundton oder Fundamentalbass und der Akkord *es—g—c* wird dann als Vertreter des Dreiklanges *es—g—b*, als des Unterdominant-Dreiklanges der Tonart *b*-dur, aufgefasst. Die erste der beiden Auffassungsweisen ist die üblichere.

Die Mängel der Helmholtz'schen Auffassung des Molldreiklanges erkennend und von der Ueberzeugung ausgehend, dass der Molldreiklang nicht als getrübtes Dur aufzufassen sei, sondern als direkter Gegensatz, gewissermaassen als Spiegelbild von Dur, stellten zwei scharfsinnige Musikschriftsteller, A. v. Oettingen und Hugo Riemann, eine sehr fein erdachte dualistische Theorie von Dur und Moll auf.

Der dualistische Grundgedanke, dass Dur sich zu Moll verhalte etwa wie eine positive Grösse zu einer gleich grossen negativen, wie Nordpol zu Südpol, wie Berg zu Thal, war

freilich schon früher ausgesprochen worden, schon von Zarlino, Rameau und Tartini. Und in der Mitte dieses Jahrhunderts war es einer der geistvollsten Musiktheoretiker der Neuzeit, Moritz Hauptmann (1792 Dresden — 1868 Leipzig), der den dualistischen Gedanken zum Ausgangspunkt seiner Lehre nahm, ohne ihn allerdings in alle seine Consequenzen zu verfolgen. Hauptmann veröffentlichte seine Lehre in dem epochemachenden Buche: „Die Natur der Harmonik und Metrik“ (Leipzig, Breitkopf u. Härtel 1853, zweite Auflage 1873). Halten wir uns nur einen Augenblick bei seiner Auffassung der beiden Grund-Dreiklänge von Dur und Moll auf.

Hauptmann sieht ab von der ihm wohl bekannten Erscheinung der Obertöne und lehnt es von vornherein ab, ein musikalisches System auf diese Erscheinung zu gründen. Er betrachtet also die musikalischen Töne und ihre Verbindungen an und für sich ohne Rücksicht auf Obertöne und die damit zusammenhängenden Begleiterscheinungen und sucht den Durdreiklang und den Molldreiklang in ästhetisch-philosophischer Weise zu begründen. — Die Oktave ist für Hauptmann „der Ausdruck für den Begriff der Identität, der Einheit und Gleichheit mit sich selbst“. Das Intervall der Quinte „enthält die Bestimmung, dass etwas in sich getrennt sei und damit den Begriff der Zweiheit und des inneren Gegensatzes“. In der grossen Terz ist der Begriff der „Gleichsetzung des Entgegengesetzten“ enthalten: „der Zweiheit als Einheit“.

Die drei Töne eines Durdreiklanges: Grundton, Quinte und grosse Terz verhalten sich zu einander wie „ein Gegebenes, ein diesem Gegebenen hinzutretendes Gegensätzliches und ein diesen Gegensatz Lösendes“. Der Durdreiklang bildet „eine Art Mikrokosmus, welcher die Elemente aller musikalischen Entwicklung gleichsam im Keime schon in sich trägt“ *). — Während im Durdreiklange ein Ton (der Grundton) eine Quinte und grosse Terz hat, kann man beim Molldreiklange sagen, dass ein Ton (der Quint-Ton) selbst Quinte und grosse Terz ist. „Das Haben ist ein aktiver, das Sein ein passiver Zustand.“ „Das Haben spricht sich im Durdreiklange, das Gehabt-werden im Molldreiklange aus.“ Der Molldreiklang ist die Umkehrung des Durdreiklanges. Von der „Einheit C“ um

*) Siehe auch die auf Hauptmann basirende, die Hauptmann'sche Lehre klar darlegende und weiter verfolgende Schrift von Dr. Otto Bähr: „Das Tonsystem unserer Musik“ (Leipzig, Brockhaus 1882).

eine grosse Terz und eine Quinte aufwärts schreitend erhält man den Durdreiklang *C—e—G* (in Hauptmann'scher Bezeichnungsweise); von derselben „Einheit C" um eine grosse Terz und Quinte abwärts schreitend, erhält man den Molldreiklang *F—as—C.* „Im Durdreiklange ist die Einheit das positiv Bestimmende, im Molldreiklange ist sie das positiv Bestimmte." Im Durdreiklange kommt aufwärts treibende Kraft, im Molldreiklange herabziehende Schwere zum Ausdruck. „Wie in den sinkenden Zweigen der Trauerweiden gegen den strebenden Lebensbaum, finden wir darum auch im Mollakkorde den Ausdruck der Trauer wieder." —

In diesen wenigen Sätzen ist der dualistische Standpunkt Hauptmann's und seine Auffassungsweise der Dreiklänge von Dur und Moll in klarer Weise ausgedrückt.

A. v. Oettingen, in seiner scharfsinnigen Schrift: „Das Harmoniesystem in dualer Entwicklung" (Dorpat und Leipzig 1866) führte nun einerseits das dualistische Prinzip in consequenter Weise weiter und suchte andrerseits den Molldreiklang und das Mollgeschlecht, gestützt auf die Erscheinung der Obertöne, in analoger Weise akustisch zu begründen, wie es Helmholtz für den Durdreiklang und das Durgeschlecht that. Die Hauptpunkte seiner Lehre sind folgende*):

Der reine Durdreiklang, z. B.: $\bar{c} — \bar{e} — \bar{g}$ ist Bestandtheil des *C*-Klanges; die Töne $\bar{c}$, $\bar{e}$, $\bar{g}$ sind als 4., 5., 6. Partialton im *C*-Klange enthalten. Die Töne eines Durdreiklanges (4, 5, 6) sind Obertöne eines gemeinsamen Grundklanges (1), und dieser ist die zweittiefere Oktave des Grundtones (4).

Betrachten wir dagegen den reinen Molldreiklang $\bar{c}—\overline{es}—\bar{g}$ und denken wir uns jeden seiner Töne als Klang mit einer Reihe von Partialtönen, so ist der 6. Partialton von $\bar{c}$ der Ton $\bar{\bar{\bar{g}}}$; ferner ist der 5. Partialton von $\overline{es}$ ebenfalls der Ton $\bar{\bar{\bar{g}}}$, und endlich ist der 4. Partialton von $\bar{g}$ wieder derselbe Ton $\bar{\bar{\bar{g}}}$. Die Töne eines Molldreiklanges (10, 12, 15) haben also einen gemeinsamen Oberton (60) und dieser ist die zweithöhere Oktave des Quint-Tones (15).

*) Zu den dualistischen Theorien siehe ausser den im Texte zitirten Originalschriften:

Adolf Thürlings: „Die beiden Tongeschlechter und die musikalische Theorie" (Berlin, Liepmannssohn 1877, Inaug.-Diss.) und die weiter unten besprochene Schrift von Carl Stumpf, „Consonanz und Dissonanz" (Leipzig, Barth 1898), Kapitel 8.

Während also für den Durdreiklang der Vereinigungspunkt in der Tiefe liegt und der Durdreiklang als ein aus diesem Vereinigungspunkte emporstrebendes Gebilde erscheint, liegt der Vereinigungspunkt oder Convergenzpunkt für den Molldreiklang genau ebensoweit nach der entgegengesetzten Richtung, nach oben hin und der Molldreiklang erscheint als ein von diesem Convergenzpunkte aus abwärts strebendes Gebilde.

Für den Durdreiklang $\bar{c} - \bar{e} - \bar{g}$ ist das tiefe C das bindende Glied oder, wie wir uns soeben ausdrückten, der Vereinigungspunkt. Setzen wir $C = 1$, so ist $\bar{c} = 4$; $\bar{e} = 5$; $\bar{g} = 6$.

Für den Molldreiklang $\bar{c} - \overline{es} - \bar{g}$ ist der erste gemeinsame Oberton, das hohe $\bar{\bar{\bar{g}}}$, das bindende Glied oder der Vereinigungspunkt. Setzen wir $\bar{\bar{\bar{g}}} = 1$, so ist $\bar{g} = \frac{1}{4}$; $\overline{es} = \frac{1}{5}$; $\bar{c} = \frac{1}{6}$.

Sucht man die Lage aller dieser Töne auf dem Klavier auf, so findet man, dass beim Durdreiklange $\bar{c} - \bar{e} - \bar{g}$ das tiefe C ebensoweit nach links von $\bar{c}$ entfernt ist, als beim Molldreiklange $\bar{c} - \overline{es} - \bar{g}$ das hohe $\bar{\bar{\bar{g}}}$ nach rechts von $\bar{g}$. Durdreiklang und Molldreiklang sind dasselbe, von entgegengesetzter Richtung her betrachtet; sie sind gleich und entgegengesetzt. Es besteht ein direkter polarer Gegensatz zwischen den Dreiklängen von Dur und Moll.

Den gemeinsamen Grundton eines Intervalls oder eines Akkordes nennt v. Oettingen den tonischen Grundton oder die Tonika; C ist also der tonische Grundton oder die Tonika des Dreiklanges $\bar{c} - \bar{e} - \bar{g}$. Den gemeinsamen Oberton eines Intervalls oder eines Akkordes nennt er dagegen den phonischen Oberton oder die Phonika; es ist also $\bar{\bar{\bar{g}}}$ die Phonika des Molldreiklanges $\bar{c} - \overline{es} - \bar{g}$.*)

Tonizität ist die Eigenschaft eines Intervalls oder Akkordes, als Bestandtheil einer und derselben Tonika aufgefasst werden zu können, Phonizität dagegen die Eigenschaft, eine gemeinschaftliche Phonika zu besitzen.

Verwandt (im ersten Grade) nennt v. Oettingen zwei Töne, welche entweder Partialtöne eines und desselben Grundklanges sind oder einen gemeinschaftlichen Oberton haben.

---

*) Arithmetisch aufgefasst ist die Tonika durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler, die Phonika durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der betreffenden Verhältnisszahlen gegeben. Z. B. ist für den Durdreiklang 20 : 25 : 30 die Tonika = 5; für den Molldreiklang 20 : 24 : 30 die Phonika = 120.

Die Verwandtschaft besteht auch dann, wenn der gemeinsame Grundton oder der gemeinsame Oberton kein wirklich existirender, sondern nur ein gedachter ist. Die *Erinnerung* an diejenigen Fälle, wo Tonika und Phonika reell existirten, ermöglicht es in Fällen der Nicht-Existenz von ihrem Vorhandensein zu abstrahiren.

Consonant sind mehrere Töne unter sich dann, wenn sie sich entweder auf dieselbe Tonika oder auf dieselbe Phonika beziehen lassen; im ersten Falle heissen sie tonisch, im zweiten phonisch consonant. *Dissonant* ist die Verbindung mehrerer Töne, die keine gemeinsame Tonika oder Phonika haben, wie z. B. der Akkord $\bar{c} — \bar{e} — \overline{gis}$, wo die Terz $\bar{c} — \bar{e}$ nach der Tonika C, die Terz $\bar{e} — \overline{gis}$ dagegen nach der Tonika E hinweist.

Zweiklänge sind nicht eindeutig consonant oder dissonant. Die kleine Terz $\bar{c} — \overline{es}$ kann z. B. entweder als zur Tonika $\underline{As}$ oder als zur Phonika $\bar{\bar{g}}$ gehörend aufgefasst werden, also sowohl als tonische wie als phonische Consonanz. Eindeutig verständlich wird sie erst beim Hinzutreten der Quinte $\bar{g}$; der Molldreiklang $\bar{c} — \overline{es} — \bar{g}$ ist nur phonisch, der Durdreiklang $\bar{c} — \bar{e} — \bar{g}$ nur tonisch consonant.

Die Töne des Dreiklanges $\bar{c} — \bar{e} — \bar{g}$ haben zwar auch eine gemeinschaftliche weit entfernte Phonika: $\bar{\bar{\bar{h}}}$; ebenso haben die Töne des Molldreiklanges $\bar{c} — \overline{es} — \bar{g}$ eine gemeinschaftliche Tonika: $\underline{\underline{As}}$. Indessen ist die phonische Beziehung des Durdreiklanges und die tonische des Molldreiklanges nach v. Oettingen eine zu entfernte, um wesentlich in Betracht zu kommen.

In durchaus logischer und consequenter Verfolgung seiner dualistischen Theorie wagte v. Oettingen noch einen wesentlichen Schritt, den weder Hauptmann noch dessen Schüler gethan hatten. Er schloss, dass die Phonika in Bezug auf das Mollgeschlecht dieselbe Rolle spielen müsse, wie die Tonika in Bezug auf das Durgeschlecht. Beim Durdreiklange $\bar{c} — \bar{e} — \bar{g}$ ist die Tonika C oder — kraft des Prinzips der Oktavenvertretung — der *Grundton* $\bar{c}$ zugleich der Hauptton; beim Molldreiklange $\bar{c} — \overline{es} — \bar{g}$ fällt die Rolle des Hapttons dagegen naturgemäss der Phonika $\bar{\bar{g}}$ oder — nach demselben Prinzip — der *Dominante* $\bar{g}$ zu. Demnach ist der Akkord $\bar{c} — \overline{es} — \bar{g}$ nicht als $\bar{c}$-moll-, sondern als $\bar{g}$-moll-Dreiklang aufzufassen. $\bar{c}$ ist im Dreiklange

$\bar{c}$—$\overline{es}$—$\bar{g}$ nur noch insofern Grundton, als er der tiefste Ton des Dreiklanges ist, die Rolle des Haupttons hat er dagegen an die Dominante $\bar{g}$ abgetreten. Die dem Molldreiklange $\bar{c}$—$\overline{es}$—$\bar{g}$ entsprechende Molltonleiter — nach allgemein üblicher Benennung $\bar{c}$-moll, nach v. Oettingen's Bezeichnung $\bar{g}$-moll — beginnt dann auch folgerichtig mit dem Hauptton $\bar{g}$ und führt von da abwärts bis zur nächst tieferen Oktave; sie lautet demnach g $\bar{f}$ $\overline{es}$ $\bar{d}$ $\bar{c}$ b as g. Man stösst so auf das antike dorische Geschlecht oder — nach der von Helmholtz eingeführten Benennung — auf das Sextengeschlecht. Nicht unser Mollgeschlecht, sondern das Sextengeschlecht ist die direkte Umkehrung des Durgeschlechts. —

Hugo Riemann ging in dem Ausbau des dualistischen Systems noch um einen Schritt weiter als v. Oettingen und suchte die Symmetrie zwischen Dur und Moll noch vollkommener und einleuchtender zu gestalten dadurch, dass er den Begriff der Untertöne zu Hülfe nahm.

Während die Obertöne eines Grundtones 1 durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... gegeben sind, werden die Untertöne durch die umgekehrten Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, ... ausgedrückt. Die Reihe der Untertöne bildet eine direkte Fortsetzung der Obertonreihe nach entgegengesetzter Richtung, also nach unten hin. Von $\bar{c}$ einerseits in Obertönen aufwärts, andrerseits in Untertönen abwärts schreitend erhält man also die beiderseits unbegrenzte Tonreihe

. . . .	$\underline{C}$	$\underline{D}$	$\underline{F}$	$\underline{As}$	C	F	c	$\bar{c}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	$\bar{\bar{\bar{e}}}$	$\bar{\bar{\bar{g}}}$	$\bar{\bar{\bar{b}}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	. . . .
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	

Untertöne. Obertöne.

Im Klange von $\bar{c}$ ist eine grössere oder geringere Zahl von Obertönen enthalten. Riemann glaubte früher, dass ausserdem mit dem Klange von $\bar{c}$ auch eine grössere oder geringere Zahl von Untertönen verbunden sei und dass den Untertönen ebenso wie den Obertönen wirkliche Existenz zuzuerkennen sei. Er wies u. A. darauf hin, dass eine Saite von bestimmter Länge, auch Saiten von doppelter, 3 facher, 4 facher Länge, also von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ so grosser Schwingungszahl in Mitschwingung zu versetzen vermag, wobei dann allerdings die Saiten nicht als Ganzes, sondern resp. in 2, 3, 4 Unterabtheilungen (also doch mit der Schwingungszahl 1) mitschwingen. Später kam Riemann von seiner Ansicht, dass Untertöne wirklich existirten, selbst

zurück und versuchte sogar zu beweisen, dass die Untertöne physikalisch unmöglich seien. („Katechismus der Akustik“ 1891.) Immerhin glaubte Riemann, die eben erwähnte Thatsache des Mitschwingens rechtfertige seine Lehre von den Untertönen hinreichend, um dieselbe als Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen benützen zu können.

Durch die Untertöne ist nun in der That die Symmetrie in vollkommener Weise hergestellt. Das Prinzip der Klangvertretung, das von Helmholtz zuerst für das Durgeschlecht ausgesprochen wurde, wird nun erst in vollkommen logischer Weise auch auf das Mollgeschlecht anwendbar. Der Durdreiklang $\bar{c}$—$\bar{e}$—$\bar{g}$ heisst nach Riemann „Oberklang von C“; er vertritt den Klang C nach der einen Seite (nach oben) hin. Der Molldreiklang $\bar{c}$—$\overline{es}$—$\bar{g}$ heisst dagegen „Unterklang von $\bar{\bar{g}}$“; er vertritt den Klang $\bar{\bar{g}}$ nach der andern Seite (nach unten) hin.

Der „Oberklang von C“ gibt als Combinationston (Differenzton) das C selbst; die Combinationstöne können also als Stütze der Riemann'schen Theorie herangezogen werden, soweit dieselbe den Durdreiklang anbetrifft. Weiter reicht jedoch die Symmetrie nicht. Für den Molldreiklang können wenigstens die Differenztöne nicht als Stütze dienen. Vollkommene Symmetrie wäre dann hergestellt, wenn sich nachweisen liesse, dass die drei Töne $\bar{c}$—$\overline{es}$—$\bar{g}$ des „Unterklanges von $\bar{\bar{g}}$“ das $\bar{\bar{g}}$ als Summationston geben; es müssten die Summationstöne in Bezug auf den Molldreiklang dieselbe Rolle spielen wie die Differenztöne in Bezug auf den Durdreiklang.

Hugo Riemann hat seine Anschauungen und Theorien in zahlreichen sehr beachtenswerthen Schriften dargelegt und verfochten. Einige der hervorragendsten sind: „Musikalische Logik“ (1874), „Musikalische Syntaxis“ (1877), „Skizze einer neuen Methode der Harmonielehre“ (1880), „Handbuch der Harmonielehre“ (1887), „Katechismus der Akustik“ (1891), Musiklexikon (4. Auflage 1894), „Vereinfachte Harmonielehre“ (1894). —

88. Bedenken gegen die Consonanztheorie von Helmholtz und die dualistischen Lehren v. Oettingen's und Riemann's. — Niemand, der für ernstes wissenschaftliches Forschen Sinn und Verständniss hat, wird der Helmholtz'schen Theorie der Consonanz und Dissonanz und den dualistischen Lehren v. Oettingen's und Riemann's seine aufrichtige Hoch-

achtung versagen können. Und dennoch werden sich vielleicht dem denkenden Leser da und dort Bedenken aufgedrängt haben, ob denn Alles so klar und unanfechtbar sei, als es auf den ersten Blick erscheint.

Schon die auf Seite 311 in Notenschrift gegebene Zusammenstellung der Intervalle der Quinte, Quarte, grossen und kleinen Sexte und der grossen und kleinen Terz nebst den sich auf den Grundtönen aufbauenden Reihen der Obertöne musste Anlass zu ernsten Bedenken geben. Wenn das Auftreten von Schwebungen als positives charakteristisches Merkmal der Dissonanz, das glatte schwebungsfreie Dahinfliessen und die Gemeinsamkeit von Partialtönen als charakteristisches Merkmal der Consonanz gelten soll, so kann man sich schon bei den reinen, zweiffellos consonanten Intervallen der Quinten, Quarten, Terzen und Sexten ernstlich fragen, was bei ihnen vorwiegt: das positive Merkmal der Dissonanz oder dasjenige der Consonanz. Bei allen diesen Intervallen, selbst die Quinte nicht ausgenommen, gelangen schon Obertöne niederen Ranges mit einander in Kollision und geben Anlass zu Schwebungen: bei der Quinte *c*—*g* die Obertonpaare $\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{\bar{d}}}$ und $\bar{\bar{\bar{d}}}$ $\bar{\bar{e}}$, bei der Quarte *c*—*f* die Paare $\bar{f}$ $\bar{g}$, $\bar{\bar{e}}$ $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{f}}$ $\bar{\bar{g}}$, u. s. w. Alle diese Paare haben entschieden dissonanten Charakter und ihnen steht als Gegengewicht zu Gunsten der Consonanz nur eine geringe Zahl von Coincidenzen meist höherer und schwächerer Obertöne gegenüber. Bei der kleinen Sexte *c*—*as* z. B., die zweiffellos keine Dissonanz ist, trifft man, von den tieferen meist stärkeren zu den höheren meist schwächeren Partialtönen aufsteigend, zunächst vier entschieden dissonante Tonpaare: $\bar{g}$ $\overline{as}$, $\bar{\bar{e}}$ $\overline{\overline{es}}$, $\bar{\bar{g}}$ $\overline{\overline{as}}$, $\overline{\overline{as}}$ $\bar{\bar{\bar{b}}}$; und erst dann stösst man auf eine Coincidenz von Obertönen: $\bar{\bar{\bar{c}}}$ $\bar{\bar{\bar{c}}}$, die zudem öfter fehlen werden in Fällen, wo doch die tieferen dissonirenden Paare von Partialtönen noch da sind. Muss man nicht, wenn man der bindenden Kraft gemeinsamer Partialtöne grossen Werth beimisst, auch der trennenden Kraft unmittelbar neben einander liegender, zu Schwebungen führender Paare von Partialtönen, eine grosse Rolle zuschreiben? Muss nicht die trennende Kraft sogar viel grösser sein als die bindende? Dann könnte aber überhaupt von Consonanz kaum mehr gesprochen werden.

Nach der Helmholtz'schen auf den Coincidenzen gemeinsamer, den Schwebungen benachbarter Partialtöne fussender Lehre der Consonanz und Dissonanz muss der Grad der Con-

sonanz und Dissonanz eines und desselben Intervalls sowohl von seiner absoluten Tonlage als von der Zusammensetzung, d. h. der Klangfarbe der das Intervall bildenden musikalischen Töne wesentlich abhängen. Wenn auch z. B. zugegeben werden muss, dass Terzen in tiefen Lagen rauher klingen als in hohen, so wird es doch dem musikalischen Bewusstsein entschieden widerstreiten, der absoluten Tonlage eines Intervalls und der Klangfarbe mehr als einen durchaus nebensächlichen Einfluss auf den Grad der Consonanz oder Dissonanz einzuräumen. Das Intervall einer Sekunde wird stets in demselben Grade dissonant sein, ob es in mittleren, höheren oder tieferen Lagen des Tongebietes liegt, und dabei verdoppelt sich doch die Zahl der Schwebungen bei Versetzung des Intervalls um eine Oktave nach oben, halbirt sich dagegen bei einer gleich grossen Versetzung nach unten. Wenn zwei Klarinetten ein Oktavenintervall angeben, so werden wir dieses genau in demselben Grade als Consonanz empfinden, als wenn es von zwei Violinen gegeben würde, und doch kann im ersten Falle von zusammenfallenden Obertönen nicht gesprochen werden, da die eine Klarinette die Tonreihe 1, 3, 5, . . ., die andere die Reihe 2, 6, 10, . . . gibt. Verstimmt man dagegen das Oktavenintervall der beiden Klarinetten und lässt es etwa in eine grosse Septime übergehen, so ist man doch keinen Augenblick darüber im Zweifel, dass das Intervall dissonant geworden ist. Von Schwebungen kann aber in diesem Falle wenigstens dann keine Rede sein, wenn die Töne der Klarinette nicht hinreichend stark sind, um deutliche Differenztöne zu erzeugen. Man kann aus einfachen Tönen, mit Hülfe von Stimmgabeln, die auf Resonanzkästchen stehen, entschieden dissonante Intervalle und Akkorde zusammenstellen, bei denen von Schwebungen und Rauhigkeit keine Spur zu merken ist. Und umgekehrt gibt es entschieden consonante Intervalle (z. B. die eben erwähnten) und Akkorde, die gerade bei guten musikalischen Klangfarben nicht frei von Schwebungen sind und doch als fraglos consonant anerkannt werden. Es gibt Dissonanz ohne Schwebungen und Schwebungen ohne Dissonanz. Zwei einfache Töne, die mit einander eine reine Quinte, Quarte, Terz oder Sexte bilden, erkennen wir, sei es im harmonischen Zusammenklange, sei es in melodischer Folge, als zu einander unbedingt consonant an; hier fehlt aber das verknüpfende Band, der gemeinsame Oberton, vollständig. Nimmt man an, dass im Falle einfacher Töne

die Erinnerung an diejenigen Fälle, wo die Töne nicht einfach waren und zusammenfallende Partialtöne wirklich existirten, einen wirklichen Ersatz biete für das thatsächlich fehlende Band, so kann man mit Stumpf (siehe unten) die Frage aufwerfen, ob eine ungesalzene Speise uns als gesalzen erscheinen könne, kraft der blossen Erinnerung daran, dass wir sie in der Regel im richtigen Verhältnisse gesalzen zu essen bekamen?

So gewiss es ist, dass Schwebungen, wenn ihre Anzahl sich innerhalb der von Helmholtz angegebenen Grenzen bewegt, zur Rauhigkeit eines Zusammenklanges wesentlich beitragen können, so sicher ist es, dass das Vorhandensein von Schwebungen zur Erklärung des Wesens der Dissonanz nicht ausreicht, also nicht als charakteristisches Merkmal der Dissonanz zu betrachten ist, sondern nur als accessorisches. Ebensowenig reicht zur Erklärung des Wesens der Consonanz die Abwesenheit von Schwebungen und die auf der Gemeinsamkeit von Partialtönen beruhende Aehnlichkeit der Klänge hin.

A. v. Oettingen leitet in seiner dualistischen Theorie den Begriff der Consonanz aus dem Verwandtschaftsbegriffe her und verzichtet darauf, die Schwebungen zur Erklärung der Dissonanz heranzuziehen, indem er Wohlklang und Consonanz begrifflich von einander scheidet. Den Verwandtschaftsbegriff stützt er, ähnlich wie Helmholtz, auf die Obertöne, indem es ihm zugleich auf das wirkliche Vorhandensein der Obertöne nicht wesentlich ankommt und indem auch er im Falle der Abwesenheit einer gemeinsamen Tonika oder Phonika an die Erinnerung appellirt. Auch hier kann ein treffendes Wort von Stumpf (Tonpsychologie II pag. 196) Anwendung finden: „Wenn die Kraft, welche allein Verschmelzung bewirkt, wegfällt, wird der Effekt ebensowenig eintreten, als die Lokomotive aus Gewohnheit läuft, wenn sie einmal nicht geheizt ist.“ — Ist es schon für die Helmholtz'sche Theorie nicht ganz unbedenklich, dass bei dem 7. Partialton willkürlich eine Grenze gezogen wird und die Partialtöne 7, 9, 11, 13, . . . stillschweigend von der Betrachtung ausgeschlossen werden, als ob sie gar nicht existiren würden, so ist dies für die Theorie v. Oettingen's noch bedenklicher, da v. Oettingen sich nicht, wie Helmholtz, auf die durch die hohen Obertöne entstehenden Schwebungen berufen kann. — Die Lehre, dass bei Zweiklängen wegen ihrer Mehrdeutigkeit von Consonanz im eigentlichen Sinne nicht gesprochen werden könne, steht im Widerspruch zu der That-

sache, dass die Consonanz der Oktave stillschweigend als die vollkommenste anerkannt wird, indem von dem Prinzip der Identität oder Aequivalenz der Oktave in der dualistischen Lehre fortwährend Gebrauch gemacht wird.

Für die Riemann'sche Auffassung ist, abgesehen von den obigen grossentheils auch ihr geltenden Einwendungen, der Umstand verhängnissvoll, dass die Untertöne keine reelle Existenz haben.

Nach der strengen Logik der Dualisten muss beim Mollgeschlecht die Dominante, nicht die Tonika, das Centrum der Tonart sein. Damit wird sich aber die erdrückende Mehrzahl aller Musiker niemals einverstanden erklären.

Endlich sollte auch die Thatsache nicht ausser Betracht kommen, dass bei vollkommen ungebundener Intonation in der Praxis nicht derjenige Mollakkord zur Anwendung kommt, auf den sich die vorgetragenen Lehren beziehen.

Der Dualismus im Sinne Hauptmann's bleibt immer erhalten, wenn man entweder den harmonisch reinen Durdreiklang dem harmonisch reinen Molldreiklange gegenüberstellt, wie es soeben geschah; oder indem man den pythagoräischen Durdreiklang $(1 : \frac{81}{64} : \frac{3}{2})$ dem pythagoräischen Molldreiklange $(1 : \frac{64}{81} : \frac{2}{3})$, oder den temperirten Durdreiklang $(1 : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{7}{12}})$ dem temperirten Molldreiklange $(1 : 2^{-\frac{4}{12}} : 2^{-\frac{7}{12}})$ entgegensetzt. Von einer Tonika und Phonika im Sinne v. Oettingen's und Riemann's kann aber wenigstens im temperirten System nicht gesprochen werden.

89. Die Lehre von der Tonverschmelzung und die Theorie der Consonanz und Dissonanz von Stumpf. — In neuerer und neuester Zeit wurde von dem hervorragenden Psychophysiker und Philosophen Stumpf (Prof. an der Universität Berlin) eine von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der Consonanz und Dissonanz aufgebaut, welche, auf dem Boden experimentell festgestellter Thatsachen fussend, jede rein theoretische Spekulation verwirft und aus dem sorgfältig gesichteten, mit Vorsicht und wissenschaftlicher Strenge gedeuteten Beobachtungsmaterial Schlussfolgerungen von hohem Interesse zieht.

Stumpf hat seine Theorie der „Verschmelzung" ausführlich dargelegt in seinem Werke über Tonpsychologie (2 Bände, Leipzig, Hirzel), in dem Aufsatze: „Neueres über

Tonverschmelzung" (Zeitschrift für Physiologie und Psychologie der Sinnesorgane, Bd. XV, 1897, Leipzig, Barth) und, in einer „für Musikgelehrte und nachdenkliche Musiker" bestimmten Form, in den „Beiträgen zur Akustik und Musikwissenschaft" unter dem Titel: „Consonanz und Dissonanz" (1898, 1. Heft, Leipzig, Barth). Wer sich mit den Stumpf'schen Anschauungen vertraut machen will und sich für die von ihm aufgestellten Lehren interessirt, dem wird die geistvolle Darstellung Stumpf's grossen Genuss bereiten. Hier kann es sich nur darum handeln, im Anschluss an die vorgetragenen Lehren die Grundlinien der neuen Theorie zu skizziren.

Stumpf kommt nach streng sachlicher Prüfung aller älteren Theorien zu dem Schlusse, dass der Unterschied zwischen consonanten und dissonanten Intervallen nicht in unbewussten Funktionen oder in Gefühlen und nicht in begleitenden Obertönen und Schwebungen liegen könne, sondern einzig und allein in den Tönen selbst, welche man als consonant oder dissonant bezeichnet. Ein scheinbar sehr naheliegender und fast selbstverständlicher Gedanke, der auf die Zustimmung jedes Musikers rechnen kann! Und doch wie wesentlich unterscheidet er sich von den oben auseinandergesetzten Lehren, welche sich in erster Linie auf Schwebungen, Obertöne und Untertöne, also auf Begleiterscheinungen stützen und die Entscheidung über Consonanz oder Dissonanz viel mehr diesen begleitenden Erscheinungen, als den consonirenden oder dissonirenden Tönen selbst zuschreiben!

Wenn zwei Töne gleichzeitig erklingen, so nähert sich ihr Zusammenklang bald mehr, bald weniger dem Eindruck eines Tones, die beiden Töne verschmelzen bald mehr bald weniger zu einem einheitlichen Eindruck, es findet grössere oder geringere Verschmelzung statt. Zahlreiche Beobachtungen führen zu dem Resultate, dass der Eindruck um so einheitlicher, der Grad der Verschmelzung um so vollkommener ist, je consonanter das Intervall genannt wird.

Verschmelzung ist „dasjenige Verhältniss zweier Empfindungsinhalte, wonach sie nicht eine blosse Summe, sondern ein Ganzes bilden. Die Folge dieses Verhältnisses ist, dass mit höherer Stufe desselben der Gesammteindruck sich unter sonst gleichen Umständen immer mehr dem einer Empfindung nähert und immer schwerer analysirt wird" (Tonpsychologie II, pag. 128).

Die beiden gleichzeitig erklingenden Töne können uns selbst dann als ein mehr oder weniger einheitliches Ganzes erscheinen, wenn wir im Stande sind, die Töne auseinanderzuhalten und als zwei zu erkennen. Ein musikalisch gebildetes und geübtes Ohr wird (fast ausnahmslos) bei einer Oktave, Quinte, Quarte, Terz, Sexte zwei Töne unterscheiden, und doch wird ihm der Eindruck bei der Oktave einheitlicher, der Verschmelzungsgrad vollkommener erscheinen als bei den andern Intervallen. Es gehört freilich eine gewisse psychologische Beobachtungsfähigkeit dazu, um sich bei Feststellung des Verschmelzungsgrades nicht durch Rücksichten beirren zu lassen, welche mit dem Begriff der Verschmelzung nicht direkt zusammenhängen. Es darf nicht auf den mehr oder weniger angenehmen Eindruck, auf die musikalische Stellung und Bedeutung des Intervalls, auf Verwandtschaft und ähnliche Kennzeichen geachtet werden, sondern einzig und allein auf die grössere oder geringere Einheitlichkeit des Eindrucks. Bei Unmusikalischen fallen die durch die musikalische Auffassungsfähigkeit bedingten Gefühlsunterschiede weg und die elementare sinnliche Empfindung kommt, wenn auch etwas abgeschwächt, doch in unvermischterer, reinerer Weise zur Geltung. Es sind desshalb auch Unmusikalische bei Versuchen über Tonverschmelzung zu gebrauchen, wenn man ihnen nur die Frage vorlegt, ob ihnen ein gegebener Zweiklang als einheitliches Ganzes erscheine oder ob sie darin zwei Töne zu unterscheiden vermögen.

Stumpf unterscheidet auf Grund eigener Beobachtungen und in Uebereinstimmung mit andern musikalisch gebildeten und psychologisch geschulten Beobachtern die folgenden von einander scharf abgegrenzten Stufen der Verschmelzung, von der höchsten Stufe abwärts bis zur geringsten:

1. Die Verschmelzung der Oktave (1 : 2),
2. Die Verschmelzung der Quinte (2 : 3),
3. Die Verschmelzung der Quarte (3 : 4),
4. Die Verschmelzung der natürlichen Terzen und Sexten (4 : 5, 5 : 6, 3 : 5, 5 : 8), zwischen denen keine deutlichen Verschmelzungsunterschiede zu konstatiren sind,
5. Die Verschmelzung aller übrigen Tonverbindungen, welche alle den geringsten Grad der Verschmelzung zeigen. (Ueber die sog. Siebenergruppe siehe unten.)

Das Hauptgesetz der Verschmelzung ist die Abhängigkeit der Verschmelzungsstufen von den eben genannten Schwingungsverhältnissen. Daneben bestehen folgende Gesetze:

a) Der Verschmelzungsgrad ist unabhängig von der Tonregion. (Nur in den höchsten Tonregionen über 4000 Schwingungen sind die einzelnen Grade nicht mehr scharf von einander zu unterscheiden.)

b) Der Verschmelzungsgrad ist unabhängig von der absoluten und relativen Stärke der verschmelzenden Töne. Durch Hinzutreten beliebiger weiterer Töne zu zwei Tönen wird der Verschmelzungsgrad der beiden gegebenen Töne unter sich nicht beeinflusst. Aus den letzten beiden Sätzen folgt die Unabhängigkeit der Verschmelzungsgrade von den Obertönen, also von der Klangfarbe. Zwei Töne haben denselben Grad der Verschmelzung, ob sie als einfache Töne oder als Grundtöne von Klängen gegeben werden.

c) Sehr kleine Abweichungen der Schwingungszahlen von den angegebenen Verhältnissen haben noch keine merkliche Aenderung des Verschmelzungsgrades zur Folge. Je geringer der Grad der Verschmelzung eines Intervalls ist, um so weniger wird eine geringe Verstimmung des Intervalls dessen Verschmelzung beeinflussen. Wird die Abweichung vergrössert, so geht die Verschmelzung rasch in die niedrigste Stufe über, und zwar um so rascher, je stärker die ursprüngliche Verschmelzung war.

d) Bei Erweiterung eines Intervalls um eine oder mehrere Oktaven kehren dieselben Verschmelzungsgrade wieder. (Erweiterungsgesetz.)

e) Die Verschmelzung bleibt auch in der blossen Phantasie-Vorstellung erhalten.

Das zunächst durch zahlreiche Beobachtungen Musikalischer gewonnene Hauptgesetz der Verschmelzung, die Abhängigkeit des Verschmelzungsgrades von den Zahlenverhältnissen 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 u. s. f. und die Reihenfolge der einzelnen Stufen der Verschmelzung liess nun Stumpf in folgender Weise durch Unmusikalische bestätigen: Er gab seinen Versuchspersonen 2 Töne zugleich an, eine ganze Reihe verschiedener Intervalle, ohne die betreffenden Personen vorher wissen zu lassen, ob er sie nur einen, oder zwei verschiedene Töne hören lasse. Die Versuchspersonen mussten einzeln in jedem Falle darüber entscheiden, ob sie einen Ton oder zwei Töne gehört hatten. Ein richtiges Urtheil, die Aussage dass 2 Töne zu hören seien, liess auf einen geringeren Grad der Verschmelzung schliessen als

ein falsches Urtheil (Einheits-Urtheil). Die Zahl der falschen Urtheile bietet einen Maassstab für den Grad der Verschmelzung. Aus einer grösseren Zahl von Versuchsreihen, aus Tausenden abgegebener Urtheile zahlreicher Versuchspersonen ergab sich die Prozentzahl falscher Urtheile, also der Einheits-Urtheile im Durchschnitt

für Oktaven zu 75 %,
für Quinten zu 40—60 %,
für Quarten zu 28—36 %,
für Terzen und Sexten zu 20—30 %.

(Grössere statistische Zusammenstellungen finden sich in den zitirten Schriften Stumpf's.)

Es ist von hohem Interesse, dass die von musikalischen Beobachtern festgesetzte Reihenfolge der Verschmelzungsstufen und die Grade der Verschmelzung in der Zahl der Einheits-Urtheile Unmusikalischer vollkommen entsprechenden Ausdruck finden. Die eben angegebenen Prozentzahlen können (obschon die Annahme einfacher Proportionalität an und für sich willkürlich ist) geradezu als Maass für den Grad der Verschmelzung betrachtet werden. Hiernach hat Stumpf eine Verschmelzungskurve konstruirt (Tonpsychologie II, pag. 176), welche in folgender Weise zu deuten ist: Man halte einen Ton fest und lasse einen zweiten Ton allmählich vom Einklang aus in die Höhe

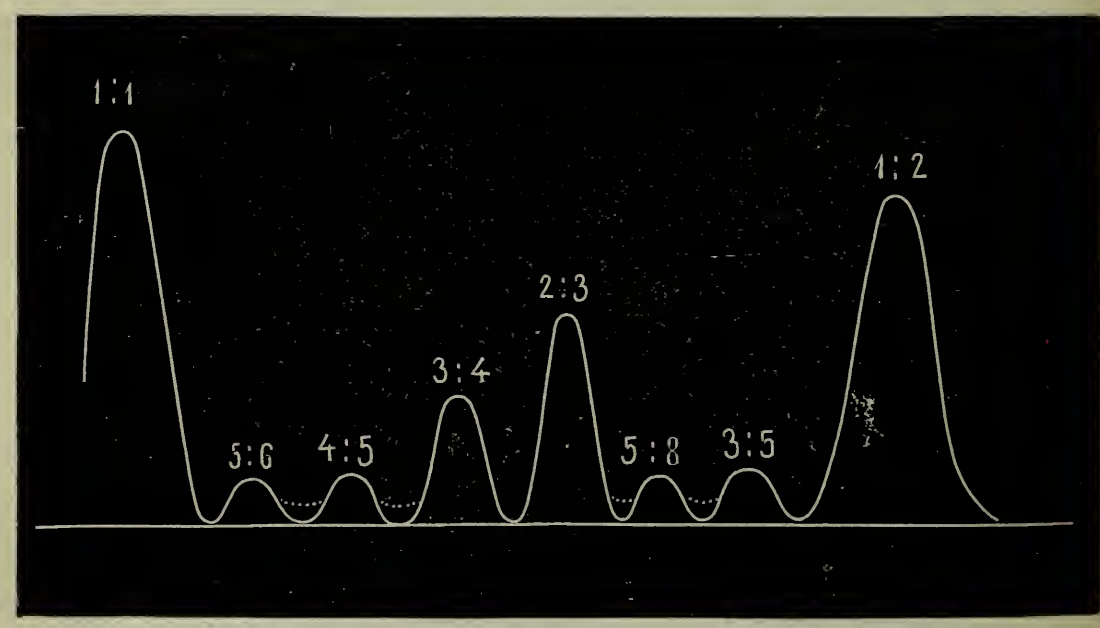


Fig. 60.

steigen bis zur Oktave. Dann verändert sich während dieses Vorganges der Grad der Verschmelzung innerhalb sehr weiter Grenzen. Für den Einklang ist die Verschmelzung eine vollkommene, der Grad der Verschmelzung also ein Maximum, so hoch als er überhaupt sein kann. Bei der Erweiterung des Einklanges auf eine Sekunde sinkt die Verschmelzung auf Null, steigt dann wieder bei der Erweiterung auf eine kleine Terz u. s. f. Je höher der Gipfel der Kurve ist, um so grösser der Grad der Verschmelzung. Man kann aus der vorstehenden Figur ersehen, dass auf jeden Gipfel eine Senkung, ein Absturz folgt, der um so steiler ist, je höher sich der Gipfel erhebt. Je zwei benachbarte Gipfel sind durch ein Thal von einander getrennt. Die Höhenunterschiede zwischen den höheren Gipfeln sind grösser als diejenigen zwischen den niedrigeren. Man kann also aus der Figur ohne Weiteres ablesen, was wir oben in Worten sagten, nämlich dass die Verschmelzung bei der Verstimmung eines Intervalls um so rascher abnimmt, je höher sein Verschmelzungsgrad ist, ferner dass die einzelnen Stufen der Verschmelzung scharf von einander geschieden sind und dass die Unterschiede zwischen den höheren Verschmelzungsstufen grösser sind als diejenigen zwischen den geringeren. (Die punktirten Linien deuten an, dass es zweifelhaft ist, ob die Verschmelzung in der Mitte zwischen den betreffenden Intervallen auf Null sinke oder nur auf einen minimalen Grad.)

Es erscheint zunächst paradox, auf Grund der Urtheile Unmusikalischer eine derartige Verschmelzungskurve zu konstruiren, und doch ist, wie schon angedeutet, die Rechtfertigung dieser Schlussweise nicht schwer: „dieselbe Eigenschaft der Zusammenklänge, welche für den Musiker, indem er sie wahrnimmt, den Consonanzunterschied ausmacht, bedingt, ohne für sich wahrgenommen zu werden, die Unterschiede in den Prozentzahlen der falschen Urtheile über die Anzahl der gleichzeitig gehörten Töne."

Auf den Begriff der Verschmelzung gründet nun Stumpf seine Lehre der Consonanz und Dissonanz, deren Grundlinien er in der jüngsten der oben angeführten Arbeiten (Februar 1898) dargelegt hat.

Consonant sind alle zu den höheren Verschmelzungsstufen gehörenden Tonverbindungen (Stufen 1—4); dissonant alle zu der niedrigsten Verschmelzungsstufe (5) gehörenden

Verbindungen. Die Consonanz ist um so vollkommener, je höher die Verschmelzungsstufe ist.

Zur Definition der Consonanz als solcher reichen die Verschmelzungsstufen hin, nicht aber zur Definition des Begriffs eines consonanten musikalischen Intervalls. Terzen und Sexten, die zu einer und derselben Verschmelzungsstufe gehören, würden sich von einander nicht unterscheiden, wenn der Verschmelzungsgrad zur eindeutigen Charakterisirung eines Intervalls hinreichen würde. Es muss ausserdem der Begriff des relativen Abstandes zu Hülfe genommen werden.

Ein consonantes Intervall in musikalischem Sinne ist „ein Tonverhältniss, welches primär durch eine der höheren Verschmelzungsstufen, sekundär aber, d. h. bei gleicher Verschmelzung, durch den relativen Abstand der beiden Töne gegeben ist". — Relativer Abstand ist der Abstand der Intervalltöne, bezogen auf einen bestimmten Ausgangston und eine bestimmte Richtung.

Der Helmholtz'sche Begriff der Klangverwandtschaft wird von Stumpf in denjenigen der Tonverwandtschaft umgewandelt, wodurch es möglich wird, auch von Verwandtschaft einfacher Töne zu reden. Der Begriff der Tonverwandtschaft wird aus dem Consonanzbegriff abgeleitet.

Direkt verwandt oder verwandt im ersten Grade sind zwei Töne, welche unter einander consoniren, d. h. in höheren Graden verschmelzen.

Indirekt verwandt und zwar verwandt im zweiten Grade sind zwei Töne, von denen jeder mit einem und demselben dritten Tone consonirt. ($\overset{0}{c}$ mit $\overset{0}{d}$ durch Vermittlung von $\overset{0}{g}$, $\overset{0}{c}$ mit $\overset{-1}{h}$ ebenfalls durch Vermittlung von $\overset{0}{g}$, $\overset{0}{c}$ mit $\overset{0}{b}$ durch Vermittlung von $\overset{0}{f}$, oder mit $\overset{+1}{b}$ durch Vermittlung von $\overset{0}{g}$ u. s. f.) — Indirekt verwandt überhaupt sind zwei Töne dann, wenn sie durch einen oder mehrere Töne mit einander so verbunden werden können, dass jeder Ton der Reihe mit seinen Nachbarn consonirt.

Neben den Verwandtschaftsgraden kann man, je nach den die Verwandtschaft vermittelnden Intervallen, verschiedene Arten von Verwandtschaft unterscheiden: Quintenverwandtschaft, Terzenverwandtschaft, Quartenverwandtschaft, Sextenverwandtschaft, Quint-Terzen-Verwandtschaft u. s. w.

Eine ganz besondere Stellung nimmt die Oktave ein. Das schon oben angeführte sog. Erweiterungsgesetz sagt aus, dass die um eine Oktave erweiterten Intervalle die gleiche Verschmelzung, also denselben Grad von Consonanz besitzen, wie die ursprünglichen Intervalle. Ferner würde sich, wenn Quinten und Quarten denselben Verschmelzungsgrad hätten, in Bezug auf die sog. Umkehrung der Intervalle das Gesetz aussprechen lassen, dass die Umkehrung den Grad der Consonanz eines Intervalls nicht verändert. Dieses Gesetz ist zwar für Quinten und Quarten nur als annähernd richtig zu betrachten, stimmt dagegen für Terzen und Sexten so genau als es wünschbar ist. Die Zusammenfassung der beiden eben erwähnten Gesetze (Erweiterungs- und Umkehrungsgesetz) führt zu dem Satze: dass die Ersetzung eines Intervalltons durch seine höhere oder tiefere Oktave (oder auch Doppeloktave u. s. f.) die Consonanz nicht verändert. Dieser Satz ist als annähernd richtig zu betrachten. Legt man ihn den weiteren Schlussfolgerungen zu Grunde, so führt er zu dem Schlusse, dass die Verwandtschaft zweier Töne durch Oktaventransposition nicht beeinflusst wird und es demnach genügt, in Betreff der direkten Verwandtschafts-Arten nur Quintenverwandtschaft und Terzenverwandtschaft als Hauptarten gelten zu lassen, aus denen sich die anderen Arten entweder durch Umkehrung oder (bei indirekter Verwandtschaft) durch Aneinander-Kettung ableiten lassen.

Da Quinten und Quarten einer höheren Verschmelzungsstufe angehören und einen höheren Grad von Consonanz haben als Terzen und Sexten, so ist die Quintenverwandtschaft eine stärker bindende als die Terzenverwandtschaft.

Unter Zuhülfenahme des Begriffs der Tonverwandtschaft ist es nun auch möglich, aus den zahllosen möglichen Tonverbindungen der niedrigsten Verschmelzungsstufe gerade diejenigen auszuscheiden, welche musikalisch verwendbar sind, also als Dissonanzen in musikalischem Sinne bezeichnet werden können. Soll irgend ein Intervall zweier Töne Anspruch darauf machen, als musikalisches Intervall zu gelten, so müssen die beiden Intervalltöne irgendwie mit einander verwandt sein, entweder direkt oder indirekt. Hiernach kann also der Begriff des musikalischen Intervalls in folgender Weise definirt werden: „Ein Intervall in musikalischem Sinne ist ein Verhältniss zweier Töne, welches gegeben ist primär durch ihre Verwandtschaft, sekundär aber, d. h. bei gleicher Verwandtschaft, durch den relativen Abstand der beiden Töne.“ —

Von Musikern wird fast allgemein betont, dass zwischen Consonanzen und Dissonanzen nicht ein gradueller, sondern ein *spezifischer* Unterschied bestehe. Es fragt sich, inwiefern sich diese Ansicht begründen lässt. Ein Gegensatz zwischen Consonanz und Dissonanz besteht jedenfalls insofern, als bei den höheren Verschmelzungsgraden der verwandtschaftliche Zusammenhang der beiden Töne *direkt* erfasst wird, während man bei den musikalischen Intervallen der niedersten Verschmelzungsstufe die Verwandtschaft nur *indirekt* erfassen kann. Dieser Umstand gibt uns eine gewisse Berechtigung, die musikalischen Intervalle der niedersten Verschmelzungsstufe als Dissonanzen den Intervallen der höheren Verschmelzungsstufen gegenüberzustellen und eine Grenzlinie zwischen Consonanz und Dissonanz zu ziehen. Die indirekte Verwandtschaft ist das einzige Kennzeichen, durch welches sich die musikalischen Dissonanzen von den andern musikalisch unbrauchbaren Tonverbindungen der untersten Verschmelzungsstufe unterscheiden. Würde man den niedersten Verschmelzungsgrad als graduelle Fortsetzung der höhern Verschmelzungsstufen auffassen, so würde die Grenzlinie zwischen musikalischen Dissonanzen und Missklängen überhaupt dahinfallen. Eine klar nachweisbare und erkennbare indirekte Beziehung ist bindender als eine kaum erkennbare direkte. Die Fähigkeit, indirekte Verwandtschaft als solche aufzufassen, entwickelte sich historisch schon früh. Dadurch war aber für den Begriff der musikalischen Dissonanz nach beiden Seiten hin eine Grenze gezogen, sowohl nach der Seite der entschiedenen direkten Verwandtschaft, also der Consonanz, als nach der Seite des absoluten, musikalisch sinnlosen Missklanges.

Eine ganz eigenthümliche Stellung nehmen diejenigen Intervalle ein, welche mit der Zahl 7 zusammenhängen, nämlich die Intervalle 4 : 7 (Natürliche Septime, 807''), 5 : 7 (485'') und 6 : 7 (222''), zu denen man auch den Tritonus 32 : 45 (492'') zählen kann, da er sich von dem Intervall 5 : 7 (485'') nur wenig unterscheidet. Diese Intervalle zeigen, trotzdem wir sie oben stillschweigend unter die niedrigste Verschmelzungsstufe (5) zählten, eine etwas grössere Verschmelzung als alle andern Intervalle der untersten Stufe. Man könnte sie allenfalls als besondere Uebergangsgruppe, als sog. *Siebenergruppe* zwischen der 4. und 5. Verschmelzungsstufe einschalten. Ob die Ein-

schaltung der Siebenergruppe zur Verwischung der Grenzlinie zwischen Consonanz und Dissonanz beiträgt, hängt davon ab, ob das Ohr bei den Intervallen der Siebenergruppe im Stande ist, eine direkte Verwandtschaft der beiden Intervalltöne zu erkennen. Diese Frage ist nicht ganz leicht zu entscheiden. Zwar ist es kaum zweifelhaft, dass z. B. ein Dominantseptimenakkord die Dissonanz durch Einführung der natürlichen Septime an Stelle der eigentlichen Dominant-Septime gemildert wird; aber das Ohr verlangt bei der musikalischen Anwendung des Dominant-Septimenakkords in der Regel nicht Consonanz, sondern will den dissonanten Charakter dieses Akkords aufrecht erhalten wissen. So ist also selbst in diesem Falle die musikalische Verwendung der „Siebener" sehr zweifelhaft und es darf wohl als sicher gelten, dass das Kirnberger'sche „i" sammt den damit zusammenhängenden Intervallen in der praktischen Musik so gut wie keine Verwendung findet. Die entschieden dissonanten, durch eine unzweideutige indirekte Verwandtschaft bestimmten Intervalle werden einer nur schwer zu erkennenden direkten Verwandtschaft vorgezogen. Das musikalische Ohr verlangt entweder eine entschiedene direkte Verwandtschaft, oder eine nicht zu entfernte indirekte. Die Siebenergruppe nimmt eine Mittelstellung ein, welche ihre Existenzberechtigung als fraglich erscheinen lässt. Bei der historischen Entwicklung des Tonsystems wurde sie übergangen. Wäre sie als zu Recht bestehend anerkannt, so würde von den Musikern auch weniger der spezifische Unterschied zwischen Consonanz und Dissonanz betont werden.

Zur Definition des Begriffs der Consonanz und Dissonanz kann das Gefühlsmoment zwar nicht dienen, aber es kann herangezogen werden, um zur Erklärung des spezifischen Unterschiedes zwischen Consonanz und Dissonanz einen Beitrag zu liefern.

Es ist zweifellos, dass für unser Gefühl das Auflösungsbedürfniss ein unterscheidendes Merkmal der Dissonanz gegenüber der Consonanz ist; dieses Bedürfniss selbst ist das Resultat der historischen Entwicklung der harmonischen Musik. Die rein sinnliche Annehmlichkeit und Unannehmlichkeit ist, wenn sie auch nicht als primäres Merkmal gelten kann, doch nicht ganz ausser Acht zu lassen; sie verschärft zwar nicht ausnahmslos, aber doch in der Regel den Unterschied zwischen Consonanz und Dissonanz, und macht es auch möglich, unter den Dissonanzen selbst verschiedene Grade von Schärfe zu unterscheiden.

Noch bleibt die Frage zu beantworten, wie die Stumpf'sche Verschmelzungslehre, die doch in erster Linie von dem Zusammenklang zweier oder mehrerer Töne ausgeht, auf eine melodische Folge von Tönen Anwendung finden kann. Eine Theorie der Consonanz und Dissonanz muss natürlich ebensowohl auf die Melodie als auf die Harmonie Rücksicht nehmen, da wir Consonanz und Dissonanz aufeinanderfolgender Töne ebenso scharf zu beurtheilen vermögen, als diejenige gleichzeitig erklingender*). Stumpf sucht und findet die Möglichkeit der Uebertragung seiner Lehre auf die melodische Aufeinanderfolge von Tönen in folgenden Erfahrungsthatsachen: Erstens ist darauf hinzuweisen, dass (wie oben unter e angedeutet) die Verschmelzung zweier und mehrerer Töne auch in der blossen Vorstellung erhalten bleibt. Auch in der Vorstellung unterscheiden sich die Verschmelzungsstufen deutlich von einander. Stellen wir uns z. B. eine Oktave vor, so können wir dies nicht thun, ohne denselben Eindruck der Einheitlichkeit zu haben wie beim wirklichen Hören; ähnlich bei anderen Intervallen. — Zweitens bleibt die Vorstellung, auch nach Aufhören der betreffenden Empfindung, noch eine Zeit lang im Bewusstsein. Nur diese Thatsache macht es möglich, z. B. einen gesprochenen Satz als Ganzes zu erfassen und zu verstehen. Während wir den Schluss des Satzes hören, stellen wir uns noch den Anfang vor, natürlich nicht als etwas Gleichzeitiges, sondern als etwas soeben Vergangenes; dadurch wird erst der Zusammenhang zwischen den einzelnen Wörtern und Satztheilen hergestellt und der Inhalt des Satzes verständlich. Ganz ebenso ist es bei Melodien.

Es ist scharf zu unterscheiden, „ob wir etwas gleichzeitig vorstellen oder ob wir es als Gleichzeitiges vorstellen".

Es kann sowohl zwischen der Empfindung eines gegenwärtigen Tones und der Vorstellung eines vergangenen als zwischen den Vorstellungen mehrerer Töne unter sich Verschmelzung stattfinden.

*) Nach den neuesten Versuchen Stumpf's sind Abweichungen von der Reinheit consonanter Intervalle bei aufeinanderfolgenden Tönen ebenso gut, zum Theil sogar wesentlich besser zu konstatiren als bei gleichzeitig erklingenden. Es hängt dies mit der allgemeinen Thatsache zusammen, dass überhaupt zwei Eindrücke leichter mit einander verglichen werden, wenn sie aufeinanderfolgen, als wenn sie zusammenfallen. Diese Thatsache bezieht sich nicht nur auf Gehörseindrücke, sondern auf Eindrücke beliebiger Art.

„Die primären Gedächtnissbilder, welche sich einer Empfindung unmittelbar anschliessen, sind nicht identisch mit den Erinnerungsbildern, welche erst nach kurzer oder langer Zwischenzeit wieder auftauchen."

Die Stumpf'sche Theorie der Consonanz und Dissonanz nimmt zum Ausgangspunkt die Thatsachen der Verschmelzung. Diese selbst bedürfen natürlich wieder einer Erklärung. Stumpf weist nach, dass die Erklärung nur auf physiologischem Gebiete zu suchen ist. Beim gleichzeitigen Erklingen oder blossen Vorstellen zweier Töne finden im Gehirn zwei Prozesse statt, die in einer gewissen Verknüpfung mit einander stehen, in engerer bei einfachen, in weiterer bei weniger einfachen Schwingungsverhältnissen. Diese Prozesse und die Art ihres Zusammenwirkens („spezifische Synergie") sind ebenso erklärungsbedürftig, wie viele andere Thatsachen, die wir als etwas selbstverständliches hinzunehmen gewöhnt sind. „Wir wollen ehrliche Armuth dem verdächtigen Reichthum vorziehen und eingedenk bleiben, dass für die unmittelbaren und letzten Grundlagen des gesammten Empfindungslebens mit Sicherheit überall noch keine andere als eine allgemein-begriffliche Formulirung möglich ist."

Darf also das vorliegende Problem auch nicht als ein völlig gelöstes betrachtet werden, so bleibt doch Stumpf nicht allein das unbestreitbare Verdienst, Klarheit in die Fragestellung gebracht und vor Irrwegen bewahrt zu haben, sondern auch auf der Grundlage experimentell festgestellter, wenn auch noch der Erklärung bedürftiger Thatsachen, eine mit der Erfahrung und den Thatsachen des musikalischen Bewusstseins vollkommen übereinstimmende Consonanzlehre geschaffen zu haben.

Wir dürfen also hoffen, die nothwendig zu ersteigenden Vorberge hinter uns zu haben und an demjenigen Punkte angelangt zu sein, von welchem aus wir unbeirrt dem höheren Gipfel, dem fernen Ziele, zustreben können.

Anhang.

Ergänzungen zur Theorie der Wellenbewegung.

90. Einfache, pendelartige Schwingungen eines Punktes. Sinus-Schwingungen. (Zu N. 57 und 66.) — Ein materieller Punkt (z. B. der Punkt P_0 in Fig. 14 pag. 198) werde durch irgend eine äussere Kraft in gerader Linie (in Fig. 14 nach oben) aus seiner Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen. Er werde nach der Gleichgewichtslage durch eine Kraft (Elastizität) zurückgetrieben, welche seiner Entfernung von der Gleichgewichtslage proportional sei. Bezeichnen wir mit y diese Entfernung, nach der einen Richtung hin (nach oben) als positiv, nach der andern (nach unten) als negativ; ferner mit t die Zeit, welche seit einem bestimmten Anfangsmomente verflossen ist; mit dt eine unendlich kleine Zunahme der Zeit, die Dauer des nächsten Zeitmomentes; endlich mit dy die dieser Dauer entsprechende Zunahme (resp. Abnahme) der Entfernung y, so ist offenbar $\frac{dy}{dt} = v$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt zur Zeit t bewegt. Diese Geschwindigkeit ist als positiv aufzufassen, wenn die Entfernung y wächst, dagegen als negativ, wenn diese Entfernung abnimmt. — Die Zunahme der Geschwindigkeit während des Zeittheilchens dt ist die Beschleunigung; diese ist also gleich $\frac{dv}{dt}$, d. h. gleich $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}$ oder $= \frac{d^2 y}{dt^2}$ zu setzen.

Nennen wir nun m die Masse des beweglichen Punktes und K die Kraft, welche diesen nach der Gleichgewichtslage hintreibt, so

ist bekanntlich Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, oder $K = m \frac{d^2y}{dt^2}$. Gemäss unserer Voraussetzung über das der Bewegung zu Grunde liegende Kraftgesetz ist aber die Kraft K der Entfernung y proportional. Die Kraft K strebt stets dahin, die Entfernung y zu verkleinern und ist demgemäss bei positiven Werthen von y als negativ, bei negativen Werthen von y als positiv zu betrachten. Ist e eine positive Proportionalitäts-Constante, so ist also

$$K = - e \cdot y$$

zu setzen. Da $K = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$ ist, so folgt somit $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = - e\, y$, und $\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{e}{m} \cdot y$.

Setzen wir die positive Constante $\frac{e}{m}$ zur Abkürzung gleich k^2, so haben wir demgemäss die fundamentale Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - k^2 y \qquad (1)$$

aus welcher sich alle weiteren Beziehungen durch einfache Integrationen ergeben. Durch beidseitige Multiplikation mit $2 \frac{dy}{dt} \cdot dt$ und nachherige Integration ergibt sich

$$2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} dt = - k^2 \cdot 2\, y\, dy$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = - k^2 y^2 + C$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich leicht in folgender Weise: Wir nennen a die grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage, welche der bewegliche schwingende Punkt überhaupt annehmen kann, also die Schwingungsamplitude. In demselben Momente, wo der Punkt diese äusserste Entfernung erreicht, wird seine Geschwindigkeit gleich Null und die Bewegungsrichtung kehrt sich um. Für $y = a$ wird also $\frac{dy}{dt} = v = 0$ und es wird also nach der letzten Gleichung $o = - k^2 a^2 + C$, und somit $C = k^2 a^2$. Es wird also nun

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -k^2y^2 + k^2a^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 = k^2(a^2 - y^2) \qquad (2)$$

Seine grösste Geschwindigkeit erreicht der schwingende Punkt für $y = o$, d. h. beim Passiren der Gleichgewichtslage; diese Maximalgeschwindigkeit ist $= \pm\, k\, a$, also proportional der Schwingungsamplitude a. (s. N. 82 Schluss.)

Aus (2) folgt nun weiter

$$\frac{dy}{dt} = k\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = k\, dt$$

$$\frac{dy}{a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}} = k\, dt$$

Ist t_0 die Zeit, zu welcher der schwingende Punkt die Gleichgewichtslage verliess, so sind $t = t_0$ und $y = o$ zwei entsprechende Werthe von t und y, und es ergibt sich weiter durch nochmalige Integration

$$\int_0^y \frac{dy}{a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}} = k\int_{t_0}^t dt$$

$$\text{arc sin}\ \frac{y}{a} = k\,(t - t_0)$$

$$\frac{y}{a} = \sin k\,(t - t_0)$$

$$y = a \sin k\,(t - t_0) \qquad (3)$$

Man pflegt meist als Anfangspunkt, von dem aus man die Zeit t misst, den Moment anzunehmen, in welchem der schwingende Punkt die Gleichgewichtslage verliess, d. h. man setzt $t_0 = o$ und somit

$$y = a \,.\, \sin kt \qquad (3\,a).$$

Es wird $y = o$ für $t = o$; $y = a$ für $t = \frac{1}{k} \cdot \frac{\pi}{2}$; $y = o$ für $t = \frac{1}{k} \cdot \pi$; $y = -a$ für $t = \frac{1}{k} \cdot \frac{3\pi}{2}$, und endlich wieder $y = o$ für $t = \frac{1}{k} \cdot 2\pi$.

Die Werthe $y = o, a, o, -a, o$ bezeichnen die Hauptphasen einer ganzen Schwingung des schwingenden Punktes. Während der schwingende Punkt eine solche ganze Schwingung ausführt, wächst die Zeit stetig von $t = o$ bis zu $\frac{2\pi}{k}$. Es ist also $\frac{2\pi}{k}$ die Schwingungsdauer des schwingenden Punktes. Bezeichnen wir dieselbe mit T, so ist somit

$$T = \frac{2\pi}{k} \qquad (4)$$

Der Werth von y, die Schwingungsphase, verändert sich nicht, wenn man der Zeit t ein beliebiges Vielfaches der Schwingungsdauer T hinzuzählt:

$$a \sin k (t + n T) = a \sin (k t + k n T) = a \sin (k t + 2 n \pi)$$
$$= a \sin kt = y.$$

Ersetzen wir nun in den Gleichungen (3) und (3a) die Constante k gemäss Gleichung (4) durch $\frac{2\pi}{T}$, so verwandelt sich Gleichung (3) in

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \,.\, \frac{t - t_0}{T} \qquad (5)$$

und Gleichung (3a) in

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (5a)$$

Die Entfernung des schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage drückt sich also in sehr einfacher Weise durch den Sinus einer der Zeit proportionalen Grösse aus. — Von solcher Art ist die hin- und herschwingende Bewegung eines Stimmgabelpunktes, die man also mit Recht als Sinus-Schwingung bezeichnet. —

Führen wir auch in den Ausdrücken (2) und (1) für Geschwindigkeit und Beschleunigung an Stelle der Constanten k die Schwingungsdauer T ein, durch die Beziehung $k = \frac{2\pi}{T}$, so wird unter Benützung von Gleichung (5a):

$$v = k \sqrt{a^2 - y^2} = a k \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} = a \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}}$$

$$v = a \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad (6)$$

und

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \,.\, y \,. \qquad (7)$$

Es ist sehr leicht, sich auf rein geometrischem Wege Rechenschaft darüber abzulegen, wo sich der schwingende Punkt P in einem beliebigen Zeitpunkte t befindet. Der schwingende Punkt bewege sich

auf dem vertikalen Durchmesser des beistehenden Kreises, vom Centrum C ausgehend nach oben bis D, dann von D zurück über C schwingend nach E und von da wieder zurück nach C u. s. f. Der Radius des Kreises ist gleich der Schwingungsamplitude, also CD = CB = a.



Fig. 61.

Lassen wir in demselben Augenblicke, wo der schwingende Punkt von C aus aufwärts schwingt, einen andern Punkt (P') sich von B aus auf dem Kreise in rechtläufigem Sinne bewegen und zwar mit der gleichmässigen, konstanten Geschwindigkeit $a \cdot \frac{2\pi}{T}$; dann wird er in der Zeit t einen Kreisbogen BP' zurücklegen, dessen Länge gleich $a\ 2\pi\ \frac{t}{T}$ ist. Der Winkel P'CB, in Bogenmaass gemessen, ist dann offenbar gleich $2\pi\ \frac{t}{T}$ und es wird:

$$P'Q = P'C \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und somit $PC = P'Q = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = y$

d. h. $PC = y$.

Mit andern Worten: Wir finden den Ort, wo sich der schwingende Punkt zur Zeit t befindet, indem wir von P' aus eine Senkrechte zum Durchmesser ED ziehen; da wo diese den Durchmesser schneidet,

also in P, befindet sich der schwingende Punkt zur Zeit t. Die Entfernung y des schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage ergibt sich stets durch Projektion des vom Punkte P' durchlaufenen Bogens BP' auf den Durchmesser ED.

91. Schwingungen einer Punktreihe. Fortschreitende Wellen. Sinus-Kurve. (Zu N. 57 und 66.) — Wir knüpfen an die Betrachtungen über fortschreitende Wellenbewegung unter N. 66 an und denken uns wie in Fig. 14 eine Reihe auf einer geraden Linie liegender Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, ..., von denen jeder eine vertikal auf- und abwärts schwingende Bewegung von der Art ausführt, wie wir sie soeben besprachen. Die schwingende Bewegung gehe ursprünglich vom Punkte P_0 aus und pflanze sich von da nach rechts successive auf die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, ... fort in der Weise, wie es unter N. 66 auseinandergesetzt wurde. Zählen wir die Zeit t von dem Momente an, in welchem der Punkt P_0 seine Gleichgewichtslage verliess und seine vertikal aufwärts gehende Bewegung begann, so ist nach Verfluss der Zeit t die Entfernung des Punktes P_0 von der Gleichgewichtslage (nach Gl. 5a) durch den Ausdruck

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

gegeben. Alle andern Punkte der Punktreihe beginnen ihre Schwingungen später als der Punkt P_0, und zwar um so später, je weiter nach rechts sie von dem Ausgangspunkte P_0 entfernt liegen. Für jeden dieser Punkte ist nach Gleichung (5)

$$y = a \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} \qquad (5)$$

zu setzen, und zwar bedeutet hier t_0 die Zeit, zu welcher der betreffende Punkt seine Gleichgewichtslage verliess, d. h. also offenbar die Zeit, um welche er seine schwingende Bewegung später begann als der Punkt P_0, oder die Zeit, welche die Wellenbewegung brauchte, um sich von P_0 bis zu dem betreffenden Punkte fortzupflanzen. Für diese Zeit t_0 lässt sich leicht ein bequemer Ausdruck finden.

Nennen wir nämlich x die Abscisse des schwingenden Punktes, von P_0 aus gemessen, und y wie bisher die Ordinate, d. h. seine Entfernung von der Gleichgewichtslage; nennen wir ferner, wie in N. 66, c die Geschwindigkeit, mit welcher sich die schwingende Bewegung fortpflanzt, T die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge, so pflanzt sich in der Zeit T die Wellenbewegung um die Wellenlänge λ nach rechts fort und es ist

$$\lambda = c \cdot T;$$

ganz ebenso pflanzt sich in der Zeit t_0 die Wellenbewegung von P_0 aus um die Strecke x nach rechts fort, so dass auch

$$x = c \cdot t_0$$

ist. Es ergibt sich also durch Division der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{t_0}{T}$$

und, wenn wir dies in Gleichung (5) einsetzen:

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (8)$$

Diese fundamentale Gleichung der Wellenlehre stellt die Abhängigkeit der Lage oder des Schwingungszustandes des schwingenden Punktes von der Zeit einerseits, seiner Entfernung vom Ausgangspunkte der Wellenbewegung andrerseits dar. Sie gilt für alle an der schwingenden Bewegung theilnehmenden Punkte, wenn man für jeden Punkt den entsprechenden Werth von x in die Gleichung einsetzt. Sie ist der analytische Ausdruck für eine fortschreitende einfache Wellenbewegung, wie sie in den Figuren 7 und 14 veranschaulicht ist. Sie ist die analytisch-geometrische Formel für die Kurve, welche wir von dem Schreibstifte der Stimmgabel auf die berusste Platte einzeichnen liessen. Die Stimmgabelkurve trägt also mit Recht den Namen: Sinus-Kurve.

Die für transversale fortschreitende Wellen abgeleitete Gleichung (8) ist unmittelbar auf longitudinale Wellen übertragbar, wenn man nur stets unter y die Entfernung des schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage versteht; diese Entfernung ist bei der transversalen Wellenbewegung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung zu messen, bei der longitudinalen in der Fortpflanzungsrichtung selbst.

92. Reflexion einer fortschreitenden Wellenbewegung. Bildung stehender Wellen. (Zu N. 66.) — Nehmen wir nun an, eine durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

dargestellte fortschreitende Wellenbewegung treffe senkrecht auf eine Begrenzung und werde in gleicher Richtung zurückgeworfen, reflektirt. Diese Reflexion hat denselben Erfolg, als ob der fortschreitenden Wellenbewegung eine ebensolche Bewegung direkt entgegentreten würde. Jeder schwingende Punkt steht dann unter dem Einflusse zweier Wellenbewegungen derselben (oder nahezu derselben) Amplitude, welche sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen. Es fragt sich, welches Resultat aus dem Zusammenwirken dieser beiden Wellenbewegungen hervorgehen wird.

Nehmen wir also an, es pflanze sich in einer geradlinigen Punktreihe eine einfache Wellenbewegung vom Punkte A_1 aus (s. Fig. 62) nach rechts, und gleichzeitig vom Punkte A_2 aus eine ebensolche Bewegung nach links hin fort. Der Punkt P stehe unter der Einwirkung dieser beiden Wellenbewegungen, und es sei $A_1P = x_1$; $A_2P = x_2$; $A_1A_2 = x_1 + x_2 = l$.

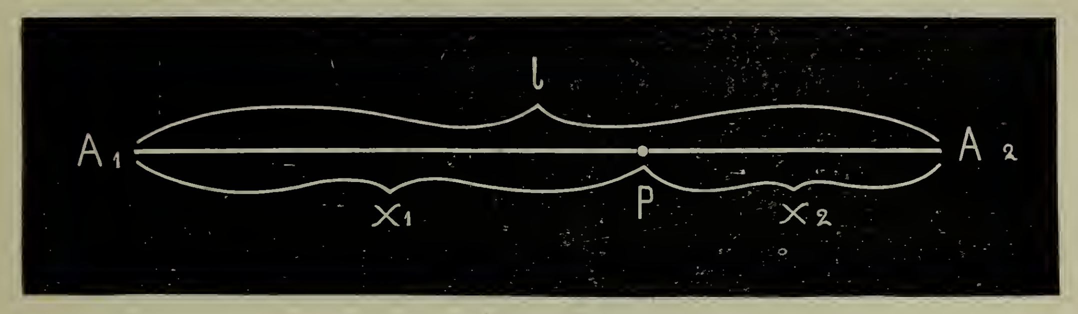


Fig. 62.

Unter der Einwirkung der von links nach rechts sich fortpflanzenden Wellenbewegung allein wäre die Bewegung des Punktes P durch die Gleichung

$$y_1 = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

gegeben; unter dem Einflusse der von A_2 nach links fortschreitenden Bewegung dagegen durch die Gleichung

$$y_2 = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Wirken beide Impulse gleichzeitig auf den Punkt P, so ist die resultirende Bewegung die Summe der Einzelbewegungen und dargestellt durch die Summe

$$y = y_1 + y_2 = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Da $x_1 + x_2 = l$ ist, so können wir $x_2 = l - x_1$ setzen und schreiben

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l - x_1}{\lambda}\right)$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel für die Summe zweier Sinusse ist aber

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \,.\, \cos \frac{p-q}{2}$$

also, auf unseren Fall angewandt:

$$y = a \,.\, 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{2\lambda}\right) \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{l}{2\lambda} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

$$y = 2a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{2\lambda}\right) \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{l}{2\lambda} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

oder wenn wir bei x_1 den Index weglassen und wie früher $A_1P = x$ setzen und ausserdem bedenken, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, d. h. unverändert bleibt, wenn man seinem Bogen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt:

$$y = 2a \cdot \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2\lambda}\right) \quad (9)$$

Diese Gleichung lässt die Natur der resultirenden Bewegung klar erkennen. Jeder einzelne Punkt macht einfache Sinus-Schwingungen, deren Amplitude durch den Faktor

$$2a \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right)$$

gegeben, also von x abhängig ist. Es gibt Punkte, für welche diese Amplitude = O ist. Dies ist der Fall, sobald

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) = 0$$

ist, d. h. für diejenigen Werthe von x, für welche

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

d. h. ein ungerades Vielfaches eines rechten Winkels ist. Es wird dann

$$\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{2n + 1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

n kann jede beliebige ganze Zahl bedeuten. Für alle diese Werthe von x ist die Amplitude = O und die Entfernung y von der Gleichgewichtslage zu jeder Zeit = O. Es sind die Knotenpunkte der Bewegung und die durch die Gleichung (9) dargestellte Wellenbewegung ist eine stehende Wellenbewegung.

Die Abscissen der Knotenpunkte wachsen nach der letzten Gleichung sprungweise um Vielfache von $\frac{\lambda}{2}$, wenn n lauter ganzzahlige Werthe annimmt. Es stehen also je zwei benachbarte Knotenpunkte um $\frac{\lambda}{2}$, d. h. um eine halbe Wellenlänge von einander ab.

Den grössten Werth erreicht die Schwingungsamplitude in denjenigen Punkten, für welche

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) = \pm 1$$

also

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) = n\pi$$

ist. Es wird dann

$$\frac{x}{\lambda} - \frac{l}{2\lambda} = \frac{n}{2}$$

$$x = \frac{l}{2} + n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Diese Punkte sind die Schwingungsbäuche der stehenden Welle; sie stehen ebenfalls um je eine halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ von einander ab, von den benachbarten Schwingungsknoten zu beiden Seiten dagegen um je eine Viertel-Wellenlänge $\frac{\lambda}{4}$.

Wir können nun leicht der Gleichung (9) dadurch eine bequemere und elegantere Form geben, dass wir einerseits den Anfangsmoment, von welchem aus wir die Zeit messen, andrerseits den Ausgangspunkt der Abscissen in zweckentsprechender Weise wählen.

Wir sehen zunächst, dass der Ausdruck für y in Gleichung (9) für alle Werthe von x in einem solchen Zeitmomente verschwindet, wo

$$\frac{t}{T} - \frac{l}{2\lambda} = 0$$

ist. In diesem Momente passiren alle Punkte der Welle gleichzeitig die Gleichgewichtslage. Nennen wir t_0 diesen Zeitpunkt, so wird

$$\frac{t_0}{T} - \frac{l}{2\lambda} = 0, \text{ also } \frac{l}{2\lambda} = \frac{t_0}{T}.$$

Die Gleichung (9) wird also zunächst:

$$y = 2a \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right) \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} \qquad (9a)$$

wo t_0 den Zeitpunkt eines Durchganges durch die Gleichgewichtslage bedeutet.

In dieser letzten Gleichung wird nun weiter y für jeden beliebigen Zeitmoment dann gleich Null, wenn $\cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right) = 0$ ist, also z. B. für denjenigen Punkt der Welle, für welchen $\frac{x}{\lambda} - \frac{t_0}{T} = \frac{3}{4}$ ist; denn für diesen wird $\cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right) = \cos 3\,\frac{\pi}{2} = 0$. Nennen wir x_0 die Abscisse dieses Knotenpunktes, so ist somit

$$\frac{x_0}{\lambda} - \frac{t_0}{T} = \frac{3}{4} \text{ und } \frac{t_0}{T} = \frac{x_0}{\lambda} - \frac{3}{4}$$

zu setzen, und es wird nun Gleichung (9a):

$$y = 2a \cos \left[\frac{3}{2}\pi + 2\pi \frac{x - x_0}{\lambda}\right] \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}$$

oder einfach, wenn wir zugleich $2a = A$ setzen:

$$y = A \sin 2\pi \frac{x - x_0}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} \qquad (10)$$

In dieser Gleichung bedeutet also x_0 die Abscisse eines Knotenpunktes und t_0 die Zeit eines Durchganges durch die Gleichgewichtslage. A ist die grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage, welche überhaupt erreicht werden kann, der Maximalwerth von y, der nur an den Schwingungsbäuchen zu erreichen ist, nämlich für $x-x_0 = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ und $t-t_0 = (2n+1)\frac{T}{4}$. A heisst die Haupt-Amplitude der stehenden Welle.

Sowohl mit Rücksicht auf die Abscissendifferenz $x-x_0$ als mit Rücksicht auf die Zeitdifferenz $t-t_0$ ist die Entfernung y durch eine Sinus-Funktion dargestellt. Ob man y als Funktion von $x-x_0$ oder als Funktion von $t-t_0$ betrachten mag: in beiden Fällen führt die analytisch-geometrische Darstellung zu einer Sinus-Kurve.

Die Knotenpunkte der stehenden Welle sind die Nullpunkte des Faktors $A \sin 2\pi \frac{x-x_0}{\lambda}$. Zwischen je zwei benachbarten Nullpunkten oder Knotenpunkten hat dieser Faktor in jedem Momente stets dasselbe Vorzeichen, entweder nur ein positives oder nur ein negatives. Alle zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten liegenden Punkte der stehenden Welle bewegen sich gleichzeitig nach derselben Richtung hin. Für zwei Punkte dagegen, die von einander durch einen Knotenpunkt, also durch einen Nullpunkt des Faktors $A \sin 2\pi \frac{x-x_0}{\lambda}$ getrennt sind, hat dieser Faktor entgegengesetztes Vorzeichen. In zwei benachbarten, durch einen Knotenpunkt von einander getrennten Abtheilungen ist also der Bewegungszustand ein entgegengesetzter, wie es in der Figur 2 auf pag. 160 zur Darstellung gebracht wurde.

Wir sehen also in der That, dass das Resultat einer Reflexion die Bildung stehender Wellen von der Art ist, wie es unter N. 66 auseinandergesetzt wurde. Die Lage der Knotenpunkte zu der Begrenzung, an der die Reflexion erfolgt, hängt von der Natur des Mediums ab, auf welches die fortschreitende Welle stösst. Hat dieses Medium grössere Dichtigkeit, stösst die Welle auf starren Widerstand, so bildet sich an der Grenze ein Knoten; ist die Dichtigkeit dieses Mediums dagegen geringer als diejenige des Mediums, in welchem sich die fortschreitende Welle vor der Reflexion fortpflanzte, so bildet sich an der Grenze ein Schwingungsbauch. Der erste Fall entspricht den stehenden Schwingungen einer gespannten Saite, der zweite denjenigen einer in eine offene Orgelpfeife eingeschlossenen Luftsäule.

Die Gleichung (10) wird noch einfacher, wenn wir die Abscissen vom Knotenpunkt x_0 selbst aus messen. Ist dieser der Ausgangspunkt der Abscissenmessung, so ist einfach $x_0 = O$ zu setzen und

$$y = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} \qquad (10a)$$

Wählen wir dagegen als Ausgangspunkt der Abscissenmessung einen Schwingungsbauch, so ist mit Rücksicht auf diesen neuen Ausgangspunkt die Abscisse x_0 eines Knotenpunktes ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$. Setzen wir z. B. $x_0 = 3 \frac{\lambda}{4}$, so wird

$$\sin 2\pi \frac{x - x_0}{\lambda} = \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

und die Gleichung (10) nimmt dann die Gestalt an:

$$y = A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} \qquad (10b)$$

Wenn man ausserdem noch die Zeit vom Momente eines Durchganges durch die Gleichgewichtslage an zählt, so kann man $t_0 = O$ setzen und man erhält dann entweder

$$y = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (10a_1)$$

oder

$$y = A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (10b_1)$$

je nachdem die Abscissen x von einem Schwingungsknoten oder von einem Schwingungsbauch an gezählt werden.

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass die Gleichungen (9), (10), (10a), (10b), ($10a_1$), ($10b_1$) im Grunde eine und dieselbe stehende Welle darstellen; sie unterscheiden sich von einander ganz nur durch die verschiedene Wahl des Ausgangspunktes der Abscissenmessung und der Zeitmessung.

93. Das Problem der schwingenden Saite. (Zu N. 58 und 59.) — Denken wir uns nun eine gespannte elastische und biegsame Saite von vollkommen gleichmässiger Dicke und gleichmässiger Beschaffenheit des Materials. Die Länge der Saite zwischen den beiden befestigten Enden sei in Centimetern gemessen gleich L, die Spannung der Saite (als spannendes Gewicht in Grammen ausgedrückt) sei P, der Querschnitt der Saite (in Quadrat-Centimetern) sei Q, und endlich das spezifische Gewicht des Materials der Saite gleich S. Abscisse und Ordinate irgend eines Saitenpunktes seien x und y. Die x-Axe sei die Gleichgewichtslage der gespannten Saite. Wir betrachten ein unendlich kleines Stück der Saite, begrenzt von zwei unendlich benachbarten Punkten, deren Abscissen x und $x + dx$,

deren Ordinaten y und y + dy seien. Die Länge dieses kleinen Stückes der Saite sei ds.

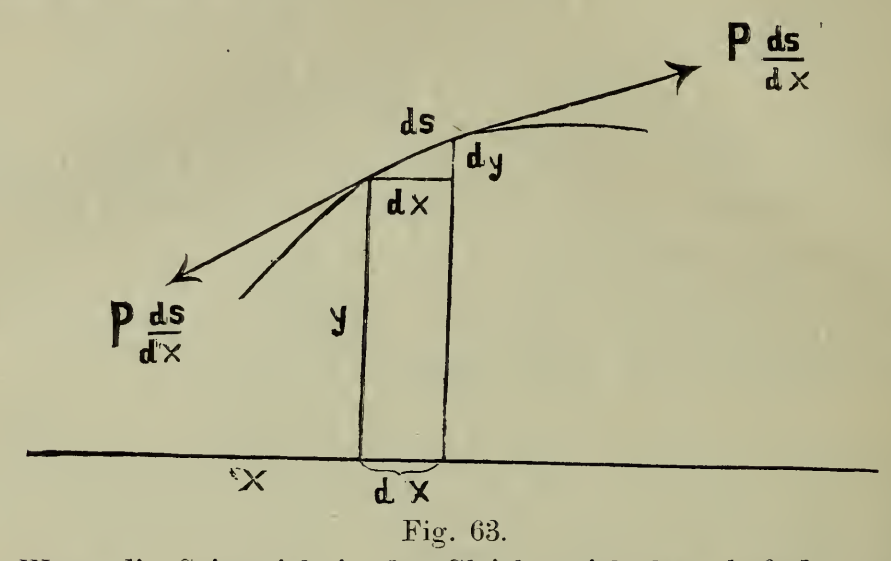


Fig. 63.

Wenn die Saite sich in der Gleichgewichtslage befindet, so hat das nämliche Stückchen der Saite nur die Länge dx, die Spannung ist dann = P und wirkt zu beiden Seiten des kleinen Elementes dx nach entgegengesetzten Richtungen hin in der Richtung der x-Axe. Befindet sich die Saite dagegen in der durch die Kurve der Figur angedeuteten Lage, so ist dasselbe Stückchen der Saite auf die Länge ds ausgedehnt, die Spannung ist dann in demselben Verhältniss gewachsen, in welchem ds zu dx steht, d. h. sie ist dann $= P\frac{ds}{dx}$ zu setzen. Diese Spannung wirkt in den beiden das Kurvenelement ds begrenzenden Punkten in der Richtung der Tangente, wie es in der Figur durch die Richtung der Pfeile angedeutet ist. Die Bewegung des Kurvenelementes ds ist das Resultat der Einwirkung dieser beiden Kräfte.

Die im Punkte (x, y) wirkende Tangentialkraft $P\frac{ds}{dx}$ strebt dahin, das Element ds nach der Gleichgewichtslage hin zu treiben; die in der Richtung der y-Axe wirkende Kraftcomponente, welche diese Tendenz hat, ist $P\,.\,\frac{ds}{dx}\,.\,\frac{dy}{ds} = P\frac{dy}{dx}$.

An dem andern Endpunkte des Elementes ds wirkt die Kraft $P\frac{ds}{dx}$ in entgegengesetztem Sinne, aber nicht diametral entgegengesetzt, da die Richtung der Tangente in diesem Punkte eine etwas andere ist als im Punkte (x, y). Diese Kraft strebt dahin, das Saitenelement

ds von der Gleichgewichtslage zu entfernen, und zwar ist die Kraftcomponente in der Richtung der y-Axe, welche dahin zielt, gleich $P\frac{ds}{dx}\left(\frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}\right)$, da für diesen Endpunkt des Kurvenelementes der Richtungs-Cosinus $\frac{dy}{ds}$ um sein Differential $d\frac{dy}{ds}$ zu vermehren ist (wobei die Differentiation sich auf die unabhängige Variable x zu beziehen hat). Diese Kraftcomponente ist also gleich

$$P\frac{dy}{dx} + P\frac{ds}{dx} \cdot d\frac{dy}{ds}$$

Der Ueberschuss dieser Componente über die im Punkte (x, y) nach entgegengesetzter Richtung hin wirkende Kraftcomponente $P\frac{dy}{dx}$ gibt an, mit welcher Kraft das Stückchen ds der Saite nach der Richtung der wachsenden Ordinaten y hingezogen wird. Dieser Ueberschuss ist

$$P\frac{ds}{dx}\, d\frac{dy}{ds} = P\frac{ds}{dx} \cdot \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds^2}$$

$$= P\frac{d^2y}{dx} - P\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2s}{dx}$$

$$= P\frac{d^2y}{dx^2}\,dx - P\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2s}{dx^2}\,dx$$

Nehmen wir nun an, im Verhältniss zur Länge der schwingenden Saite seien die Exkursionen der Saite sehr klein, was in praxi meist der Fall sein wird, so ist das Differentialverhältniss $\frac{dy}{ds}$ stets ausserordentlich klein, nahezu oder ganz $= 0$. Man kann dann also einfach

$$P\frac{ds}{dx}\, d\frac{dy}{ds} = P\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

setzen. In der Richtung der y-Axe wirkt also auf das Stückchen ds der Saite eine Kraft, welche gleich $P\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$ gesetzt werden kann.

Die Beschleunigung, welche diese Kraft dem Saitenelemente ds ertheilt, ist gleich Kraft dividirt durch Masse, also $= \frac{P}{m}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$, wenn m die Masse des Stückchens ds der Saite bedeutet. Das Gewicht dieses (in der Gleichgewichtslage die Länge dx einnehmenden) Saitenelementes ist aber gleich seinem Volumen multiplizirt mit

dem spezifischen Gewicht des Saitenmaterials, also gleich Q dx . S, somit die Masse m, wenn g die Beschleunigung der Schwere (981 cm) bedeutet:

$$m = \frac{Q\,S}{g}\,dx$$

Die Beschleunigung des Elementes ds in der Richtung der y-Axe wird also

$$\frac{P}{m}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \frac{g\,P}{Q\,S}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

Die Beschleunigung ist aber allgemein gegeben durch den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, also hier durch den Ausdruck $\frac{d^2y}{dt^2}$. Wir erhalten also die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g\,P}{Q\,S}\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (11)$$

als charakteristische Differentialgleichung für die Schwingungen einer Saite. Sie gilt für alle Punkte der schwingenden Saite, sobald die Abweichungen der Saite von der Gleichgewichtslage im Verhältniss zur Länge der Saite sehr gering sind.

Alle Schwingungen, welche der Differentialgleichung (11) Genüge leisten, sind a priori möglich. Diese Differentialgleichung ist von einem sehr grossen Grade von Allgemeinheit; die wirklich auftretende Bewegung wird erst durch speziellere Bedingungen, durch die Begrenzung der Saite, durch die Art der Erregung u. s. f. präzisirt. — Es ist zunächst von Interesse zu untersuchen, ob in einer gespannten Saite eine fortschreitende einfache Wellenbewegung entstehen kann. Dies wird dann der Fall sein, wenn der Ausdruck einer fortschreitenden Sinus-Welle:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

der Differentialgleichung (11) Genüge leistet. Dass dies in der That der Fall ist, lässt sich durch Differentiation von y leicht zeigen. Es ist nämlich

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right) a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y$$

Vergleichen wir die beiden Differentialquotienten

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2 y}{dx^2}$$

so finden wir also die Beziehung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\frac{\lambda}{T}\right)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

oder, da ja $\frac{\lambda}{T} = c$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (12)$$

Diese Gleichung stimmt vollkommen mit der Differentialgleichung (11) überein und es ergibt sich durch Vergleichen von (11) und (12), dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c durch die Gleichung

$$c^2 = \frac{gP}{QS} \text{ oder } c = \sqrt{\frac{gP}{QS}} \qquad (13)$$

bestimmt ist. — Eine gespannte Saite ist also in der That einer fortschreitenden einfachen Wellenbewegung fähig, aber es ist klar, dass diese fortschreitende Bewegung sich in Folge der Begrenzung der Saite, durch Reflexion an den beiden befestigten Enden alsbald in eine stehende Welle verwandelt. Für diese stehende Welle müssen jedenfalls die befestigten Endpunkte der Saite Knotenpunkte sein. Rechnen wir die Abscissen x von dem einen befestigten Ende aus und nennen t_0 die Zeit eines Durchgangs durch die Gleichgewichtslage, so ist die stehende Welle nach Gleichung (10a) darstellbar durch die Gleichung:

$$y = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} \qquad (14)$$

wo $A = 2a$ die Haupt-Amplitude ist.

Dass die stehende Welle (14) der Differentialgleichung (11) Genüge leistet, lässt sich, wie oben, durch Differentiation nachweisen. Man findet auch hier durch Differentiation von (14):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y \text{ und } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y$$

also genau dieselben Gleichungen (11), (12) und (13) wie soeben.

Durch die Bedingung, dass auch das andere befestigte Ende der Saite, für welches $x = L$ ist, ein Knotenpunkt sein soll, sind die möglichen Werthe für λ und T eingeschränkt. Soll in Gleichung

(14) für $x = L$ die Ordinate $y = 0$ sein, so muss $\sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0$ und $2\pi \frac{L}{\lambda} = n\pi$ sein. Es wird dann $\lambda = \frac{2L}{n}$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl sein kann. Gemäss der Gleichung $\lambda = cT$ wird dann dementsprechend $T = \frac{2L}{cn}$.

Setzen wir diese Werthe von λ und T in Gleichung (14) ein, so wird

$$y = A \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_0}{L} \qquad (15)$$

eine Gleichung, welche ausser der allgemeinen Differentialgleichung (11) oder (12) noch den spezielleren Bedingungen Genüge leistet, dass für die beiden befestigten Enden der Saite, d. h. für $x = 0$ und $x = L$, die Ordinate y jederzeit $= 0$ ist. Es kann hierin n jeden beliebigen positiven ganzzahligen Werth annehmen.

Es stellt sich nun heraus, dass nicht allein der in Gleichung (15) gegebene Ausdruck für y, sondern auch eine Summe derartiger Ausdrücke, welche verschiedenen Werthen von n entsprechen, derselben Differentialgleichung (12) und denselben speziellen Bedingungsgleichungen $x = 0$ und $x = L$ Genüge leistet. Haben wir nämlich eine ganze Reihe von stehenden Wellen von der in Gl. (15) dargestellten Beschaffenheit, gegeben durch die Gleichungen

$$y_1 = A_1 \sin \pi \frac{x}{L} \sin c\pi \frac{t - t_1}{L}$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin 2 c\pi \frac{t - t_2}{L}$$

$$y_3 = A_3 \sin 3\pi \frac{x}{L} \sin 3 c\pi \frac{t - t_3}{L}$$

. . . .

$$y_n = A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

. . . .

so ist die Differentialgleichung (11) oder (12) nebst den Bedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = L$ nicht nur für jede einzelne dieser stehenden Wellen, d. h. nicht nur für $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3, \ldots$, $y = y_n, \ldots$ erfüllt, sondern auch für die Summe

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + \ldots$$

die wir abkürzungsweise durch die symbolische Form

$$y = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} y_n = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L} \qquad (16)$$

ersetzen können. Der Beweis lässt sich leicht durch Einsetzen in die

Differentialgleichung (12) und Ausführung der Differentiationen erbringen. Es wird offenbar

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \sum - \left(\frac{n c\pi}{L}\right)^2 . A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 \sum n^2 A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

und ebenso

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum n^2 A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

und es ergibt sich also, dass in der That die beiden zweiten Differentialquotienten der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (12)$$

Genüge leisten, nicht nur dann, wenn y der Ausdruck für eine einzelne stehende Elementarwelle ist, sondern auch dann, wenn y eine Summe solcher Wellen von der Form der Gl. (16) bedeutet.

Es können also in einer Saite gleichzeitig mehrere stehende elementare Sinus-Wellen auftreten, in der Weise, dass die resultirende Bewegung aus der einfachen Addition oder Superposition der einzelnen stehenden Wellen hervorgeht. Die resultirende Bewegung ist in der Gleichung

$$y = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L} \qquad (16)$$

enthalten, wo n jeden beliebigen positiven ganzzahligen Werth annehmen kann. Diese Gleichung ist der mathematische Ausdruck für das Prinzip der Superposition und der Coëxistenz einfacher Schwingungen.

Jedes einzelne Glied der Summe stellt eine einfache stehende Welle von eigener Schwingungsdauer und Schwingungszahl dar. Die Schwingungsdauer der Welle, welche dem nten Gliede entspricht, ist $T_n = \frac{2L}{cn}$; denn $\sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$ kehrt auf denselben Werth zurück, wenn man t um $T_n = \frac{2L}{cn}$ vermehrt. Die Schwin-

gungszahl derselben Welle, die mit z_n bezeichnet sei, ist $z_n = \frac{1}{T_n}$ $= n \frac{c}{2L}$, also ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{c}{2L}$.

Die Schwingungszahlen der einzelnen Glieder der Summe (16) sind also respektive:

$$\frac{c}{2L},\ 2\frac{c}{2L},\ 3\frac{c}{2L},\ 4\frac{c}{2L},\ 5\frac{c}{2L},\ \ldots,\ n\frac{c}{2L},\ \ldots\ .$$

u. s. w. Sie verhalten sich, wie die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, ...; es sind die Schwingungszahlen der einzelnen Partialtöne oder Obertöne. Jedem einzelnen Gliede der Summe (16) entspricht ein Partialton oder Oberton des Klanges der Saite.

Die Schwingungsdauer des ersten Gliedes der Summe (16), für welches $n = 1$ ist, ist $T = \frac{2L}{c}$, die Schwingungszahl ist $z = \frac{c}{2L}$. Diese Werthe für Schwingungsdauer und Schwingungszahl kommen dem Grundton der Saite zu. Die ganze Summe y bleibt unverändert, wenn t um $T = \frac{2L}{c}$ wächst. Die Schwingungsperiode des Grundtones ist zugleich auch diejenige der ganzen Saite.

Setzen wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c den Werth aus Gleichung (13), so ergeben sich für Schwingungsdauer T und Schwingungszahl z der ganzen Saite die Gleichungen

$$T = 2L\sqrt{\frac{QS}{gP}} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{gP}{QS}} \qquad (17)$$

welche der mathematische Ausdruck für die unter N. 58 erwähnten fundamentalen Gesetze schwingender Saiten sind.

Die Coeffizienten A_n der einzelnen Glieder der Summe (16) sind die Haupt-Amplituden der einzelnen Partialschwingungen der Saite. Die mit $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ bezeichneten Grössen geben die Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage für jede einzelne Partialschwingung an. Helmholtz hat durch experimentelle Untersuchungen nachgewiesen, dass die Klangfarbe wohl von den Amplituden $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ der Partialschwingungen abhängt, nicht aber von den Durchgangszeiten $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$, also nicht von den Phasenunterschieden der einzelnen Partialschwingungen. Für die musikalische Klangfarbe sind allein die Coeffizienten A_n, d. h. die Zahl und die Stärke der Partialtöne massgebend.

Sowohl die Coeffizienten A_n als die Zeiten t_n sind zunächst ganz willkürliche Constanten; denn die schon mehrfach erwähnten Bedingungsgleichungen sind stets erfüllt, welche Werthe man diesen Constanten auch beilegen mag. Die Constanten A_n und t_n werden

erst durch die Art, wie die Saite erregt wird, bestimmt. In welcher Weise dies geschieht, soll hier kurz auseinandergesetzt werden.

Nehmen wir zunächst das allgemeine Glied der Reihe (16), so lässt sich dasselbe umgestalten wie folgt:

$$A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n\, c\pi \frac{t - t_n}{L} = A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n\, c\pi \frac{t}{L} \cos n\, c\pi \frac{t_n}{L}$$
$$- A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n\, c\pi \frac{t}{L} \sin n\, c\pi \frac{t_n}{L}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} A_n \cos n\, c\pi \frac{t_n}{L} &= M_n \\ - A_n \sin n\, c\pi \frac{t_n}{L} &= N_n \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

so wird das allgemeine Glied der Summe (16):

$$A_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n\, c\pi \frac{t - t_n}{L} = M_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n\, c\pi \frac{t}{L}$$
$$+ N_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n\, c\pi \frac{t}{L}$$

und die Summe (16) selbst zerfällt nun in 2 getrennte Summen:

$$y = \sum M_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n\, c\pi \frac{t}{L} + \sum N_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n\, c\pi \frac{t}{L} \quad (19)$$

Diese Form ist geeigneter zur Bestimmung der willkürlichen Constanten aus gewissen Anfangsbedingungen. Die Coeffizienten M_n und N_n lassen sich bestimmen, wenn der Anfangszustand der Saite beim Ausgangspunkt der Zeitmessung, also für $t = o$, gegeben ist.

Nehmen wir an, zur Zeit $t = o$ sei die Lage der Saite durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegeben, wo $f(x)$ eine für alle Punkte der Saite, also von $x = o$ bis $x = L$ gegebene Funktion von x ist, so gibt Gleichung (19) für $t = o$:

$$f(x) = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} N_n \sin n\pi \frac{x}{L} \qquad (20)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Coeffizienten N_n in folgender Weise bestimmen:

Die Gleichung (20) werde beiderseits mit $\sin \nu\pi \frac{x}{L} dx$, wo ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ist, multiplizirt und von $x = o$ bis $x = L$ integrirt. Dann wird

$$\int_o^L f(x) \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} N_n \int_o^L \sin n\pi \frac{x}{L} \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx \quad (21)$$

Nun verschwinden aber in der Summe rechts alle Glieder, mit Ausnahme desjenigen, für welches $n = \nu$ ist. Denn, wie die Integralrechnung lehrt, ist das Integral $\int_0^L \sin n\pi \frac{x}{L} \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx = 0$, wenn n von ν verschieden ist; dagegen $\int_0^L \sin^2 \nu\pi \frac{x}{L} dx = \frac{L}{2}$, wenn $n = \nu$ ist.*)

Es bleibt also auf der rechten Seite von Gleichung (21) nur dasjenige Glied der Summe übrig, für welches $n = \nu$ ist und es wird

$$\int_0^L f(x) \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx = N_\nu \cdot \frac{L}{2}$$

also

$$N_\nu = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx \qquad (22)$$

Setzt man hierin $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, so erhält man also succesive alle Coeffizienten $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n, \ldots$

In ganz ähnlicher Weise sind die Coeffizienten M_n zu bestimmen. Man differenzire die Gleichung (19) nach t, so kommt

$$\frac{dy}{dt} = \sum \frac{n c \pi}{L} M_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n c\pi \frac{t}{L} - \sum \frac{n c\pi}{L} N_n \sin n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t}{L}$$

Es sei nun für den Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ für alle Punkte der Saite gegeben durch die Gleichung

---

*) Es ist nämlich

$$\int \sin n\pi \frac{x}{L} \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos (n-\nu)\pi \frac{x}{L} - \cos (n+\nu)\pi \frac{x}{L} \right] dx$$

$$= \frac{L}{2(n-\nu)\pi} \sin (n-\nu)\pi \frac{x}{L} - \frac{L}{2(n+\nu)\pi} \sin (n+\nu)\pi \frac{x}{L}$$

Es ist also in der That

$$\int_0^L \sin n\pi \frac{x}{L} \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx = 0$$

Dagegen ist für $n = \nu$:

$$\int \sin^2 \nu\pi \frac{x}{L} dx = \int \frac{1 - \cos 2\nu\pi \frac{x}{L}}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{L}{4\nu\pi} \sin 2\nu\pi \frac{x}{L}$$

also $\int_0^L \sin^2 \nu\pi \frac{x}{L} dx = \frac{L}{2}$

$$\frac{dy}{dt} = \varphi\ (x)$$

wo φ (x) eine für alle Werthe von x, von x = O bis x = L willkürlich vorgeschriebene Funktion bedeutet, so muss $\frac{dy}{dt} = \varphi$ (x) gesetzt werden für t = O. Es wird also

$$\varphi\ (x) = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} \frac{n\ c\ \pi}{L} M_n \sin n\pi \frac{x}{L} \qquad (23)$$

Auch hier multipliziren wir beidseitig mit $\sin \nu\pi \frac{x}{L}$ dx und integriren von x = O bis x = L. Es wird dann

$$\int_0^L \varphi\,(x) \sin \nu\pi \frac{x}{L}\ dx = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} \frac{n\,c\,\pi}{L} M_n \int_0^L \sin n\,\pi \frac{x}{L} \sin \nu\pi \frac{x}{L} dx \ (24)$$

Wir haben rechterseits das nämliche Integral wie soeben; auch hier verschwinden alle Glieder der Summe mit Ausnahme desjenigen, für welches n = ν ist.

Es wird $\int_0^L \varphi\ (x)\ \sin\ \nu\pi \frac{x}{L}\ dx = \frac{\nu\,c\,\pi}{L}\ M_\nu\ .\ \frac{L}{2} = \frac{\nu\,c\,\pi}{2}\ M_\nu$

also

$$M_\nu = \frac{2}{\nu\,c\,\pi} \int_0^L \varphi\ (x)\ \sin\ \nu\pi \frac{x}{L}\ dx \qquad (25)$$

Setzen wir ν = 1, 2, 3, . . ., n, . . ., so gibt diese Gleichung successive die Werthe von M_1, M_2, M_3, . . ., M_n, . . .

Die Coeffizienten M_n und N_n sind also vollkommen eindeutig bestimmt, wenn der Anfangszustand der Saite, d. h. ihre Gestalt und ihre Geschwindigkeit, für den Zeitpunkt t = O gegeben ist. Sind aber die Constanten M_n und N_n bekannt, so ergeben sich daraus mit Hülfe der Gleichungen (18) sehr leicht die Hauptamplituden A_n und die Phasen-Constanten t_n. Quadrirt man nämlich die beiden Gleichungen (18) und addirt sie, so folgt:

$$A_n^2 \left[\cos^2 n\ c\pi \frac{t_n}{L} + \sin^2 n\ c\pi \frac{t_n}{L}\right] = A_n^2 = M_n^2 + N_n^2$$

$$A_n = \sqrt{M_n^2 + N_n^2} \qquad (26)$$

und dividirt man die beiden Gleichungen (18), die zweite durch die erste, so wird

$$\operatorname{tang}\ n\,c\pi \frac{t_n}{L} = - \frac{N_n}{M_n} \qquad (27)$$

Es sind also auch die Constanten A_n und t_n der Gleichung (16) als bekannt zu betrachten, wenn der Anfangszustand der Saite gegeben ist. Dieser Anfangszustand wird ganz verschieden sein, je nachdem die Saite gerissen, geschlagen oder gestrichen wird, je nach der Art und dem Orte der Erregung. Es wird z. B. für eine Saite, die mit einem spitzen Stifte aus ihrer Gleichgewichtslage zur Seite gezogen und dann sich selbst überlassen, also gezupft wird, die Anfangslage $y = f(x)$ durch eine gebrochene gerade Linie gegeben sein, deren Ecke am Ausbiegungspunkte liegt; die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \varphi(x)$ dagegen wird für $t = 0$ selbst gleich Null zu setzen sein. So erhalten dann die allgemeinen Formeln (22) und (25) einen bestimmten konkreten Inhalt und man erhält dann für die Constanten M_n und N_n, sowie für A_n und t_n ganz bestimmte von der Ordnungszahl n abhängende Werthe. — Aehnlich sind diese Constanten für geschlagene Saiten zu bestimmen; dort lässt sich der Anfangszustand der Saite auch durch Bedingungsgleichungen ausdrücken und dadurch den Formeln (22) und (25) ein konkreter Inhalt geben. — Schwieriger ist die Aufgabe für gestrichene Saiten. Die Wirkung des Bogens ist ausserordentlich schwer in strenge mathematische Form zu fassen. Man schlägt hier einen umgekehrten Weg ein, indem man experimentell die Schwingungsform der gestrichenen Saite für verschiedene Streichstellen und verschiedene Beobachtungspunkte beobachtet; aus der beobachteten Schwingungsform schliesst man dann rückwärts auf die Wirkungsweise des Bogens.

Es ist hier nicht der Ort, auf die mathematische Theorie der gezupften, geschlagenen und gestrichenen Saiten tiefer einzugehen. Es genügt für unsere Zwecke vollkommen, die Einsicht gewonnen zu haben, dass die Coeffizienten M_n, N_n, sowie die Constanten A_n und t_n durch die spezielle Art der Erregung völlig bestimmt sind. Daraus folgt dann weiter, dass die durch die Gleichung (16) ausgedrückte Zerlegung der Bewegung der Saite in einfache Partialschwingungen mathematisch nur in einer einzigen Weise möglich ist. Dieses von Fourier (1768—1830) herrührende, der allgemeineren Theorie der Fourier'schen Reihen angehörende mathematische Gesetz erhält eine konkretere physiologische Deutung durch den Satz von Ohm (1787—1854), nach welchem das Ohr nur Sinus-Wellen als einfache Töne empfindet, dagegen alle andern Arten von Schwingungen in völlig eindeutiger Weise, in genauer Uebereinstimmung mit der mathematischen Theorie, in Partialtöne zu zerlegen fähig ist.

Wir haben über die Zahl der Glieder, aus denen die verschiedenen mit $\sum$ bezeichneten Summen bestehen, bisher keine Voraussetzung gemacht; sie ist zunächst unbegrenzt. Es ist jedoch klar, dass in praxi diese Zahl eine Grenze hat. Jedem Gliede der allgemeinen Summe entspricht eine Partialschwingung; je höher die Ordnungszahl n ist, um so grösser wird die Schwingungszahl und um so kleiner die Wellenlänge des betreffenden Partialtons. Der Bildung von Partialschwingungen von gar zu kleiner Wellenlänge gebietet aber die Steifigkeit der Saite Halt. Man wird es also in Wirklichkeit niemals mit einer unbegrenzten Anzahl von Partialschwingungen, d. h. von Gliedern der Summe zu thun haben. Bei rein mathematisch-analytischer Behandlung des Problems wird man jedoch zunächst über die Zahl der Glieder keine Voraussetzung machen dürfen, sondern in den Summen der laufenden Zahl n alle ganzzahligen Werthe von $n = 1$ bis $n = \infty$ beilegen müssen. Dann erst stellen die Summen (16) und (19) das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (11) und (12) dar. Die Summen verwandeln sich dann in unendliche Reihen, von denen genau untersucht werden muss, wann sie convergiren und unter welchen Voraussetzungen ihnen eine reale Bedeutung zukommt. Diese Aufgabe fällt der höheren Integralrechnung und Funktionentheorie zu. — Es wurde bei der mathematischen Behandlung des Problems stillschweigend vollkommene Biegsamkeit der Saite vorausgesetzt. Jede Saite hat aber einen grösseren oder geringeren Grad von Steifigkeit, der um so bedeutender ist, je dicker die Saite im Verhältniss zur Länge ist. Diese Steifigkeit setzt einerseits, wie soeben bemerkt, der Bildung höherer Partialschwingungen eine Grenze, andrerseits wirkt sie ähnlich wie eine Vermehrung der Spannung, so dass die Schwingungszahl bei grosser Steifigkeit etwas höher wird, als die Theorie unter Voraussetzung vollkommener Biegsamkeit angibt.

Bei nicht zu grosser Steifigkeit und bei Exkursionen, die im Verhältniss zur Länge der Saite gering sind, stimmt aber die entwickelte mathematische Theorie in schönster Weise mit der Erfahrung überein und gibt einen klareren Einblick in das Wesen schwingender Bewegungen, als es Worte allein jemals zu thun vermögen.

94. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in luftförmigen Körpern. Schwingende Luftsäulen. (Zu N. 66 und 68.) — Das unter der vorigen Nummer abgehandelte „Problem der schwingenden Saite“ kann mit unwesentlichen Modifikationen auf longitudinal schwingende Luftsäulen übertragen werden,

wenn deren Länge die andern Dimensionen weit überwiegt. Wenn wir für die longitudinalen Schwingungen unter y die Entfernung eines schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage verstehen (hier natürlich in der Längsrichtung der Luftsäule gemessen), so gilt auch hier eine ebensolche Differentialgleichung von der Form (11) oder (12):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

nur ist hier die Constante c der veränderten Art der Bewegung entsprechend zu bestimmen. Für schwingende Saiten war $c^2 = \frac{g P}{Q S}$, wo P die Spannung, Q den Querschnitt und S das spezifische Gewicht der Saite bedeutete. Der Quotient $\frac{P}{Q}$ ist die Spannung, berechnet auf die Einheit des Querschnittes, also die Spannung pro 1 Quadratcentimeter des Querschnittes.

Was für die Saite die Spannung, das ist für die Luftsäule der äussere Druck, unter welchem die Luft steht. Dieser Druck bewirkt das Zurückschwingen eines aus seiner Gleichgewichtslage gedrängten Lufttheilchens in derselben Weise, wie die Spannung es bei einer gespannten Saite thut. Wir können den Quotienten $\frac{P}{Q}$ geradezu ersetzen durch den Druck der Luft auf die Fläche von einem Quadratcentimeter. Nennen wir diesen Druck p, so ist p gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule vom Querschnitte eines Quadratcentimeters und der durch den Barometerstand angegebenen, in Centimetern ausgedrückten Höhe, also $p = 13{,}55 \,.\, b$, wo 13,55 das spezifische Gewicht des Quecksilbers und b der Barometerstand in Centimetern ist. Nehmen wir den Normalbarometerstand zu 760^{mm} oder 76^{cm} an, so wird also $p = 13{,}55 \,.\, 76 = 1030$ gr. — Das spezifische Gewicht S ist hier das Gewicht eines Kubikcentimeters Luft; für die Temperatur von 0° C ist dasselbe = 0,00129 gr. Ist die Temperatur höher als 0°, z. B. T° C, so ist das spezifische Gewicht in demselben Maasse geringer, als sich die Luft unter dem Einflusse der Wärme ausgedehnt hat; es ist $S = \frac{0{,}00129}{1 + 0{,}00367 \,.\, T}$, wo 0,00367 der Ausdehnungscoeffizient $(\frac{1}{273})$ der Luft ist. — Für g ist die Beschleunigung der Schwere in Centimetern zu setzen: g = 981.

Es wird also nun

$$c^2 = \frac{g P}{Q S} = \frac{g p}{S} = \frac{981 \,.\, 1030}{0{,}00129} (1 + 0{,}00367 \,.\, T)$$

und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{981 \,.\, 1030}{0{,}00129} (1 + 0{,}00367 \,.\, T)}$$

Der constante vor der Klammer stehende Faktor bedarf noch einer Korrektur. Es ist nämlich zu bedenken, dass jede Compression, also jede Verdichtung eine Erhöhung, jede Verdünnung eine Erniedrigung der Temperatur zur Folge hat (wenn Verdichtungen und Verdünnungen „adiabatisch“, d. h. ohne äussern Zufluss oder Abfluss von Wärme, erfolgen). Durch Temperaturerhöhung allein wird aber die Spannung eines Gases erhöht, durch Temperaturerniedrigung verkleinert. Es wird also dadurch der Ueberdruck, welcher die Luft von den verdichteten nach den verdünnten Stellen hintreibt, vergrössert, was einer Vermehrung des Druckes und einer Beschleunigung der Fortpflanzung, d. h. einer Steigerung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleichkommt. Die mechanische Theorie der Wärme zeigt, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen noch mit einem constanten Faktor k zu multipliziren ist und dass k = 1,4 zu setzen ist (nämlich gleich dem Verhältniss zwischen der spezifischen Wärme des Gases bei constantem Druck zu derjenigen bei constantem Volumen). Es wird also nun:

$$c = \sqrt{1{,}4 \,.\, \frac{981 \,.\, 1030}{0{,}00129} (1 + 0{,}00367 \,.\, T)}$$

oder wenn die Rechnung ausgeführt wird

$$c = 100 \,.\, 331 \sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, T}$$

wo natürlich die Geschwindigkeit in Centimetern ausgedrückt ist. Drücken wir sie in Metern aus, so finden wir also für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft bei der Temperatur von T^0 C die unter N. 68 angeführte Formel:

$$c = 331 \sqrt{1 + 0{,}00367\, T} \qquad (28)$$

welche mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt also wesentlich von der Temperatur ab. Von Schwankungen des Barometerstandes ist sie dagegen unabhängig; denn in dem Quotienten p : S = 13,55 . b : S bleibt das Verhältniss b : S für ein und dieselbe Temperatur unverändert, da das spezifische Gewicht S proportional mit dem Barometerstande b zu- oder abnimmt.

Nachdem nun die Constante c bestimmt ist, kann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

in vollkommen analoger Weise behandelt werden, wie unter der vorigen Nummer. Nur die spezielleren Bedingungen sind hier andere insofern, als am Ende einer offenen Luftsäule sich kein Knoten, sondern ein Schwingungsbauch bildet. Zählen wir die Abscissen x vom offenen Ende aus und die Zeit t vom Durchgang durch die Gleichgewichtslage an, so wird man nach Gleichung ($10b_1$)

$$y = A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (29)$$

setzen können. Die Constante λ bestimmt sich durch die Bedingungen, welche für das andere Ende der Luftsäule erfüllt sein müssen. Ist die Länge der Luftsäule L, so wird bei einer offenen Pfeife für $x = L$ der Faktor

$$\cos 2\pi \frac{L}{\lambda} = \pm 1, \text{ also } \lambda = \frac{2L}{n} \text{ und } T = \frac{2L}{cn}$$

sein müssen. Es wird dann also

$$y = A \cos n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t}{L}$$

sein, wenn die Zeit t vom Augenblicke des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage an gezählt wird. Wählt man dagegen den Ausgangspunkt der Zeitmessung beliebig und nennt t_n die Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage, so wird

$$y = A \cos n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L}$$

werden, und es wird vollkommen analog wie oben die wirkliche Bewegung der Luftsäule durch eine Summe derartiger Ausdrücke darzustellen sein:

$$y = \sum_{n = 1, 2, 3, \ldots} A_n \cos n\pi \frac{x}{L} \sin n c\pi \frac{t - t_n}{L} \qquad (30)$$

in vollkommener Analogie mit Gleichung (16).

Bei einer gedeckten Pfeife dagegen wird für das geschlossene Ende, also für $x = L$, in Gleichung (29) der von der Zeit unabhängige Faktor gleich Null zu setzen sein, also

$$\cos 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0,\ 2\pi \frac{L}{\lambda} = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ \lambda = \frac{4L}{(2n + 1)},\ T = \frac{4L}{c(2n + 1)}$$

Es wird also hier die Gleichung einer stehenden Sinus-Welle

$$y = A \cos (2n + 1)\pi \frac{x}{2L} \sin (2n + 1) c\pi \frac{t}{2L}$$

und die allgemeine Gleichung für die in einer gedeckten Pfeife mögliche schwingende Bewegung wird die folgende Gestalt haben:

$$y = \sum_{n = 0, 1, 2, \ldots} A_n \cos (2n + 1)\pi \frac{x}{2L} \sin (2n + 1) c\pi \frac{t - t_n}{2L} \qquad (31)$$

woraus sich die weiteren Schlüsse von selbst ergeben.

Alle ferneren Betrachtungen über Superposition, Coexistenz der Schwingungen, Partialtöne, Coeffizientenbestimmung u. s. w. sind in durchaus ähnlicher Weise durchzuführen, wie es unter der vorigen Nummer geschah. Der Leser wird den zu gehenden Weg ohne besondere Wegleitung mit Leichtigkeit finden. —

95. Interferenz von Wellen gleicher Fortpflanzungsrichtung und gleicher Wellenlänge. (Zu N. 83.) — Nehmen wir an, es pflanzen sich in derselben Richtung zwei einfache fortschreitende Sinus-Wellen von derselben Wellenlänge λ mit derselben Geschwindigkeit c fort. Die Gleichung der einen Welle sei

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

die Gleichung der andern sei

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Die beiden Wellen gelangen zur Interferenz; die resultirende Bewegung wird gegeben sein durch die Gleichung

$$y = y_1 + y_2$$

oder

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Es sei der Gangunterschied der beiden Wellen $x_2 - x = d$; dann wird:

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

oder unter Anwendung einer bekannten trigonometrischen Formel:

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}$$
$$- a_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$y = \left(a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - a_2 \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (32)$$

Die letzte Gleichung lässt sich aber sehr leicht in eine bequemere, leichter zu deutende Form bringen, wenn man zwei neue Constanten A und e einführt, die durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} &= A \cos 2\pi \frac{e}{\lambda} \\ a_2 \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} &= A \sin 2\pi \frac{e}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

zu bestimmen sind. Die Constante e ergibt sich aus diesen Gleichungen durch Division:

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{e}{\lambda} = \frac{a_2 \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}}{a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}} \quad (34)$$

Die Constante A dagegen ergibt sich, indem man die beiden Gleichungen (33) quadrirt und addirt:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad (35)$$

Die beiden Constanten A und e dürfen also als bekannte Grössen vorausgesetzt werden. Setzt man die durch die Gleichungen (33) gegebenen Ausdrücke in Gl. (32) ein, so wird

$$y = A \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{e}{\lambda} - \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{e}{\lambda} \right]$$

oder

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + e}{\lambda} \right) \quad (36)$$

Das Resultat der Interferenz ist also wieder eine einfache Sinus-Welle, deren Amplitude A durch die Gleichung (35) gegeben ist.

Ist der Gangunterschied d der beiden interferirenden Wellen ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, also $d = n \cdot \lambda$, so wird nach Gl. (35):

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = \left(a_1 + a_2 \right)^2$$

$$A = a_1 + a_2$$

Die Wellen verstärken sich in diesem Falle, und zwar ist die resultirende Amplitude gleich der Summe der Amplituden der beiden interferirenden Wellen. Ist der Gangunterschied d der beiden Wellen dagegen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, also $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, so wird nach Gleichung (35)

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = \left(a_1 - a_2 \right)^2$$

$$A = \pm (a_1 - a_2)$$

In diesem Falle schwächen sich die beiden interferirenden Wellen, und zwar ist die Amplitude der resultirenden Welle gleich der Differenz der Amplituden der interferirenden Wellen.

Ist ausserdem $a_1 = a_2$, so wird $A = 0$ und die beiden Wellen vernichten sich.

Vernichtung tritt also nur dann und stets dann ein, wenn der Gangunterschied der interferirenden Wellen einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge gleichkommt, und ausserdem die Amplituden der beiden Wellen gleich gross sind.



Alphabetisches Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seitennummern.)

A.

B.

I. J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

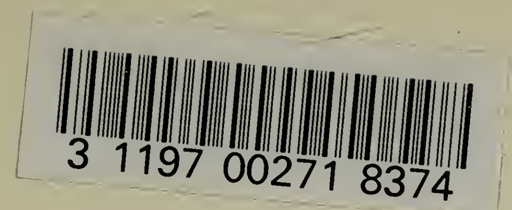
S.

T.

U.

V.

Druck von H. Klöppel, Gernrode (Harz).



DATE DUE

APR 1 2 1980			
FEB 2 3 REC'D			